

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 17.IX.2018 — Compito n. 1

1. Sia data la funzione $f(x, y) = xy(x + y - 3a)$, con $a \in \mathbb{R}$ un parametro. Al variare di a , trovare i punti critici di f e dire se sono di max/min locale o nessuno dei due. (NB se lo studio del caso generale risultasse difficoltoso, limitarsi ai casi $a = 0$ e $a = 1$).

2. (solo per Ing. Medica) Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ la porzione del cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 2 che si trova a destra dell'asse y . Calcolare l'integrale doppio su C della funzione $f(x, y) = (x - y - 1)^2$.

3. Calcolare l'integrale triplo di $f(x, y, z) = x + y^2 + z^2$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 3z^2\}.$$

4. Sia γ la curva piana di equazione $\gamma(t) = (e^t \cos \frac{\pi}{2}t, e^t \sin \frac{\pi}{2}t)$, con $t \in [0, 1]$.

- (a) Dire se γ è una curva regolare.
(b) Calcolare la lunghezza di γ .
(c) Calcolare l'integrale di seconda specie su γ del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \frac{y^2}{\sqrt{x+1}} \mathbf{i} + y(4\sqrt{x+1} - y) \mathbf{j}.$$

5. Studiare la convergenza delle serie seguenti al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^{\alpha+2}} + \frac{1}{n^{2-\alpha}}\right) \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n^2} - 1)^\alpha.$$

6. (solo per Ing. Civ.-Amb.) Sia data la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^4 + 4}$.

- (a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = 2i$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

- (b) Calcolare l'integrale improprio reale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^4 + 4} dx$ (giustificando il procedimento seguito).

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 17.IX.2018 — Compito n. 2

1. Sia data la funzione $f(x, y) = xy(3a + x + y)$, con $a \in \mathbb{R}$ un parametro. Al variare di a , trovare i punti critici di f e dire se sono di max/min locale o nessuno dei due. (NB se lo studio del caso generale risultasse difficoltoso, limitarsi ai casi $a = 0$ e $a = 1$).
2. (solo per Ing. Medica) Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ la porzione del cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 2 che si trova a destra dell'asse y . Calcolare l'integrale doppio su C della funzione $f(x, y) = (y + 1 - x)^2$.

3. Calcolare l'integrale triplo di $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2$ sull'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 3z^2\}.$$

4. Sia γ la curva piana di equazione $\gamma(t) = (e^t \cos \frac{\pi}{2}t, e^t \sin \frac{\pi}{2}t)$, con $t \in [0, 1]$.
 - (a) Dire se γ è una curva regolare.
 - (b) Calcolare la lunghezza di γ .
 - (c) Calcolare l'integrale di seconda specie su γ del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \frac{y^2}{\sqrt{x+1}} \mathbf{i} + y(4\sqrt{x+1} - y) \mathbf{j}.$$

5. Studiare la convergenza delle serie seguenti al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha - 1}\right)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^{\alpha+3}} + \frac{1}{n^{3-\alpha}}\right) \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n^2} - 1)^\alpha.$$

6. (solo per Ing. Civ.-Amb.) Sia data la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^4 + 4}$.
 - (a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = 2i$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.
 - (b) Calcolare l'integrale improprio reale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^4 + 4} dx$ (giustificando il procedimento seguito).