

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale e Ing. Medica

Prova scritta del 16.IX.2019 — Compito n.

1. Dire se il punto $(0, 1)$ è di massimo, minimo, o nessuno dei due, per le funzioni:

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2x, \quad g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2(x - y),$$

$$h(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2(x - y) + x^3.$$

2. Sia T il trapezio di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$ e sia S il semicerchio di centro $(2, 1)$ e raggio $\sqrt{2}$ che si trova al di sopra della retta di equazione $x + y = 3$. Calcolare l'integrale doppio su $T \cup S$ della funzione $f(x, y) = 1 + 3x$.

3. Calcolare l'integrale triplo della funzione $f(x, y, z) = x + y^2 + z^2$ sull'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq \frac{z^2}{3} \right\}.$$

4. Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2} - y, e^{2y} + \frac{y}{1 + x^2 + y^2} + ax \right),$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

- (a) Dire per quali valori di a il campo \mathbf{F} è conservativo.
(b) Per i valori di a trovati nel punto precedente, calcolare $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (t^3 - 5t, te^{t^2-4})$, $t \in [0, 2]$.
(c) Per un valore di a qualunque, calcolare $\int_{\zeta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove ζ è il segmento avente gli stessi estremi di γ .
5. Studiare la convergenza delle serie seguenti al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha + 1} \right)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{\alpha} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n^{2\alpha}}{n^{\alpha+3}}.$$