

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ingegneria

Prova scritta del 16.II.2016 – Compito n.

1. (6 punti) (solo per Elettronica e Internet) Sia $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + 4x^2y + 1$ e siano $P_1 = (-\sqrt{2}, -2)$, $P_2 = (0, -4)$, $P_3 = (2, 0)$. Per ciascuno dei tre punti, dire se si tratta di un punto di massimo o minimo locale o nessuno dei due.

2. (7 punti) Calcolare

$$\iint_{\Omega} (x + y)^2 dx dy$$

dove

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0 \}.$$

3. (6 punti) Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (1 + \sqrt{2} \cos t, \sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

- (a) Mostrare che la curva possiede un solo punto sull'asse y e trovare l'equazione della retta tangente in tale punto.
(b) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} (xy - y) ds$.
(c) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ dove $\mathbf{F} = (xy^4 + ye^x, 2y^3(x^2 + 2) + e^x)$.

4. (5 punti) Sia $f(x) = \pi - \frac{x^2}{\pi}$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e periodica di periodo 2π sul resto di \mathbb{R} .

- (a) Calcolare la serie di Fourier di f e studiarne la convergenza.

- (b) Usando l'informazione del punto precedente, dire quanto vale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

5. (6 punti) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^4 + 4}$.

- (a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = -2$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

- (b) Calcolare l'integrale improprio reale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi y}{y^4 + 4} dy$ (sugg. metterlo in relazione con l'integrale di $f(z)$ lungo l'asse immaginario).

6. (6 punti) (solo per Civile-Ambientale) Sia $f(x, y) = y^2 - x$ e sia Γ la curva di equazione $x^2 - 4x + 2y^2 - 4x = 0$.

- (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ utilizzando i moltiplicatori di Lagrange.
(b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 - 4x \leq 0, x \geq 2\}$.

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ingegneria

Prova scritta del 16.II.2016 – Compito n.

1. (6 punti) (solo per Elettronica e Internet) Sia $f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - 4x^2y + 1$ e siano $P_1 = (-\sqrt{2}, 2)$, $P_2 = (2, 0)$, $P_3 = (0, 4)$. Per ciascuno dei tre punti, dire se si tratta di un punto di massimo o minimo locale o nessuno dei due.

2. (7 punti) Calcolare

$$\iint_{\Omega} (x + y)^2 dx dy$$

dove

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 4, y \geq 0 \}.$$

3. (6 punti) Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\cos t, 1 + \sqrt{2} \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{3}{2}\pi\right].$$

(a) Mostrare che la curva possiede un solo punto sull'asse x e trovare l'equazione della retta tangente in tale punto.

(b) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} (x - xy) ds$.

(c) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ dove $\mathbf{F} = (xy^4 + e^y, 2y^3x^2 + xe^y)$.

4. (5 punti) Sia $f(x) = \pi^2 - x^2$ per $x \in (-\pi, \pi]$ e periodica di periodo 2π sul resto di \mathbb{R} .

(a) Calcolare la serie di Fourier di f e studiarne la convergenza.

(b) Usando l'informazione del punto precedente, dire quanto vale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

5. (6 punti) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^4 + 4}$.

(a) Calcolare l'integrale di f sulla circonferenza di centro $z = 2i$ e raggio 2 percorsa in senso antiorario.

(b) Calcolare l'integrale improprio reale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^4 + 4} dx$ (giustificando il procedimento seguito).

6. (6 punti) (solo per Civile-Ambientale) Sia $f(x, y) = y - x^2$ e sia Γ la curva di equazione $2x^2 + y^2 - 4y = 0$.

(a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ utilizzando i moltiplicatori di Lagrange.

(b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 - 4y \leq 0, y \leq 2\}$.