UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 15.II.2019 — Compito n.

1. (5 punti) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(0,1)$

$$f(x,y) = (x^2-y)(2-y)+xy-x, \qquad g(x,y)=x^4+x^2(y^2-y), \qquad h(x,y)=(y^2+2)e^x.$$

2. (5 punti) Sia $f(x,y)=4x^2-8x-y^2$ e sia Γ la curva piana di equazione $x^2-2x+\frac{y^2}{4}=0$.
   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.
   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C=\{(x,y)\ :\ x^2-2x+\frac{y^2}{4}\le 0,\ y\ge\sqrt{3}\}$.

3. (8 punti) Si consideri l'insieme $\Omega=\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2\le 4,\ x^2+y^2\ge 3,\ z\ge 0\}$.
   (a) Calcolare l'integrale su Ω della funzione $f(x,y,z)=x^2+\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
   (b) Calcolare l'integrale su Ω della funzione $g(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

4. (6 punti - da svolgere solo per Ing. Medica)
   Sia γ la curva piana di equazione $\gamma(t)=(2t\cos\pi t, 2t\,\mathrm{sen}\,\pi t)$, con $t\in[-1,1]$.
   (a) Dire se γ è una curva regolare.
   (b) Calcolare l'integrale di prima specie su γ della funzione $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
   (c) Calcolare l'integrale di seconda specie su γ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}=\left(\frac{x}{x^2+y^4+1}+2x^5y^3\right)\mathbf{i}+\left(\frac{2y^3}{x^2+y^4+1}+x^6y^2+e^y\right)\mathbf{j}.$$

5. (6 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^n \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n^2-8n}{n^\alpha\ln n} \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

6. (6 punti - da svolgere solo per Ing. Civ. e Amb.) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z)=\dfrac{e^{\pi z^2}}{z^4+4}$ e si indichi con γ_R la circonferenza di centro $z=1$ e raggio R percorsa in senso antiorario. Calcolare, al variare di $R>0$, l'integrale di f su γ_R.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 15.II.2019 — Compito n.

1. (5 punti) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(1,0)$

$$f(x,y) = (x-y^2)(x-2)+xy-y, \qquad g(x,y) = (x^3+1)e^y, \qquad h(x,y) = y^4+x(xy^2-y^2), \qquad .$$

2. (5 punti) Sia $f(x,y) = 4x^2 + 8x - y^2$ e sia Γ la curva piana di equazione $x^2 + 2x + \frac{y^2}{4} = 0$.

   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.

   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ x^2 + 2x + \frac{y^2}{4} \leq 0, \ y \leq -\sqrt{3}\}$.

3. (8 punti) Si consideri l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ x^2 + y^2 \geq 2, \ z \geq 0\}$.

   (a) Calcolare l'integrale su Ω della funzione $f(x,y,z) = x^2 + \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   (b) Calcolare l'integrale su Ω della funzione $g(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

4. (6 punti - da svolgere solo per Ing. Medica)
   Sia γ la curva piana di equazione $\gamma(t) = (t\cos \pi t, t \operatorname{sen} \pi t)$, con $t \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

   (a) Dire se γ è una curva regolare.

   (b) Calcolare l'integrale di prima specie su γ della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

   (c) Calcolare l'integrale di seconda specie su γ del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(\frac{2x^3}{x^4+y^2+1} + x^2y^6 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{y}{x^4+y^2+1} + 2x^3y^5 + e^y \right) \mathbf{j}.$$

5. (6 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{(a)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^n \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ \frac{n^2 \ln n - 8n}{n^\alpha} \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^\alpha.$$

6. (6 punti - da svolgere solo per Ing. Civ. e Amb.) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{e^{\pi z^2}}{z^4+16}$ e si indichi con γ_R la circonferenza di centro $z = \sqrt{2}$ e raggio R percorsa in senso antiorario. Calcolare, al variare di $R > 0$, l'integrale di f su γ_R.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 15.II.2019 — Compito n.

1. (5 punti) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(0,1)$

$$f(x,y) = x^2(y^2 - y) + x^4, \qquad g(x,y) = (x^2 - y)(y-2) + x - xy \qquad h(x,y) = (1+x^2)e^y.$$

2. (5 punti) Sia $f(x,y) = x^2 - 8y - 4y^2$ e sia Γ la curva piana di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 + 2y = 0$.
   (a) Trovare max e min assoluto di f su Γ.
   (b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ \frac{x^2}{4} + y^2 + 2y \leq 0, \ x \geq \sqrt{3}\}$.

3. (8 punti) Si consideri l'insieme $\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \, x^2 + y^2 \geq 1, \, z \geq 0\}$.
   (a) Calcolare l'integrale su Ω della funzione $f(x,y,z) = x^2 + \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
   (b) Calcolare l'integrale su Ω della funzione $g(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

4. (6 punti - da svolgere solo per Ing. Medica)
   Sia γ la curva piana di equazione $\gamma(t) = (t\cos \pi t, t \operatorname{sen} \pi t)$, con $t \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$.
   (a) Dire se γ è una curva regolare.
   (b) Calcolare l'integrale di prima specie su γ della funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (c) Calcolare l'integrale di seconda specie su γ del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1} + x^2y^6 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{y}{x^2+y^2+1} + 2x^3y^5 + e^y \right) \mathbf{j}.$$

5. (6 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{(a)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right)^n \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n^\alpha - 8n}{n^2 \ln n} \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right)^\alpha .$$

6. (6 punti - da svolgere solo per Ing. Civ. e Amb.) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{e^{-\pi z^2}}{z^4+4}$ e si indichi con γ_R la circonferenza di centro $z = i$ e raggio R percorsa in senso antiorario. Calcolare, al variare di $R > 0$, l'integrale di f su γ_R.