UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Elettronica, Tecn. Internet

Prova scritta del 14.IX.2016 — Compito n.

1. (6 punti - da svolgere solo per Ing. Elettronica, Internet)
   Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = (x^2+y^2-1)(x+1)$ e dire se sono di massimo o minimo locale.

2. (7 punti) Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 16, \ y \geq 2\}$. Calcolare l'integrale doppio su Ω della funzione $g(x,y) = x^2+y^2$.

3. (7 punti) Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(y - x \operatorname{sen}[\pi(x^2-2y)] \ , \ \operatorname{sen}[\pi(x^2-2y)] + \beta x \big) \, ,$$

   dove $\beta \in \mathbb{R}$ è un parametro.

   (a) Dire per quali valori di β il campo $\mathbf{F}$ è conservativo e, per tali valori, calcolare un potenziale di F.

   (b) Per un valore di β qualunque, calcolare $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}$, dove γ è la curva di equazione $\gamma(t) = (\, t^{14} + t^6 - t^2 \, , \, -t^2 \,)$, $t \in [0,1]$.

   (c) Mostrare che, per i valori di β diversi da quelli trovati nel punto (a), non esistono curve chiuse semplici su cui il campo ha integrale nullo (sugg. usare il teorema di Stokes nel piano).

4. (5 punti) Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \operatorname{sen} n}{n^n}, \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \ln n.$$

5. (5 punti) Calcolare, usando la trasformata di Laplace, la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = 2e^x$$

   che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$. (NB il risultato deve essere scritto sotto forma di funzione reale)

6. (6 punti, da svolgere solo per Ing. Civ.-Amb.)

   Sia $f(x,y) = 2x^2 + y - 3$ e sia Γ l'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

   (a) Trovare massimo e minimo assoluto di f su Γ utilizzando i moltiplicatori di Lagrange.

   (b) Trovare massimo e minimo assoluto di f su $C = \{(x,y) \ : \ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, \ y \geq -1\}$.