UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 13.II.2020 — Compito n.

1. (5 punti) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(1, 0)$:

$$f(x, y) = y^2(x^2 - 2xy - x), \quad g(x, y) = -3xe^y + (x + y)^3, \quad h(x, y) = \frac{x^2}{1 - y^2}.$$

2. (6 punti) Sia $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y$ e sia Γ la curva di equazione $x^2 + 3y^2 - 6y = 9$.

- (a) Verificare che Γ è regolare e trovare max e min assoluto di f su Γ .
(b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 - 6y \leq 9, y \geq 0\}$.

3. (8 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq \frac{3}{4}, z \geq 0\}$.

- (a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = \frac{z}{(x^2 + y^2)^2}$.
(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. (6 punti, solo per Ing. Medica) Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (1 + 2 \cos t, \sin t), \quad t \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right].$$

- (a) Mostrare che la curva possiede un solo punto sull'asse y e trovare l'equazione della retta tangente in tale punto.
(b) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} (xy - y) ds$.
(c) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove $\mathbf{F} = (xy^4 + ye^x) \mathbf{i} + (2y^3(x^2 + 2) + e^x) \mathbf{j}$.

5. (5 punti) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{(n+1)x}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

Studiare la convergenza puntuale di f_n . Studiare la convergenza uniforme di f_n su tutto il dominio, sui sottoinsiemi del tipo $[0, a]$ e su quelli del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

6. (6 punti, solo per Ing. Civ. e Amb.) Si consideri la funzione complessa $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^3 + 8}$, e

si indichi con γ_R la circonferenza di centro il punto $z = 1$ e raggio $R > 0$ percorsa in senso antiorario. Dire, al variare di R , quanto vale l'integrale di $f(z)$ su γ_R . (NB il risultato dell'integrale deve essere scritto in forma per quanto possibile esplicita, senza prodotti, quozienti, esponenziali non svolti).

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 13.II.2020 — Compito n.

1. (5 punti) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(0, 1)$:

$$f(x, y) = \frac{2y^2}{1-x^2} \quad g(x, y) = x^2(2xy - y^2 + y), \quad h(x, y) = 3ye^x - (x+y)^3.$$

2. (6 punti) Sia $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ e sia Γ la curva di equazione $x^2 + 3y^2 + 6y = 9$.

- (a) Verificare che Γ è regolare e trovare max e min assoluto di f su Γ .
(b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 + 6y \leq 9, y \leq 0\}$.

3. (8 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, z \geq 0\}$.

- (a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = \frac{z}{(x^2 + y^2)^2}$.
(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. (6 punti, solo per Ing. Medica) Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t + 1), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

- (a) Mostrare che la curva possiede un solo punto sull'asse x e trovare l'equazione della retta tangente in tale punto.
(b) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} (x - xy) ds$.
(c) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove $\mathbf{F} = (xy^4 + ye^x) \mathbf{i} + (2y^3(x^2 + 2) + e^x) \mathbf{j}$.

5. (5 punti) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{(n-1)x}{n^2 + x^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

Studiare la convergenza puntuale di f_n . Studiare la convergenza uniforme di f_n su tutto il dominio, sui sottoinsiemi del tipo $[0, a]$ e su quelli del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

6. (6 punti, solo per Ing. Civ. e Amb.) Si consideri la funzione complessa $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^3 - 8}$, e si

indichi con γ_R la circonferenza di centro il punto $z = -1$ e raggio $R > 0$ percorsa in senso antiorario. Dire, al variare di R , quanto vale l'integrale di $f(z)$ su γ_R . (NB il risultato dell'integrale deve essere scritto in forma per quanto possibile esplicita, senza prodotti, quozienti, esponenziali non svolti).

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica II per Ing. Civile e Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 13.II.2020 — Compito n.

1. (5 punti) Dire quali delle seguenti funzioni hanno un massimo/minimo nel punto $(1, 0)$:

$$f(x, y) = (x + y)^3 - 3xe^y, \quad g(x, y) = \frac{x^2}{y^2 - 2}, \quad h(x, y) = y^2(x^2 - x + xy).$$

2. (6 punti) Sia $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$ e sia Γ la curva di equazione $3x^2 + y^2 - 6x = 9$.

- (a) Verificare che Γ è regolare e trovare max e min assoluto di f su Γ .
(b) Trovare max e min assoluto di f su $C = \{(x, y) : 3x^2 + y^2 - 6x \leq 9, x \geq 0\}$.

3. (8 punti) Sia dato l'insieme $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 2, z \geq 0\}$.

- (a) Calcolare l'integrale su E della funzione $f(x, y) = \frac{z}{(x^2 + y^2)^2}$.
(b) Calcolare l'integrale su E della funzione $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. (6 punti, solo per Ing. Medica) Si consideri la curva di equazione parametrica

$$\gamma(t) = (4 \cos t + 2, 2 \sin t), \quad t \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right].$$

- (a) Mostrare che la curva possiede un solo punto sull'asse y e trovare l'equazione della retta tangente in tale punto.
(b) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} (xy - 2y) ds$.
(c) Calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, dove $\mathbf{F} = (xy^4 + ye^x) \mathbf{i} + (2y^3(x^2 + 2) + e^x) \mathbf{j}$.

5. (5 punti) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{(n+1)x}{4 + n^2x^2}, \quad x \in [0, +\infty).$$

Studiare la convergenza puntuale di f_n . Studiare la convergenza uniforme di f_n su tutto il dominio, sui sottoinsiemi del tipo $[0, a]$ e su quelli del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

6. (6 punti, solo per Ing. Civ. e Amb.) Si consideri la funzione complessa $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^3 + 1}$, e

si indichi con γ_R la circonferenza di centro il punto $z = \frac{1}{2}$ e raggio $R > 0$ percorsa in senso antiorario. Dire, al variare di R , quanto vale l'integrale di $f(z)$ su γ_R . (NB il risultato dell'integrale deve essere scritto in forma per quanto possibile esplicita, senza prodotti, quozienti, esponenziali non svolti).