UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica II per Ing. Civile-Ambientale, Ing. Medica

Prova scritta del 10.VII.2018 — Compito n.

1. Trovare i punti critici di $f(x,y) = x^4(2y-8) - y^2 + 2$ e dire se sono di max/min locale.

2. Sia T il trapezio di vertici $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ e $(3,0)$ e sia S il semicerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1 nel semipiano $x \leq 0$. Calcolare l'integrale doppio su $T \cup S$ della funzione $f(x,y) = 2 - xy$.

3. (solo per Ing. Medica) Calcolare l'integrale di $f(x,y,z) = xe^y + y^2 + z^3$ sull'insieme
$$\Omega = \{(x,y,z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 4, \, x^2+y^2 \geq 3\}$$
(sugg.: aiutarsi con considerazioni di simmetria).

4. Sia γ la curva piana di equazione $\gamma(t) = (t + \cos t, 1 - \operatorname{sen} t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.
   (a) Dire se γ è una curva regolare.
   (b) Calcolare l'integrale di prima specie su γ della funzione $f(x,y) = \sqrt{2-y}$.
   (c) Calcolare l'integrale di seconda specie su γ del campo vettoriale
$$\mathbf{F} = e^x(y^2+x)\mathbf{i} + \left[2y(e^x+1) + ae^{-y^2}\right]\mathbf{j}\,, \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \text{ parametro.}$$
   (NB se non si riesce a studiare il caso generale, limitarsi al caso $a = 0$).

5. Studiare la convergenza delle serie seguenti al variare del parametro $\alpha > 0$:
$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1+n^\alpha+n^3}{n^3}\right) \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{n^4+n^{2\alpha}}{n^{\alpha+3}} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \, n!}{n^n}\,.$$

6. (solo per Ing. Civ.-Amb.) Si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z^3+8}$. Indichiamo con γ_R la circonferenza di centro $z = 1$ e raggio R percorsa in senso antiorario. Al variare di $R > 0$, dire quanto vale l'integrale di $f(z)$ su γ_R.

   (NB il risultato va scritto in forma quanto più possibile esplicita, evitando di lasciare ad es. quozienti o esponenziali complessi non svolti)