

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”
Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Soluzioni degli esercizi del 27.I.2012

1. (a) $\frac{1}{2} \ln 2$, (b) non converge, (c) non converge, (d) $\frac{\pi}{2}$,
(e) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, (f) $-\frac{1}{2}$, (g) $\frac{1}{4}$, (h) $\frac{2}{5}$, (i) 2.

2. La risposta segue calcolando esplicitamente la primitiva della funzione e usando la definizione.
Ad esempio, per $\beta > 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{dx}{x(-\ln x)^\beta} &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{(-\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta} \right]_\varepsilon \\ &= \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta-1} + \frac{1}{1-\beta} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\ln \varepsilon)^{1-\beta} \right) = \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta-1}, \end{aligned}$$

mentre per $\beta < 1$ si trova un risultato infinito. Per $\beta = 1$ la primitiva è $\ln(-\ln x)$, e ugualmente si trova che l'integrale è infinito. Con un calcolo analogo, si trova che per $\beta > 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta-1},$$

mentre per $\beta \leq 1$ l'integrale non converge.

3. (Cenno) La proprietà si ottiene confrontando la funzione (dall'alto o dal basso a seconda dei casi) con una funzione del tipo $1/x^{\alpha'}$, con α' compreso tra α e 1 e usando il fatto che il logaritmo è un infinito più debole di qualsiasi potenza.
4. (c) ed (e) non convergono, tutti gli altri convergono.
5. (a) $\alpha < 3$ (b) $\alpha < 1$ (c) $\alpha < 1$ (d) $-1 < \alpha < 1$ (e) nessun valore
(f) $\alpha > 1$ oppure $\alpha < -1$ (g) $-1 < \alpha < 3$ (h) $\alpha > -1$ (i) $\alpha > 0$
(l) $\alpha = \frac{1}{2}$ (m) $-\frac{1}{2} < \alpha \leq 0$ (n) $1 < \alpha < 2$.