

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”
Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risultati degli esercizi sulle applicazioni delle derivate del 12.XII.2011

1. Le soluzioni di questo esercizio non verranno messe in rete. Si invitano gli studenti a verificare la correttezza dello svolgimento usando un programma per il disegno di grafici su un calcolatore o sul web. Si tenga conto che, nel disegnare a mano un grafico qualitativo, conviene spesso trascurare l'esattezza della scala in modo da rendere più evidenti alcune caratteristiche del grafico che possono risultare poco chiare sul grafico esatto.

Si segnala anche che negli esercizi (b), (e), (f), (q) ed (s) lo studio del segno della derivata seconda non è agevole, quindi lo studio della concavità/convessità può essere omesso.

2. I limiti richiesti valgono

(a) $\frac{4}{3}$	(b) 1	(c) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$	(d) 1	(e) -12
(f) $\frac{1}{2}$	(g) $\frac{5}{2}$	(h) $\frac{1}{6}$	(i) $\frac{1}{24}$	(l) -14 .

NB Nella risoluzione è importante osservare che il termine $\sin^3 x$ in (h), quello e^{-1/x^2} in (i) e quello $\cos 1/x$ in (l) non sono sviluppabili col polinomio di Taylor; tuttavia, in ciascuno dei casi si verifica che il termine in questione è trascurabile rispetto a quelli vicini e quindi può essere omesso senza ulteriori analisi.

OSSERVAZIONE: la domanda “Quanti termini vanno presi nello sviluppo di Taylor per calcolare un dato limite?” NON ha una risposta generale: bisogna andare per tentativi, anche se l'intuizione e l'esperienza possono spesso suggerire un punto ragionevole a cui arrestare lo sviluppo. Tuttavia, non è indispensabile capire in anticipo quanto lungo va preso lo sviluppo, poiché:

- se si prendono “troppi” termini non succede niente: si ottiene comunque la risposta giusta, sia pure con conti più lunghi del necessario;
- se si prendono “troppo pochi” termini, ci si renderà conto nello svolgimento di non avere sufficienti informazioni e si dovrà necessariamente ricominciare prendendo uno sviluppo

con più termini. Ciò accade a patto che nei calcoli si riporti correttamente il resto dello sviluppo come $o(\dots)$ dell'ordine dovuto. Se gli $o(\dots)$ vengono omessi, non è possibile riconoscere se lo sviluppo scelto ha una precisione sufficiente e c'è il rischio di giungere a un risultato sbagliato.

3. (a) se $\alpha = 3$ vale $-7/24$, se $\alpha < 3$ vale 0 , se $\alpha > 3$ vale $-\infty$.
 (b) se $\alpha = 1/2$ vale $-2/3$, se $\alpha < 1/2$ vale 0 , se $\alpha > 1/2$ vale $-\infty$.
 (c) se $\alpha = 2$ vale $-1/4$, se $\alpha < 2$ vale $-\infty$, se $\alpha > 2$ vale 0 .
 (d) se $\alpha = 3$ vale $3/4$, se $\alpha < 3$ vale $+\infty$, se $\alpha > 3$ vale 0 .
 (NB nel testo andava corretto e^{2x^2} in e^{-2x^2}).
 (e) se $\alpha < -1/2$ vale $+\infty$, se $\alpha > -1/2$ vale $-\infty$, se $\alpha = -1/2$ vale 0 .
 (f) se $\alpha < -1$ vale $-\infty$, se $\alpha > -1$ vale $+\infty$, se $\alpha = -1$ vale $-2/3$.

4. I limiti richiesti valgono

$$(a) \frac{1}{2 \ln 2} \qquad (b) \frac{1}{4} \qquad (c) -\frac{1}{2\pi^2} \qquad (d) +\infty.$$

5. Gli sviluppi richiesti sono

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) & \arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) & \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

NB Eccetto il primo caso, si tratta di funzioni che hanno nel loro sviluppo di Taylor solo i termini di grado dispari; pertanto il resto può anche essere indicato come $o(x^4)$.

6. I valori richiesti sono

$$\begin{aligned} (i) \ a = \frac{1}{2}, \ b = \frac{7}{12} & \qquad (ii) \ a = -\frac{1}{2}, \ b = \frac{1}{12} \\ (iii) \ a = 3, \ b = -3 & \qquad (iv) \ a = -2, \ b = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

7. Gli ordini di infinitesimo sono i seguenti

- | | | | |
|-------|-------|----------------|--------|
| (a) 4 | (b) 3 | (c) non esiste | (d) 2 |
| (e) 4 | (f) 4 | (g) 2 | (h) 3. |

NB Nello studio di (f) va tenuto presente il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} x^k e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$, valido per ogni $k > 0$.

8. L'ordine crescente di infinitesimo è dato da

- | | | |
|---------------|----------------|-----------------|
| (i) g, f, h | (ii) g, f, h | (iii) h, g, f |
|---------------|----------------|-----------------|

9. Se f è pari, possiamo derivare entrambi i membri dell'uguaglianza $f(-x) = f(x)$ per trovare che $-f'(-x) = f'(x)$, cioè che f' è dispari. Se f è dispari, deriviamo $f(-x) = -f(x)$ per trovare che $-f'(-x) = -f'(x)$.
10. La funzione $f(x) = x|x|$ è derivabile ovunque, con derivata $f'(x) = |x|$. Questo si verifica immediatamente per $x > 0$ o per $x < 0$, mentre bisogna ricorrere alla definizione quando $x = 0$. Poiché la funzione modulo notoriamente non è derivabile in $x = 0$, ne segue che f non ha derivata seconda in $x = 0$.
11. Siano $x_1 < x_2 < x_3$ i punti dove si annulla f . Applicando il teorema di Rolle alla funzione f negli intervalli $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$ rispettivamente, si trova che esistono $c_1 \in (x_1, x_2)$ e $c_2 \in (x_2, x_3)$ dove f' si annulla. Possiamo allora applicare il teorema di Rolle alla funzione f' nell'intervallo $[c_1, c_2]$ e concludere che f'' si annulla in un punto di (c_1, c_2) .
12. L'affermazione (i) segue facilmente usando il teorema di Lagrange. La (ii) segue dalla (i) osservando che $f \in C^1([a, b])$ implica in particolare che f' è continua in $[a, b]$; quindi, per il teorema di Weierstrass, è compresa tra due valori finiti.