UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risultati degli esercizi sulla continuità e derivabilità del 24.XI.2011

1. (i) continua (ii) discontinuità di prima specie (iii) discontinuità eliminabile (iv) discontinuità di seconda specie (v) continua (vi) discontinuità di prima specie

2. (i) $a = 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $a = 2, b = 1/2$ (iv) $a = 0, b = 0$ oppure $a = -1$ e $b < 0$ qualsiasi.

3. Se poniamo $h(x) = f(x) - g(x)$, abbiamo che h è continua e soddisfa $h(a) > 0$ e $h(b) < 0$. Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste $\bar{x} \in (a, b)$ tale che $h(\bar{x}) = 0$, cioè tale che $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$.

4. Poniamo $f(x) = x^8 - 7x^5 + x^2 + 10x$. Osserviamo che $f(0) = 0$ e che $f(x) \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$. Preso un qualunque $\lambda > 0$, si avrà quindi $f(x) > \lambda$ per valori sufficientemente grandi di x sia negativi che positivi. Fissiamo due valori $x_1 < 0 < x_2$ tali che $f(x_1) > \lambda$ e $f(x_2) > \lambda$. Poiché f è continua e soddisfa $f(x_1) > \lambda > f(0)$, il teorema dei valori intermedi assicura che esiste $y_1 \in (x_1, 0)$ tale che $f(y_1) = \lambda$. Un analogo ragionamento nell'intervallo $[0, x_2]$ assicura l'esistenza di $y_2 \in (0, x_2)$ tale che $f(y_2) = \lambda$. Quindi l'equazione $f(x) = \lambda$ ammette almeno le due soluzioni y_1 e y_2.

5. Nel caso (i), consideriamo come nel teorema di Weierstrass una successione $\{x_n\}$ tale che $f(x_n) \to \inf f$. Vogliamo mostrare che $\{x_n\}$ è una successione limitata. Per questo usiamo l'ipotesi che $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, cioè che per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $x_M > 0$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x > x_M$. Poniamo $M = \inf f + 1$; il corrispondente x_M sarà tale che $x_n \leq x_M$ per ogni n abbastanza grande. Questo mostra che la successione $\{x_n\}$, da un certo n in poi, è contenuta nell'intervallo limitato $[0, x_M]$; possiamo quindi estrarre una sottosuccessione convergente e concludere come nel teorema di Weierstrass.

   Nel caso (ii), distinguiamo il caso $\inf f = \sup f$ dal caso $\inf f < \sup f$. Il primo caso si verifica solo quando f è costante, e quindi banalmente ammette sia massimo che minimo. Nel secondo caso, almeno uno tra $\inf f$ e $\sup f$ è diverso da l. Supponendo ad esempio $\inf f < l$, consideriamo anche qui una successione $\{x_n\}$ tale che $f(x_n) \to \inf f$. In modo simile al caso (i), si può utilizzare l'ipotesi che $f(x) \to l$ per $x \to \infty$, con $l > \inf f$, per mostrare che la successione $\{x_n\}$ è limitata, e quindi concludere come nel teorema di Weierstrass che una sua sottosuccessione converge a un punto di minimo per f.

6. (i) vera (ii) vera (iii) falsa (iv) vera (v) vera
   Se f non si suppone né crescente né continua, le proprietà sono tutte false.
   Se f si suppone continua, le proprietà sono tutte vere.

7. Le rette tangenti hanno equazione rispettivamente:
$$\text{(i) } y = 7x - 14 \qquad \text{(ii) } y = -\frac{1}{16\sqrt{3}}(11x + 17) \qquad \text{(iii) } y = 3x + 1.$$

8. (i) la funzione non è derivabile per nessun valore di a (ii) $a = 1, b = 0$ (iii) $a = 3, b = -2$ (iv) a, b tali che $a + 1 = b$.

9. (a) cuspide (b) punto angoloso (c) derivabile (d) tangente verticale (e) tangente verticale (f) cuspide (g) derivabile (h) punto angoloso (i) cuspide (l) punto angoloso (m) nessuno dei casi descritti (derivata destra e sinistra non esistono) (n) derivabile.