

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”
Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risultati degli esercizi sui limiti di funzioni del 14.XI.2011

1. I limiti richiesti valgono

(a) 0	(b) $-\infty$	(c) -1	(d) $+\infty$	(e) -1	(f) $+\infty$
(g) 0	(h) $\frac{1}{3}$	(i) 0	(l) 2	(m) $-\frac{1}{2}$	(n) $\frac{3}{4}$
(o) e^{-3}	(p) e^2	(q) 1	(r) e^2	(s) $+\infty$	(t) -4

2. I limiti richiesti valgono

(a) 0	(b) 12	(c) 3	(d) -2	(e) 2	(f) $-\frac{1}{2}$
(g) $\frac{4}{3}$	(h) 0	(i) 3	(l) 1	(m) -1	(n) $\frac{1}{8}$

3. I limiti richiesti valgono

(a) 6	(b) 3	(c) -4	(d) 0	(e) 0	(f) $+\infty$
(g) $-\frac{1}{8}$	(h) $e^{-\pi}$	(i) -1	(j) e^{-4}	(k) $\ln 3 - \ln 2$	(l) $\frac{2}{3}$
(m) $\frac{1}{2}$	(n) $-\infty$	(o) $+\infty$	(p) $-\frac{1}{\cos 1}$		

4. Gli ordini di infinitesimo valgono

(a) 3	(b) 2	(c) non esiste	(d) 2	(e) 2	(f) non esiste.
-------	-------	----------------	-------	-------	-----------------

5. L'ordine crescente di infinitesimo nei tre casi è: (i) f, g, h , (ii) h, g, f , (iii) f, h, g .

6. (a) Dato $\varepsilon > 0$, vale $|3x - 1 - 7| < \varepsilon$ per ogni x tale che $2 - \delta < x < 2 + \delta$, $x \neq 2$, prendendo

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3}.$$

(b) Dato $\varepsilon > 0$, vale $|x^2| < \varepsilon$ per ogni x tale che $-\delta < x < \delta$, $x \neq 0$, prendendo

$$\delta = \sqrt{\varepsilon}.$$

(c) Dato $\varepsilon > 0$, vale $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$ per ogni x tale che $-\delta < x < \delta$, $x \neq 0$, prendendo

$$\delta = \arccos(1 - \varepsilon).$$

NB in questo caso non abbiamo indicato il $\delta(\varepsilon)$ più grande possibile (che non si può scrivere esplicitamente) ma quello che si ottiene utilizzando la disuguaglianza $\cos x < \sin x/x < 1$.

Inoltre, si è sottinteso che ci si limita a considerare valori piccoli di ε (questo basta per verificare la validità del limite). Ad essere precisi, il valore di δ indicato sopra ha senso solo se $0 < \varepsilon \leq 2$; per valori di $\varepsilon > 2$ si verifica facilmente che la disuguaglianza è verificata per ogni $x \neq 0$ e quindi si può prendere un $\delta > 0$ qualsiasi.

(d) Dato $\varepsilon > 0$, vale $\left| \frac{x}{2x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ per ogni $x > M$, prendendo

$$M = \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

(e) Dato $M > 0$, vale $\frac{2}{x^4} > M$ per ogni x tale che $-\delta < x < \delta$, $x \neq 0$, prendendo

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{2}{M}}.$$

(f) Dato $M > 0$, vale $-x^2 + 2x < -M$ per ogni $x > N$, prendendo

$$N = 1 + \sqrt{1 + M}.$$