UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte ai quesiti degli esercizi del 9.I.2012

1. (NB Il simbolo $\partial\Omega$ indica la frontiera di Ω.)
   (a) Ω è aperto, $\partial\Omega = \{0, 1, 2\}$.
   (b) Ω né aperto né chiuso, $\partial\Omega = \{0, 1\}$.
   (c) Ω è chiuso, $\partial\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$.
   (d) Ω né aperto né chiuso, e la frontiera è costituita dai quattro lati del quadrato, cioè
   $$\begin{aligned}\partial\Omega &= \{(x,y):\ 0 \le x \le 1, y = 0\} \cup \{(x,y):\ 0 \le x \le 1, y = 1\} \\ &\quad \cup \{(x,y):\ x = 0, 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,y):\ x = 1, 0 \le y \le 1\}.\end{aligned}$$
   (e) Ω è chiuso, $\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x \in (1,3]\,,\ y = 0\}$

2. I piani tangenti richiesti hanno equazione rispettivamente
   (a) $z = -4x - 2y + 5$
   (b) $z = -\pi x + (2\pi + 1)y + \pi + 1$
   (c) $z = \frac{1}{4}(13x - 5y - 7)$

3. Le derivate direzionali richieste valgono rispettivamente (a) 7, (b) $4\pi + 1$, (c) -2.

4. (a) $(0, \frac{1}{2})$ sella.
   (b) $(0, 0)$ sella, $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ minimo.
   (c) $(0, 0)$ minimo, $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sella, $(-\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sella.
   (d) $(0, 0)$ sella.
   (e) $(0, 0)$ sella, $(0, -1)$ sella, $(-1, 0)$ sella, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ massimo.
   (f) $(2, 0)$ massimo.
   (g) $(0, 0)$ sella, $(2, 0)$ minimo, $(-2, 0)$ minimo.

5. Per $(x, y) \neq (0, 0)$ la funzione è di classe C^∞ e le sue derivate parziali prime si calcolano nel modo usuale, trovando:
   $$f_x = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \qquad f_y = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$
   Nel punto $(0, 0)$ invece, studiando il limite del rapporto incrementale, si trova che f_x e f_y esistono e valgono entrambe 0.

Studiando il limite di $f(x,y)$ su una retta per l'origine $y = ax$, si trova

$$\lim_{x\to 0} f(x, ax) = \frac{a}{1+a^2}.$$

Poiché il limite è diverso da zero per tutte le rette con $a \neq 0$, concludiamo che la funzione non è continua.

La non continuità implica la non differenziabilità. Pertanto f_x e f_y non possono essere continue in $(0,0)$, altrimenti ci sarebbe una contraddizione col teorema del differenziale totale. Ciò si verifica anche direttamente, studiando il limite sulle rette, ad es.

$$\lim_{x\to 0} f_x(x, ax) = \lim_{x\to 0} \frac{a(a^2-1)}{x(1+a^2)^2} = \pm\infty.$$

6. Presa una qualunque direzione $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si trova

$$\frac{\partial f}{\partial(a,b)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(at,bt) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^3 bt}{a^6 t^4 + b^2} = 0.$$

D'altra parte, studiando il limite lungo la curva $y = x^3$, troviamo

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^3) = \frac{1}{2} \neq f(0,0),$$

quindi f non è continua.

7. La funzione di una variabile $\alpha \to \sqrt{\alpha}$ è continua per $\alpha \in [0,+\infty)$ e derivabile per $\alpha \in (0,+\infty)$. Poiché $x^2+y^2 \geq 0$ per ogni (x,y) ed è nullo solo per $(x,y) = (0,0)$, deduciamo che $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ è continua in tutto $\mathbb{R}^2$ e derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$ tranne eventualmente $(0,0)$. Per studiare la derivabilità in $(0,0)$ prendiamo il limite del rapporto incrementale. Troviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x},$$

che non esiste (vale 1 da sinistra e -1 da destra). Lo stesso risultato si trova per il rapporto incrementale nella y. Quindi f non possiede derivate parziali in $(0,0)$.

8. (a) Usando la definizione si vede facilmente che, se ϕ è crescente, un punto di massimo locale per f è di massimo locale anche per g, e lo stesso vale per i minimi locali. Se invece ϕ è decrescente, un punto di massimo per f diventa di minimo per g, e viceversa. Se la monotonia di ϕ non è stretta, l'implicazione inversa potrebbe non valere.

   (b) Un calcolo diretto mostra che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \phi'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \phi'(f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

   Quindi se sono nulle le derivate parziali di f sono nulle anche quelle di g. Tuttavia, nei punti dove $\phi'(f(x,y)) = 0$ le derivate parziali di g sono nulle anche se quelle di f non lo sono. Se ϕ' non si annulla mai, ciò non si può verificare, e quindi f e g hanno gli stessi punti critici.