UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Risposte ai quesiti del 17.X.2011 sulle proprietà di base delle funzioni

1. (a) f è iniettiva in A, B, C, $f(A) = [-1, 3]$, $f(B) = (-3, -1)$, $f(C) = [-5, -1)$
   (b) f è iniettiva in A, non in B, C, $f(A) = [1, 4)$, $f(B) = [0, 4)$, $f(C) = [1, 16)$
   (c) f è iniettiva in B, C, non in A, $f(A) = [0, 1]$, $f(B) = \left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, $f(C) = [-1, 0) \cup \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$
   (d) f è iniettiva in A, non in B, C, $f(A) = [0, \sqrt{3}]$, $f(B) = [-1, 1]$, $f(C) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

2. 1. $f^{-1}(A) = (-2, 1]$, 2. $f^{-1}(A) = (-2, 2)$ (NB il testo corretto era $A = (-2, 4)$).
   3. $f^{-1}(A) = (0, 1)$ 4. $f^{-1}(A) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$ 5. $f^{-1}(A) = [-3, -2] \cup [0, 1]$.

   NB La notazione $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \ldots$ indica l'unione, al variare di $k \in \mathbb{Z}$, degli insiemi della forma descritta.
   Ad esempio:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi) = \ldots \cup (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup \ldots$$

3. Le disequazioni sono soddisfatte rispettivamente per:

   (a) $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ (b) $x \in [1, 4]$

   (c) $x \in (1, +\infty)$ (d) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \dfrac{\pi}{6} + k\pi\right)$

   (e) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ (f) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right]$

4. Il dominio delle funzioni è dato rispettivamente da

   (a) $x \in (-2, -1] \cup [0, 1]$ (b) $x \in (-2, -1]$

   (c) $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$ (d) $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

   (e) $x \in [1, 2) \cup (2, 4]$ (f) $x \in (-\infty, 0] \cup (1, 2) \cup [3, 4)$

(g) $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

(h) $x \in [-2, 2)$

(i) $x \in [-1, +\infty)$

(j) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

(k) $x \in (0, +\infty)$

(l) $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

5. Non riportiamo in questi fogli i disegni dei grafici proposti. Suggeriamo allo studente di verificare la correttezza della risposta utilizzando i programmi per il disegno di grafici in dotazione sui personal computer o reperibili su internet (ad es. la "calcolatrice di funzione" sul sito http://wims.unice.fr/wims dell'Università di Nizza). Tener presente che nel disegnare un grafico a mano non conta tanto l'esattezza della scala quanto la correttezza dell'andamento qualitativo della funzione (segno, crescenza, decrescenza, ...).

6. Le funzioni in (a), (c), (d), (f), (h) e (i) sono pari, quelle in (b), (g) sono dispari, la (e) non è né pari né dispari.

7. Nei casi (a) ed (e) h è crescente, mentre nel caso (f) è decrescente (si dimostra usando la definizione). Negli altri casi non si può dire nulla in generale: a seconda della specifica forma di f e g la funzione h può risultare crescente, o decrescente, o neppure monotona, come mostrano facili controesempi. Ad esempio, se $f(x) = 2x$ e $g(x) = x$, la h in (b) risulta crescente, mentre invertendo i ruoli risulta decrescente; inoltre se $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$, la differenza $h = f - g$ non è monotona.

   Se si suppone in aggiunta che f, g siano positive, diventa possibile anche nel caso (c) dimostrare che h è crescente, mentre si continua a non poter dire nulla nei casi (b) e (d). Si otterrebbero invece conclusioni in (d) supponendo che f, g abbiano monotonia opposta e stesso segno, oppure stessa monotonia e segno opposto. Ad esempio, se f è crescente positiva e g è decrescente positiva il rapporto $h = f/g$ è crescente; se f è crescente positiva e g è crescente negativa il rapporto $h = f/g$ è decrescente, ecc.