

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”
Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi sugli integrali impropri — 27.I.2012

1. Dire se i seguenti integrali impropri sono convergenti e in caso affermativo calcolarne il valore:

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x} \qquad (b) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x} \qquad (c) \int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^2 + x} dx$$

$$(d) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \qquad (e) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}} \qquad (f) \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx$$

$$(g) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx \qquad (h) \int_0^{+\infty} \sin(2x) e^{-x} dx \qquad (i) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx.$$

2. Mostrare che gli integrali impropri

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x(-\ln x)^\beta}, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\beta},$$

con $\beta \in \mathbb{R}$, convergono se e solo se $\beta > 1$. Calcolarne il valore in questi casi.

3. Mostrare che gli integrali impropri

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha(-\ln x)^\beta}, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta},$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $\alpha \neq 1$, hanno le stesse proprietà di convergenza che avrebbero senza il termine con il logaritmo (cioè convergono rispettivamente per $\alpha < 1$ e $\alpha > 1$, qualunque sia β).

4. Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$(a) \int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$$

$$(b) \int_1^\infty \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{x^2 + x} dx$$

$$(c) \int_1^\infty \frac{x^3 - 2x^2 + 2}{x^4 + 1} dx$$

$$(d) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x} dx$$

$$(e) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+1} dx$$

$$(f) \int_0^1 \frac{(1 - \cos x)(1 + \sin \frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x^8}} dx.$$

5. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono i seguenti integrali impropri:

$$(a) \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} dx$$

$$(b) \int_0^1 \frac{dx}{(\sin x)^\alpha}$$

$$(c) \int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$$

$$(d) \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^{2+\alpha}} + \frac{1}{x^{2-\alpha}} \right) dx$$

$$(e) \int_0^1 \left(\frac{1}{x^{2+\alpha}} + \frac{1}{x^{2-\alpha}} \right) dx$$

$$(f) \int_0^1 \frac{dx}{x^{2+\alpha} + x^{2-\alpha}}$$

$$(g) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^4} dx$$

$$(h) \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$$

$$(i) \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2} dx$$

$$(l) \int_0^1 \frac{e^{\alpha x} \ln(1+x) - \sin x}{x^3} dx$$

$$(m) \int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} + x}{x^{2\alpha+3}} dx$$

$$(n) \int_1^\infty \frac{x-1}{x^2(\ln x)^\alpha} dx.$$

NB Vedere anche il §5D del libro di Marcellini-Sbordone, il §5.3 del libro di Salsa-Squellati e gli esercizi sugli integrali impropri del libro di Callegari.