

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”
Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi sugli integrali — 20.I.2010

1. Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_{-2}^{-1} (x^3 + x^2) dx & \text{(b)} \int_1^2 \frac{x^2 + 2x - 3}{x} dx & \text{(c)} \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)} \\ \text{(d)} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2-x}} + x\sqrt{x} \right) dx & \text{(e)} \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} - 4\sqrt[3]{x-2} \right) dx & \text{(f)} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ \text{(g)} \int_1^2 \left(\frac{2}{(x-3)^3} + \frac{1}{x-4} \right) dx & \text{(h)} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \text{(i)} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1+9x^2}. \end{array}$$

2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{dx}{4-x^2} & \text{(b)} \int \frac{x+2}{x^2-3x+2} dx & \text{(c)} \int \frac{2x+3}{3x^2-9x+6} dx \\ \text{(d)} \int \frac{4-x}{x^2-2x+5} dx & \text{(e)} \int \frac{x^2}{5x^2+4x+1} dx & \text{(f)} \int \frac{x^3}{x^8-1} dx \\ \text{(g)} \int \frac{dx}{e^x+4e^{-x}-4} & \text{(h)} \int \frac{2x}{x^4+4x^2+3} dx & \text{(i)} \int \frac{\sin x}{\cos x - \sin^2 x} dx. \\ \text{(j)} \int \frac{dx}{x^4-1} & \text{(k)} \int \frac{2x^2+4}{x^3-4x^2+4x} dx & \text{(l)} \int \frac{x^3-3}{x^3-x} dx. \end{array}$$

3. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \operatorname{tg} x dx, & \text{(b)} \int \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} dx, & \text{(c)} \int \frac{dx}{x \ln^2 x} \\ \text{(d)} \int x e^{-x^2} dx, & \text{(e)} \int \frac{e^{-4x}}{e^{-4x}+2} dx, & \text{(f)} \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{(g)} \int \frac{x}{x^2 + 4} dx & \text{(h)} \int \sin x \cos x \sqrt{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x} dx, \\
\text{(i)} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} & \text{(j)} \int \cos^3 x dx \quad \text{(k)} \int \frac{1}{\sin x} dx \\
\text{(l)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} & \text{(sugg. porre } t = \sqrt{x+4}) \\
\text{(m)} \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx & \text{(sugg. porre } t = \sqrt{x+1}) \\
\text{(n)} \int \sqrt{4-x^2} dx & \text{(sugg. porre } x = 2 \sin t)
\end{array}$$

4. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \int (x^2 + x) \cos x dx & \text{(b)} \int x^3 e^{2x} dx & \text{(c)} \int \ln x dx \\
\text{(d)} \int \ln^2 x dx & \text{(e)} \int \ln x (x^2 + 2x) dx & \text{(f)} \int \operatorname{arctg} x dx \\
\text{(g)} \int \arcsen x dx & \text{(h)} \int \sin^2 x dx & \text{(i)} \int e^x \sin 2x dx.
\end{array}$$

5. Sia $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente tale che $f(0) = 0$ e $\int_0^5 f(x) dx = 6$. Mostrare che $f(2) \leq 2$. (Sugg.: scrivere $\int_0^5 f = \int_0^2 f + \int_2^5 f$ e stimare dal basso i due integrali usando l'ipotesi che f è crescente).

6. Sia $f \in C(\mathbb{R})$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Discutere la validità delle seguenti affermazioni:

- (a) F è derivabile e $F'(x) = f(x)$.
- (b) F è derivabile e $F'(x) = f(x) + c$ dove c è una costante non nulla.
- (c) Se $f(x) \geq 0$ per ogni x , allora $F(x) \geq 0$ per ogni x .
- (d) Se $f(x) \geq 0$ per ogni x , allora $F(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 0$ e $F(x) \leq 0$ per ogni $x \leq 0$.
- (e) Se $f(x) \geq 0$ per ogni x , allora F è crescente.
- (f) Se f è limitata, allora F è limitata.
- (g) Se f è periodica di periodo T , anche F lo è.
- (h) Se f è periodica di periodo T e $\int_0^T f(t) dt = 0$, anche F è periodica di periodo T .

7. Mostrare che l'integrale di una funzione dispari su un intervallo del tipo $[-a, a]$ è nullo.
8. In base alle simmetrie e al segno della funzione integranda sull'intervallo assegnato, stabilire in ciascuno dei casi seguenti se l'integrale proposto è positivo, negativo o nullo.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \int_{-5}^5 (x^{97} + x^7 + 4x^3) dx & \text{(b)} \int_0^5 (x^{97} + x^7 + 4x^3) dx \\
 \text{(c)} \int_{-6}^5 (x^{97} + x^7 + 4x^3) dx & \text{(d)} \int_{-1}^1 x^9 e^{x^8 - x^4} dx \\
 \text{(e)} \int_{-1}^1 x^8 e^{x^8 - x^4} dx & \text{(f)} \int_{-2}^{10} (\cos e^x - 1) e^{-x^4} dx.
 \end{array}$$

9. Data una funzione continua f e due funzioni derivabili g, h , poniamo

$$G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

(supponendo che l'insieme di definizione delle tre funzioni sia tale che l'espressione scritta sia ben definita almeno per un determinato intervallo di valori della x). Mostrare che F è derivabile e soddisfa

$$G'(x) = f(h(x)) h'(x) - f(g(x)) g'(x).$$

NB Vedere anche i §4B-4C-4D 4E-4F-4G-4H-4I del libro di Marcellini-Sbordone e i §5.1-5.2 del libro di Salsa-Squellati.