UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi sui grafici e sulle applicazioni delle derivate ai limiti – 12.XII.2011

1. Disegnare un grafico approssimativo delle funzioni seguenti

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x + 1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 2)^3}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|2 - x|}$ (e) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$ (f) $f(x) = -\dfrac{|x + 2|}{x^2 + 1}$

   (g) $f(x) = x\sqrt{1 - x}$ (h) $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ (i) $f(x) = e^x(-x^2 + 4x - 4)$

   (j) $f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x)$ (k) $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ (l) $f(x) = x^2(\ln x - 1)$

   (m) $f(x) = (x + 1)e^{\frac{x+2}{x}}$ (n) $f(x) = |x - 2|e^{-\frac{1}{x}}$ (o) $f(x) = (x - 2)e^{-\frac{1}{|x|}}$

   (p) $f(x) = \dfrac{3}{\ln(e + |x|) - 2}$ (q) $f(x) = \ln\left(e^{2x} + e^{|x-1|}\right)$ (r) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{|x| + 4}\right)$

   (s) $f(x) = 2xe^{-\frac{8|x|+x^2}{2}}$ (t) $f(x) = \dfrac{1}{2e^{|x-1} - 1}$ (u) $f(x) = \left|\dfrac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2}\right|$.

2. Calcolare i seguenti limiti. (Sugg. usare il teorema di De L'Hopital o lo sviluppo di Taylor, eventualmente dopo aver osservato che alcuni termini della funzione sono trascurabili).

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{1 - \cos x + x^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 2^x}{1 - 3^x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\arctan x^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - 2x^3)}{1 - e^x \cos x + \operatorname{sen} x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x \ln(1 + x) - x}{x^2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right)$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)(x^3 - \operatorname{sen}^3 x)$

   (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-1/x^2} - x^3}{\operatorname{sen} 4x - e^{2x}\ln(1 + 4x)}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)\frac{\ln(1 + 6x^2) - 3x \operatorname{sen} 2x}{x^3}$.

3. Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore dei limiti seguenti

$$\text{(a)} \lim_{x\to+\infty} x^\alpha(e^{-x}-x)\left(x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{(b)} \lim_{x\to+\infty} x^\alpha\left(\sqrt{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-\operatorname{sen}x)$$

$$\text{(c)} \lim_{x\to0^+} x^\alpha \frac{x+(1-\cos x)\ln x}{\ln(1-2x)+2x^2+\operatorname{sen}2x}$$

$$\text{(d)} \lim_{x\to0^+} x^\alpha \frac{x+\operatorname{sen}^2 x\,\ln x}{e^{-2x^2}-\cos 2x}$$

$$\text{(e)} \lim_{x\to0^+} \frac{\cos x - e^{\alpha x^2}}{x^3} \qquad \text{(f)} \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+\alpha x^2)+x\operatorname{sen}x}{x^4}$$

4. Calcolare i seguenti limiti, usando il teorema di De L'Hopital (oppure i limiti notevoli e un opportuno cambio di variabile)

$$\text{(a)} \lim_{x\to1} \frac{\ln x}{2^x-2} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen}x}{(\pi-2x)\cos x}$$

$$\text{(c)} \lim_{x\to2} \frac{\sqrt{4x-x^2}-2}{1-\cos\pi x} \qquad \text{(d)} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)x^2.$$

5. Calcolare il polinomio di McLaurin (cioè il polinomio di Taylor di centro $x_0 = 0$) di grado 3 delle funzioni seguenti

$$f(x)=\sqrt{1+x}, \qquad f(x)=\operatorname{arcsen}x, \qquad f(x)=\tan x, \qquad f(x)=\arctan x.$$

(NB Gli sviluppi richiesti si trovano facilmente sui libri: l'esercizio invita a ricavarli per conto proprio usando la definizione).

6. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che le seguenti funzioni siano $o(x^4)$ per $x \to 0$:

(i) $f(x) = \ln(1+x^2) + ax\operatorname{sen}x + bx^4$ (ii) $f(x) = e^{ax^2} - \cos x + bx^4$

(iii) $f(x) = 1-\cos x^2 + ax\operatorname{sen}x + bx^2$ (iv) $f(x) = x\operatorname{sen}x + 2\cos x + a + bx^4$

(Suggerimento: scrivere lo sviluppo di Taylor delle funzioni proposte e scegliere a, b imponendo che i coefficienti dei termini fino all'ordine 4 si annullino).

7. Determinare l'ordine di infinitesimo (se esiste) delle seguenti funzioni per $x \to 0$:

(a) $f(x) = \ln(1+3x^2) - 3x^2$	(b) $f(x) = \operatorname{sen} 2x - 2x$
(c) $f(x) = x \ln x + \operatorname{sen}^2 x$	(d) $f(x) = 1 + e^x - \operatorname{sen} x - 2\cos x$
(e) $f(x) = 2 - 2\cos x - x^2$	(f) $f(x) = 1 - \cos x + e^{-\frac{1}{x^2}}$
(g) $f(x) = 2e^{x^2} - \cos 2x - 1$	(h) $f(x) = 4xe^{-2x} - \ln(1+4x)$.

8. Disporre in ordine di infinitesimo crescente per $x \to 0^+$ le seguenti funzioni:

(i) $f(x) = x - \operatorname{sen} x, \qquad g(x) = x - \ln(1+x)\,, \qquad h(x) = 1 - \cos x^2.$

(ii) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\,, \qquad g(x) = x^x - 1\,, \qquad h(x) = x^2 \cos x - x \sin x\,.$

(iii) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}\,, \qquad g(x) = (\sin(2x) - \tan x)^5\,, \qquad h(x) = \cos x \, \ln(1+x) - x\,.$

9. Mostrare che la derivata di una funzione pari è una funzione dispari, e viceversa.

10. Dare un esempio di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile su tutto $\mathbb{R}$, ma che, in almeno un punto, non possiede derivata seconda.

11. Sia $f \in C^2([a,b])$ una funzione che si annulla in tre punti. Mostrare che esiste $\bar{x} \in [a,b]$ tale che $f''(\bar{x}) = 0$ (suggerimento: mostrare prima che esistono due punti in cui si annulla la derivata prima, usando il teorema di Rolle o di Lagrange).

12. Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* se esiste $L \geq 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ per ogni $x, y \in X$. Il numero L si dice *costante di Lipschitz* di f.

    (i) Mostrare che se $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, è derivabile e la derivata soddisfa $-L \leq f'(x) \leq L$ per ogni $x \in I$, allora f è lipschitziana con costante di Lipschitz pari ad L.

    (ii) Mostrare che se $f \in C^1([a,b])$ allora f è lipschitziana.

NB Vedere anche il capitolo 11 (della prima parte) e 2 (della seconda parte) del libro di Marcellini-Sbordone e il paragrafo 4.2 del libro di Salsa-Squellati.