UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi sulla continuità e derivabilità – 24.XI.2011

1. Dire se le seguenti funzioni sono continue nel punto $x = 0$ o se hanno una discontinuità (di prima, seconda specie o eliminabile).

   (i) $f(x) = |x|$

   (ii) $f(x) = \text{sgn } x$

   (iii) $f(x) = (\text{sgn } x)^2$

   (iv) $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   (v) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   (vi) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$

2. Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ (o dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$), se esistono, per cui sono continue le funzioni seguenti.

   (i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

   (ii) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$

   (iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - 1}{x} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ \dfrac{\ln(1 + x)}{bx} & x > 0 \end{cases}$

   (iv) $f(x) = \begin{cases} e^{b/x} - 1 & x < 0 \\ x + a & x \geq 0 \end{cases}$

3. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Mostrare che, se $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$, allora esiste $\bar{x} \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$. (Suggerimento: applicare il teorema di esistenza degli zeri alla funzione $f - g$)

4. Mostrare che l'equazione

$$x^8 - 7x^5 + x^2 + 10x = \lambda$$

ammette almeno due soluzioni per ogni $\lambda > 0$. (Suggerimento: chiamato $f(x)$ il polinomio a primo membro, trovare quanto valgono $f(0)$ e i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$, e dedurre la proprietà richiesta mediante un'opportuna applicazione del teorema di esistenza degli zeri.)

5. Dimostrare le seguenti varianti del teorema di Weierstrass.

   (i) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Allora f possiede minimo.

   (ii) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, con l finito. Allora f possiede almeno uno tra massimo e minimo.

6. Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ crescente. Dire quali di queste proprietà sono sicuramente valide per f:

   (i) f è limitata;

   (ii) f possiede massimo e minimo;

   (iii) esiste il limite $\lim_{x \to 1} f(x)$;

   (iv) esiste il limite destro $\lim_{x \to 1^+} f(x)$;

   (v) esiste il limite $\lim_{x \to 2} f(x)$.

   Dire se e come cambiano le risposte nel caso in cui l'ipotesi che f sia crescente viene omessa, e nel caso in cui tale ipotesi viene sostituita con l'ipotesi che f sia continua.

7. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ nei casi seguenti:

   (i) $f(x) = x^3 - 5x + 2, \quad x_0 = 2.$

   (ii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{(x-3)^3}, \quad x_0 = 1.$

   (iii) $f(x) = e^{x^2+2x} \operatorname{sen}(3x) + 1, \quad x_0 = 0.$

8. Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ (o dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$) per cui sono derivabili le funzioni seguenti.

(i) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 3x + a & x > 1 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & x > 0 \\ e^x - 1 & x \leq 0 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 1 \\ ax + b & x < 1 \end{cases}$ (iv) $f(x) = \begin{cases} e^{bx} & x < 0 \\ e^x + \operatorname{sen} ax & x \geq 0 \end{cases}$

9. Dire se per $x = 0$ le funzioni seguenti sono derivabili o hanno un punto angoloso/una cuspide/un punto a tangente verticale.

(a) $f(x) = |x|^3$ (b) $f(x) = \operatorname{sen}|x|$

(c) $f(x) = \cos|x|$ (d) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

(e) $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt[3]{x})$ (f) $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^4 & x < 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases}$ (h) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & x > 0 \end{cases}$

(i) $f(x) = \sqrt{|x|}$ (l) $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$

(m) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (n) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

NOTA Richiamiamo brevemente la definizione di punto angoloso/cuspide/punto a tangente verticale. Indichiamo con $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ rispettivamente la derivata destra e sinistra di una funzione f in un punto x_0 (cioè, se esistono, il limite destro e sinistro del rapporto incrementale, eventualmente infiniti). Per definizione, f è derivabile se e solo se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono finite e coincidono. I casi in cui $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono, ma non sono entrambe finite e/o non coincidono vengono descritti nel modo seguente: si dice che il grafico di f

- ha un *punto angoloso* in $(x_0, f(x_0))$ se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono, non coincidono, e almeno una delle due è finita (come per $f(x) = |x|$ per $x_0 = 0$).
- ha *tangente verticale* in $(x_0, f(x_0))$ se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono entrambe infinite e hanno segno concorde (come per $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$).
- ha una *cuspide* in $(x_0, f(x_0))$ se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono entrambe infinite, ma con segno opposto (come per $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ in $x_0 = 0$).

NB Vedere anche i §9A, 9B e §10A, 10B, 10C del libro di Marcellini-Sbordone e i paragrafi 3.3 e 4.1 del libro di Salsa-Squellati.