UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi sui limiti di funzioni – 14.XI.2011

1. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{x+x^3-2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x^2-x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2+1}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x-1} + \frac{x^4}{2-x^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2+x^6}}{3x^3+\sqrt{1+x}}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+x^3}{3^x+x^2}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+2}-x$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(x^2+1)}{1-2x}$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5+3x^2+\cos x}{4x^5+2x^3+\operatorname{arctg} x}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right)^x$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{x}{x^3+1}\right)^{2x^2}$

(q) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

(r) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{6x+\operatorname{sen} x}{\ln x+\operatorname{arctg} x}$

(t) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-x\ln x}{\cos x-x^2}.$

2. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{2x^2}-1}{\operatorname{sen} x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(\operatorname{sen} 2x)(\operatorname{sen} 3x)}{1-\cos x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+3x)}{\operatorname{sen} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arcsen} x \operatorname{arctg} x}{\cos x-1}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x^2+4x)}{\operatorname{tg}(4x^2+3x)}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{\operatorname{sen} x^3}$

(i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

(l) $\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$

(m) $\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{e^{x-\pi}-1}$

(n) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen} x}{(\pi-2x)^2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)\ \operatorname{sen}(3x)}{\cos x - 1 + x^2}$

(b) $\lim_{x\to +\infty} x \ \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{1+x^2}\right)$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2+3x^3}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln x}{\operatorname{sen}(3x)}$

(f) $\lim_{x\to \pi^+} \frac{3-x}{\operatorname{sen} x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{4x^2}$

(h) $\lim_{x\to 1} (1+\operatorname{sen}(\pi x))^{\frac{1}{x-1}}$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{\operatorname{sen}^2 x}}{x^2}$

(j) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^x$

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$

(l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2x+3x^2)}{\ln(x^3+1)}$

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{\operatorname{arctg} x \ln(x^2+x^3)}$

(n) $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{1/x} \ln x$

(o) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x(e^{1/x^2}-1)}{e^x}$

(p) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}-1}{\cos(x-1)}$.

4. Ricordiamo che una funzione $f(x)$ si dice avere *ordine di infinitesimo* k per $x \to x_0$, con k intero, se il quoziente $f(x)/(x-x_0)^k$ tende a un limite finito e diverso da zero per $x \to x_0$ (NB la definizione si può dare anche nel caso di k non intero, ma non serve ai fini di questo esercizio).

   Determinare l'ordine di infinitesimo (se esiste) delle seguenti funzioni.

   (a) $\dfrac{1-\cos x^2}{\operatorname{tg} 2x}$, per $x \to 0$ (b) $\ln(\cos x)$, per $x \to 0$

   (c) $\ln x \operatorname{sen}(\pi x)$ per $x \to 0$ (d) $\ln x \operatorname{sen}(\pi x)$ per $x \to 1$

   (e) $\operatorname{sen} x^2(e^{x^2} - e^{\pi})$ per $x \to \sqrt{\pi}$ (f) $e^{-1/x^2}(\cos x - 1)$ per $x \to 0$.

5. Disporre in ordine di infinitesimo crescente per $x \to 0^+$ le seguenti funzioni:

   (i) $f(x) = x - \operatorname{sen} 2x$, $g(x) = x\ln(1+x)$, $h(x) = 1-\cos x^2$.
   (ii) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, $g(x) = x^2 \ln x$, $h(x) = 1-\cos(\sqrt{x})$.
   (iii) $f(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$, $g(x) = x^2 \operatorname{tg} x - x\sin x$, $h(x) = x^x - 1$.

   (NB Ricordiamo che una funzione f_2 si dice avere un ordine di infinitesimo superiore a f_1 per $x \to x_0$ se vale $f_2 = o(f_1)$ per $x \to x_0$. Disporre un certo numero di funzioni in ordine crescente di infinitesimo significa scriverle nell'ordine tale che ciascuna sia "o" delle precedenti.)

6. Mostrare usando la definizione, che valgono i limiti seguenti (dando un'espressione esplicita di $\delta(\varepsilon)$ o, a seconda dei casi, di $\delta(M)$, ecc.).

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} 3x+1 = 7$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4} = +\infty$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} -x^2+2x = -\infty$.

NB Vedere anche il capitolo 8 del libro di Marcellini-Sbordone (specialmente i §8A, 8C, 8E, 8F e 8G), il capitolo 3.2 del libro di Salsa-Squellati, gli esercizi sui limiti di funzioni (Limiti-Calcolo e Ordini-Confronto) del libro di Callegari.