

UNIVERSITÀ DI ROMA “TOR VERGATA”

Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi su massimi e minimi, estremo superiore e inferiore – 17.XI.2011

1. Determinare estremo inferiore e superiore dei seguenti insiemi e dire se sono rispettivamente anche minimo e massimo.

(a) $A = (0, 1)$

(b) $A = (-1, 1]$

(c) $A = [-1, 0] \cup (3, 4)$

(d) $A = (-\infty, -2) \cup \{1\} \cup [5, 6]$

(e) $A = \{1\} \cup [3, +\infty)$

(f) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(g) $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

(h) $A = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$

2. Determinare estremo inferiore e superiore delle seguenti funzioni nel loro dominio e dire se sono anche minimo o massimo. (Per rispondere si suggerisce, ove possibile, di disegnare un grafico approssimativo della funzione)

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x$

(d) $f(x) = 2^x$

(e) $f(x) = 10^{x^2}$

(f) $f(x) = 10^{-x^2}$

(g) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$

(h) $f(x) = \frac{1}{1+2^x}$

(i) $f(x) = 3^{-\operatorname{sen} x}$

(j) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

(k) $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^2$

(l) $f(x) = \left| \frac{2}{x^2+1} - 1 \right|$

(m) $f(x) = |x|$

(n) $f(x) = x - [x].$

NB La funzione $[x]$ che compare in (n), è detta *parte intera* di x , ed è definita come il massimo intero k tale che $k \leq x$. Ad esempio, $[2.3] = 2$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[-0.5] = -1$, ...

3. In ciascuno dei casi seguenti, determinare estremo inferiore e superiore della funzione f sull'insieme A assegnato e dire se sono anche minimo o massimo.

(a) $f(x) = x^2 + 1$ $A = (-1, 2)$

(b) $f(x) = x^2$ $A = [-2, -1)$

(c) $f(x) = \sin x$ $A = (0, \pi]$

(d) $f(x) = \cos x - 1$ $A = (0, \pi)$

(e) $f(x) = |x|$ $A = (-1, 1)$

(f) $f(x) = |x^2 - 9|$ $A = (0, 4]$.

4. Mostrare che le seguenti funzioni sono monotone in $[1, 2]$ e calcolarne minimo e massimo su $[1, 2]$.

(a) $f(x) = -\frac{1}{x}$ (b) $f(x) = \frac{1}{x^4} - x$

(c) $f(x) = \frac{10^{-x} + 1}{x + x^3}$ (d) $f(x) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}x}{x^2}$

(e) $f(x) = \frac{x^3 - 10}{x + 1}$ (f) $f(x) = |1 - 2x^2|$.

5. Dire se $x = 0$ è punto di minimo/massimo relativo/assoluto per le funzioni

(a) $f(x) = x^n$ con n pari (b) $f(x) = x^n$ con n dispari

(c) $f(x) = \sin(x^2)$ (d) $f(x) = \sin(x^3)$

(e) $f(x) = \cos(x^3)$ (f) $f(x) = x^2 - x^4$

(g) $f(x) = |x^7 - x^4 + x|$ (h) $f(x) = x^3 - x^4$

(i) $f(x) = \log_{10}(1 + x^4)$ (j) $f(x) = \frac{2 + e^{-x^2}}{1 + x^2}$.