

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

Analisi Matematica I per Ingegneria — Prof. C. Sinestrari

Esercizi sulle proprietà di base delle funzioni — 17.X.2011

1. Nei casi seguenti, viene assegnata una funzione f e tre insiemi A, B, C . Per ciascuno dei tre insiemi, si dica se la funzione f è iniettiva nell'insieme e si determini l'immagine dell'insieme mediante f . (Si suggerisce di disegnare un grafico della funzione f per aiutarsi a trovare la risposta)

(a) $f(x) = 2x - 3$ $A = [1, 3]$ $B = (0, 1)$ $C = [-1, 1)$
(b) $f(x) = x^2$, $A = [1, 2)$, $B = (-1, 2)$, $C = (-4, -2] \cup [1, 3)$
(c) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $A = [0, \pi]$, $B = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right]$, $C = \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
(d) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $A = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $B = \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$, $C = \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$.

2. In ciascuno dei casi seguenti, determinare la controimmagine dell'insieme A mediante la funzione f . (Si suggerisce di disegnare un grafico della funzione f per aiutarsi a trovare la risposta)

1. $f(x) = x^3$, $A = (-8, 1]$.
2. $f(x) = x^2$, $A = (-2, 4)$.
3. $f(x) = \ln x$, $A = (-\infty, 0)$.
4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $A = (0, 1)$.
5. $f(x) = |x - 1|$, $A = [1, 2]$.

3. Risolvere le seguenti disequazioni.

(a) $|x + 1| < 2x^2$ (b) $|x^2 - 4| \leq 3x$ (c) $\frac{|x + 2|}{x - 1} \geq 1$
(d) $|\operatorname{sen} x| < \frac{1}{2}$ (e) $|\cos x - 2| \leq 2$ (f) $|\operatorname{sen} x| \leq |\cos x|$.

4. Determinare il dominio delle seguenti funzioni.

(a) $f(x) = \sqrt{\frac{x - x^3}{x + 2}}$ (b) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x^3}{x + 2}}$
(c) $f(x) = 2^{\frac{x-3}{x-1}} + \sqrt{\ln(x^2 - 1)}$ (d) $f(x) = 2^{\frac{x-3}{x-1}} + \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$

$$\begin{array}{ll}
\text{(e)} \quad f(x) = \sqrt{\frac{(4-x)\ln x}{x^2-4x+4}} & \text{(f)} \quad f(x) = \sqrt{\frac{x\ln(4-x)}{-x^2+3x-2}} \\
\text{(g)} \quad f(x) = \sqrt{1+2\cos x} & \text{(h)} \quad f(x) = \ln(\sqrt{x+2}-x) \\
\text{(i)} \quad f(x) = \sqrt{x|x|+1} & \text{(j)} \quad f(x) = \frac{x}{2-2^{\frac{1}{x}}} \\
\text{(k)} \quad f(x) = \ln\left(\arcsen\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) & \text{(l)} \quad f(x) = \arcsen\left(\frac{x-2}{x+3}\right)
\end{array}$$

5. Disegnare un grafico approssimativo delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad f(x) = \sin 2x & \text{(b)} \quad f(x) = \cos \frac{x}{2} & \text{(c)} \quad f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
\text{(d)} \quad f(x) = (x+8)^2 & \text{(e)} \quad f(x) = |x^2-1| & \text{(f)} \quad f(x) = |\sin x| \\
\text{(g)} \quad f(x) = \sin|x| & \text{(h)} \quad f(x) = |2x+1| & \text{(i)} \quad f(x) = 2|x|+1 \\
\text{(j)} \quad f(x) = \sin x^2 & \text{(k)} \quad f(x) = \sin \frac{1}{x} & \text{(l)} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}
\end{array}$$

6. Dire se le seguenti funzioni sono pari, o dispari, o non hanno nessuna delle due proprietà.

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad f(x) = \cos x & \text{(b)} \quad f(x) = \operatorname{tg} x & \text{(c)} \quad f(x) = x^4 - x^2 + 1 \\
\text{(d)} \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1} & \text{(e)} \quad f(x) = x^5 - x + 1 & \text{(f)} \quad f(x) = \sin(x^2) \\
\text{(g)} \quad f(x) = \sin(x^3+x) & \text{(h)} \quad f(x) = \cos(x^3+x) & \text{(i)} \quad f(x) = \frac{|x|}{3+x^2+\cos x}
\end{array}$$

7. Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni crescenti, con $g(x) \neq 0$ per ogni x . Studiare cosa si può dire in generale sulla monotonia della funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita rispettivamente da

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \quad h(x) = f(x) + g(x) & \text{(b)} \quad h(x) = f(x) - g(x) & \text{(c)} \quad h(x) = f(x)g(x) \\
\text{(d)} \quad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} & \text{(e)} \quad h(x) = f(g(x)) & \text{(f)} \quad h(x) = f(-g(x)).
\end{array}$$

La risposta in (c) e (d) cambia se si aggiunge l'ipotesi che f, g siano entrambe positive?

NB Si suppone che lo studente sia già familiare con la risoluzione di disequazioni che coinvolgono funzioni elementari (ad es. polinomi, funzioni fratte, radici, funzioni trigonometriche). A chi avesse bisogno di ripassare questi argomenti si raccomanda di svolgere gli esercizi dei §2E, 3A, 3C, 3D, 3E e 3F del libro di Marcellini-Sbordone.