

1. (7 punti) Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln(\cos(1/n)) \ln(\sin(1/n))}{\ln n + \sin n + \cos n} \left(\frac{n! - n}{n!} \right)^{n^2}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2 \cos x}{\operatorname{tg}^3(x^2) \arccos(x^2 + x^4)}.$$

2. (7 punti) Sia data la funzione

$$f(x) = e^{-x}(x^2 - |x|)$$

Studiare il dominio di f , eventuali asintoti, monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità, convessità, e disegnare un grafico qualitativo.

3. (5 punti) Dire per quali valori di $a > 0$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{[(x^2 + 3) \ln(1+x)]^a} dx.$$

4. (6 punti) Trovare le due soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = x^3 e^{x^2} (y^2 - 4)$$

che soddisfano rispettivamente le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y(0) = 2$.

5. (5 punti) Si consideri la funzione $f(x, y) = 1 + x^3 + 9x^2 + 12xy + 3y^2$.

(a) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, dove $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

(b) Trovare i punti critici di f e dire se sono punti di massimo o minimo locale.

1. (7 punti) Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \sin n + \cos n}{n^2 \ln(\cos(1/n)) \ln(\sin(1/n))} \left(\frac{n^n + 1}{n^n} \right)^{n!}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen^3(x^2) \arccos(x^2 + x^4)}{\ln(1 + x^2) - x^2 \cos x}.$$

2. (7 punti) Sia data la funzione

$$f(x) = e^{2x}(2x^2 - |x|)$$

Studiare il dominio di f , eventuali asintoti, monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità, convessità, e disegnare un grafico qualitativo.

3. (5 punti) Dire per quali valori di $a > 0$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{[(x+3) \ln(1+x^2)]^a} dx.$$

4. (6 punti) Trovare le due soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = x^3 e^{x^2} (y^2 - 4y)$$

che soddisfano rispettivamente le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y(0) = 2$.

5. (5 punti) Si consideri la funzione $f(x, y) = 3x^2 + 12xy + y^3 + 9y^2 + 1$.

(a) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, dove $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

(b) Trovare i punti critici di f e dire se sono punti di massimo o minimo locale.

1. (7 punti) Calcolare i limiti

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln n \ln(\cos(1/n))}{\ln(\sin(1/n)) + \sin n + \cos n} \left(\frac{n! - 2^n}{n!} \right)^{3^n}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3(x^2) \arccos(x + x^6)}{x^2 \cos x - \ln(1 + x^2)}.$$

2. (7 punti) Sia data la funzione

$$f(x) = (|x| - x^2)e^{-x}$$

Studiare il dominio di f , eventuali asintoti, monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità, convessità, e disegnare un grafico qualitativo.

3. (5 punti) Dire per quali valori di $a > 0$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^3}{[(x+3)\ln(1+x^2)]^a} dx.$$

4. (6 punti) Trovare le due soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = x^3 e^{x^2} (y^2 - 1)$$

che soddisfano rispettivamente le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y(0) = 1$.

5. (5 punti) Si consideri la funzione $f(x, y) = x^3 - 9x^2 + 12xy - 3y^2 - 1$.

(a) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, dove $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.

(b) Trovare i punti critici di f e dire se sono punti di massimo o minimo locale.