

UNIVERSITÀ “TOR VERGATA” — FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Analisi Matematica I — Prova scritta del 13.VII.2012 — Compito n.1

1. (6 punti) Disporre in ordine crescente di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ le funzioni

$$f(x) = (1 - x^x)^2, \quad g(x) = e^{x^2-x} \arcsen(x^2 + x)$$

$$h(x) = \ln x (e^x \cos(\sqrt{2x}) - 1).$$

2. (6 punti) Calcolare i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^{2n} + 7^n} - \ln(3n - 7) + \ln(2n - 8) + n \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}) \ln(2 - \cos x)}{2 \sin x - \sin(2x)} + \arctan \frac{1}{x^2}.$$

3. (7 punti) Sia data la funzione

$$f(x) = |x - 2| \ln |x - 2|.$$

(i) Studiare il dominio di f , eventuali asintoti, monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità, convessità, e disegnare un grafico qualitativo.

(ii) Dire se ci sono punti non appartenenti al dominio di f dove la f può essere prolungata in modo da essere continua e/o derivabile.

4. (6 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - 4)x \sin 2x$$

che soddisfano le condizioni iniziali rispettivamente: (i) $y(0) = 0$, (ii) $y(0) = 2$.

5. (5 punti) Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{\ln^2(1+x)(x^{\alpha-2} + x^{\alpha+2})} dx.$$

UNIVERSITÀ “TOR VERGATA” — FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Analisi Matematica I — Prova scritta del 13.VII.2012 — Compito n.2

1. (6 punti) Disporre in ordine crescente di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ le funzioni

$$f(x) = (3^x - 2^x) e^{-x^2}, \quad g(x) = x^x e^{-1/|x|}$$

$$h(x) = \left(\ln x - \ln \frac{1}{x^2} \right) \arcsen(x^2 + x).$$

2. (6 punti) Calcolare i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 3^{2n}} - \ln(8n - 7) + \ln(2n - 8) + n^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(3x)}{(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}) \ln(2 - \cos x)} - 2 \arctan \frac{1}{x^2}.$$

3. (7 punti) Sia data la funzione

$$f(x) = |x - 1| \ln |x - 1|.$$

- (i) Studiare il dominio di f , eventuali asintoti, monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità, convessità, e disegnare un grafico qualitativo.
(ii) Dire se ci sono punti non appartenenti al dominio di f dove la f può essere prolungata in modo da essere continua e/o derivabile.

4. (6 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - 9)x \operatorname{sen} 3x$$

che soddisfano le condizioni iniziali rispettivamente: (i) $y(0) = 0$, (ii) $y(0) = 3$.

5. (5 punti) Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{\ln^3(1+x)(x^{\alpha-1} + x^{\alpha+3})} dx.$$

UNIVERSITÀ “TOR VERGATA” — FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Analisi Matematica I — Prova scritta del 13.VII.2012 — Compito n.3

1. (6 punti) Disporre in ordine crescente di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ le funzioni

$$f(x) = (1 - x^x)^3, \quad g(x) = e^{x - \frac{1}{x}} \arctan(x^2 + x)$$

$$h(x) = \ln(x^2 + x) (e^{2x^2} \cos(2x) - 1).$$

2. (6 punti) Calcolare i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n + 4^{2n}} - \ln(5n - 7) + \ln(7n - 8) + n \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(2x)}{(\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x}) \ln(2 - \cos x)} + 5 \arctan \frac{1}{x^2}.$$

3. (7 punti) Sia data la funzione

$$f(x) = |x + 2| \ln |x + 2|.$$

(i) Studiare il dominio di f , eventuali asintoti, monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità, convessità, e disegnare un grafico qualitativo.

(ii) Dire se ci sono punti non appartenenti al dominio di f dove la f può essere prolungata in modo da essere continua e/o derivabile.

4. (6 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - 4y)x \operatorname{sen} 2x$$

che soddisfano le condizioni iniziali rispettivamente: (i) $y(0) = 0$, (ii) $y(0) = 2$.

5. (5 punti) Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{\ln(1 + x^2)(x^{\alpha-2} + x^{\alpha+2})} dx.$$