UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA" — FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Analisi Matematica I — Prova scritta del 13.II.2012 — Compito A

1. Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+e^n}{e^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{1}{1+e^n}\right)^n$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\left(e^{-1/x}-1\right)}{e^x\ln(1+2x)-2\operatorname{sen}x}.$$

2. Sia data la funzione

$$f(x)=e^{\left|\frac{1}{1-x}-1\right|}$$

Studiare il dominio di f, eventuali asintoti, monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità, convessità, e disegnare un grafico qualitativo.

3. Dire per quali valori di $a>0$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3(x+1)^{1-a}}{x^4+(1-\cos x)^a}\,dx.$$

4. Trovare la soluzione $y(x)$ dell'equazione

$$y'=(y^2+4y+8)xe^{-2x}$$

che soddisfa la condizione $y(0)=0$.

5. Si consideri la funzione $f(x,y)=4x^2+3y^2+6y-2(y+1)x^3$.
(a) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, dove $(x_0,y_0)=(1,-1)$.
(b) Trovare i punti critici di f e dire se sono punti di massimo o minimo locale.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA" — FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Analisi Matematica I — Prova scritta del 13.II.2012 — Compito B

1. Calcolare i limiti
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{1+n!}\right)^n+(n^2+2^n)^{\frac{1}{n}}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\,\mathrm{sen}\,x+e^{-x}\ln(1-2x)}{x^3-\ln x\,\mathrm{sen}^4 x}.$$

2. Sia data la funzione
$$f(x)=e^{\left|\frac{1}{2-x}-1\right|}$$
Studiare il dominio di f, eventuali asintoti, monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità, convessità, e disegnare un grafico qualitativo.

3. Dire per quali valori di $a>0$ converge l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2(x+1)^{2-a}}{\ln(1+x^a)+x^3}\,dx.$$

4. Trovare la soluzione $y(x)$ dell'equazione
$$y'=(y^2+2y+5)\,x\,\mathrm{sen}\,2x$$
che soddisfa la condizione $y(0)=1$.

5. Si consideri la funzione $f(x,y)=1+12x^2+2x^3(y-3)+y^2-6y$.
(a) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, dove $(x_0,y_0)=(1,-1)$.
(b) Trovare i punti critici di f e dire se sono punti di massimo o minimo locale.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA" — FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Analisi Matematica I — Prova scritta del 13.II.2012 — Compito C

1. Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^n + \left(\frac{1+e^{2n}}{e^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3\left(1-e^{-1/x}\right)}{\operatorname{sen} 2x - e^x \ln(1+2x)}.$$

2. Sia data la funzione

$$f(x) = e^{\left|\frac{1}{1+x}-1\right|}$$

Studiare il dominio di f, eventuali asintoti, monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità, convessità, e disegnare un grafico qualitativo.

3. Dire per quali valori di $a > 0$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2(x+1)^{1-2a}}{(1-\cos x)^a + x^3}\, dx.$$

4. Trovare la soluzione $y(x)$ dell'equazione

$$y' = (y^2 - 4y + 8)\, xe^{-2x}$$

che soddisfa la condizione $y(0) = 4$.

5. Si consideri la funzione $f(x,y) = 1 + 4x^2 + 3y^2 - 2(y-1)x^3 - 6y$.
(a) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, dove $(x_0, y_0) = (1, -1)$.
(b) Trovare i punti critici di f e dire se sono punti di massimo o minimo locale.

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA" — FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Analisi Matematica I — Prova scritta del 13.II.2012 — Compito D

1. Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to\infty} (n^4 + 4^n)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{1+n!}\right)^n$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 2x + e^{-x}\ln(1-2x)}{x^3\,(1 - \operatorname{sen} x \ln x)}.$$

2. Sia data la funzione

$$f(x) = e^{\left|\frac{1}{2+x}-1\right|}$$

Studiare il dominio di f, eventuali asintoti, monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo/assoluto, eventuali punti di non derivabilità, convessità, e disegnare un grafico qualitativo.

3. Dire per quali valori di $a > 0$ converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3(x+1)^{2-a}}{\ln(1+x^a)+x^4}\,dx.$$

4. Trovare la soluzione $y(x)$ dell'equazione

$$y' = (y^2 - 2y + 5)\,x\,\operatorname{sen}(2x)$$

che soddisfa la condizione $y(0) = 3$.

5. Si consideri la funzione $f(x,y) = 12x^2 + y^2 + 6y - 2(y+3)x^3$.
(a) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, dove $(x_0, y_0) = (1, -1)$.
(b) Trovare i punti critici di f e dire se sono punti di massimo o minimo locale.