

LEÇONS

SUR LA

DÉTERMINATION DES ORBITES

PROFESSÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PAR

F. TISSERAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES;

RÉDIGÉES ET DÉVELOPPÉES POUR LES CALCULS NUMÉRIQUES

PAR J. PERCHOT,

Docteur en Sciences, Agrégé-Adjoint à l'Observatoire

AVEC UNE PRÉFACE

DE

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES,



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1899

F. TISSERAND. — Leçons sur la détermination des orbites. — 1899.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

135977-50

A 1774

102

LEÇONS

SUR LA

DÉTERMINATION DES ORBITES

PROFESSÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PAR

F. TISSERAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES;

RÉDIGÉES ET DÉVELOPPÉES POUR LES CALCULS NUMÉRIQUES

PAR J. PERCHOT,

Docteur ès Sciences, Astronome-Adjoint à l'Observatoire,

AVEC UNE PRÉFACE

DE

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

25983 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

OBSERVATOIRE
DE NICE
Bibliothèque
N° 1774



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Tous droits réservés.)

PRÉFACE.

Nous devons être reconnaissants à M. Perchot qui nous a conservé les Leçons de Tisserand sur la détermination des Orbites. Les nombreux lecteurs du *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand, qui connaissent la clarté de son exposition et qui appréciaient la simplicité et l'élégance de sa méthode, croyaient sa voix éteinte à jamais. Grâce à M. Perchot, ils auront la joie de l'entendre de nouveau.

Les idées que Tisserand exposait dans les Leçons qu'il professait à la Sorbonne se retrouvent presque toutes dans le grand Traité précédemment publié et qui est maintenant entre les mains de tous les astronomes. Elles n'y sont pas toutes cependant; bien des questions qu'il a traitées dans son Cours ont été laissées de côté dans son Ouvrage. Il faut espérer que M. Perchot et ses autres élèves feront revivre la partie inédite de son Oeuvre et sauveront de sa pensée tout ce qu'une mort prématurée permet d'en sauver.

La détermination des orbites des planètes et des comètes, ce problème si important pour l'astronomie, n'avait pas été étudiée dans le *Traité de Mécanique céleste*: c'est là le sujet des Leçons recueillies par M. Perchot; le seul Ouvrage écrit en français sur cette question est la traduction du *Traité d'Oppolzer*. Cet utile Volume est consulté tous les jours par les calculateurs; mais il faut reconnaître que la lecture en est difficile et rébarbative.

Les débutants ne seront pas seuls à s'applaudir d'avoir à leur disposition un Traité où ils retrouveront la limpidité française. Grâce à ce Guide, les étudiants avanceront sans fatigue; j'ajoute que ce Guide peut les mener jusqu'au bout, car M. Perchot a fait suivre les Leçons de Tisserand d'un résumé général des formules mises sous leur forme définitive, c'est-à-dire sous une forme propre au calcul et même d'un modèle de calcul où aucun détail n'est omis.

Pour déterminer les six éléments d'une orbite on dispose de trois observations; chacune de ces observations nous fournissant deux données, nous avons six équations pour calculer nos six inconnues.

Géométriquement, il s'agit de déterminer l'orbite d'une planète, sachant que cette planète se trouvait à trois instants donnés sur trois droites données dans l'espace.

Dans le cas où l'orbite de la planète serait dans le plan de l'écliptique, on n'aurait plus que quatre éléments au lieu de six. Mais, d'autre part, chaque observation ne fournirait qu'une seule donnée, la longitude. Il faudrait donc quatre observations pour déterminer l'orbite; ce qui veut dire pratiquement que, si l'inclinaison est faible, il sera plus exact d'employer une quatrième observation de longitude que de se servir des trois observations de latitude. N'insistons pas sur ce point et revenons au cas général.

Comme le nombre des équations est le même que celui des inconnues le problème est théoriquement possible, mais les ressources actuelles de l'Analyse ne permettent pas de le résoudre en toute rigueur et dans toute sa généralité.

Il y a cependant un cas où une solution complète serait possible, c'est celui des orbites paraboliques. Pour la plupart des comètes on peut admettre, en première approximation, que leur trajectoire est une parabole. Mais une orbite parabolique ne dépend plus que de cinq éléments au lieu de six et, comme nous avons toujours nos six équations, nous avons une équation surabondante. De plus, dans ce cas, nos six équations peuvent être mises sous la forme algébrique.

Cette double circonstance suffit pour rendre le problème résoluble. Nous avons en effet six relations algébriques entre cinq inconnues et un certain nombre de données. En éliminant quatre des inconnues, on aura deux équations algébriques entre une seule inconnue et les données. Les premiers membres de ces deux équations seront deux polynômes entiers par rapport à l'inconnue. Cherchons le plus grand commun diviseur de ces deux polynômes et arrêtons l'opération quand nous arriverons à un reste qui sera un polynôme du premier degré. En égalant ce reste à zéro, nous aurons l'inconnue en fonction rationnelle des données.

En résumé, nous aurons les éléments de l'orbite parabolique sous la forme de fonctions rationnelles des époques des trois observations, ainsi que des cosinus et des sinus des trois ascensions droites et des trois déclinaisons observées. Nul doute d'ailleurs qu'un algébriste habile ne puisse arriver à ce résultat

beaucoup plus rapidement que par l'application brutale de la méthode que je viens d'esquisser.

Une pareille méthode éviterait l'emploi des approximations successives; elle permettrait d'utiliser non seulement trois observations distantes de peu de jours, mais trois observations quelconques.

Il n'y a aucune raison pour qu'elle soit illusoire, ou moins exacte que les méthodes ordinaires. Serait-elle plus rapide et plus commode pour les calculs numériques? C'est une question sur laquelle il convient de faire des réserves jusqu'à ce que l'on ait entièrement développé les formules auxquelles elle conduirait.

On pourrait aussi supposer que l'on dispose de trois observations: les deux premières très voisines l'une de l'autre, la troisième suffisamment éloignée des deux autres. On pourrait ainsi considérer comme connues: 1° l'ascension droite, la déclinaison et leurs dérivées du premier ordre à l'instant t ; 2° l'ascension droite et la déclinaison à l'instant t' . Les cinq éléments inconnus nous seraient encore donnés par six équations algébriques. Comme on aurait encore une équation surabondante, on pourrait appliquer le même procédé qui conduirait cette fois à des calculs plus simples.

Aucune méthode de ce genre n'a jamais été employée.

Dans le cas des orbites elliptiques, une pareille solution n'est plus possible. D'une part, en effet, il n'y a plus d'équation surabondante; d'autre part les équations sont transcendantes. Pour avoir des équations surabondantes, il faudrait plus de trois observations; mais, pour pouvoir arriver à une solution analogue à celle dont je viens de montrer la possibilité dans le cas des orbites paraboliques, il faudrait éliminer les transcendentes, et pour cela il faudrait six observations (à moins que se contentant d'une approximation on remplace les fonctions transcendentes par des fonctions algébriques qui en diffèrent fort peu).

En ne faisant pas intervenir les époques des observations et en écrivant que l'ellipse décrite par la planète rencontre six droites données dans l'espace, on obtiendrait six équations de forme algébrique entre les cinq éléments qui définissent la forme et la position de l'ellipse. On se trouverait donc dans les mêmes conditions que pour les orbites paraboliques. Inutile d'ajouter qu'une pareille méthode ne saurait être recommandée à aucun point de vue.

Les méthodes rigoureuses sont donc ou inapplicables, ou inapplicables, et il

faut bien recourir à des procédés d'approximations successives. Pour que ces approximations soient possibles, il faut supposer que les trois observations se font à des époques très rapprochées l'une de l'autre. Les intervalles des observations sont alors regardés comme de très petites quantités et c'est par rapport aux puissances de ces intervalles que l'on développe.

Il y a là une nécessité qui nous est imposée par les difficultés analytiques du problème. Si l'on n'avait pas à tenir compte de ces difficultés, il est évident qu'on aurait d'autant plus de garantie d'exactitude que les observations employées seraient plus éloignées les unes des autres; mais, si les intervalles étaient trop grands, les méthodes d'approximations successives seraient inapplicables ou trop pénibles.

La première de ces méthodes est celle de Laplace; aujourd'hui elle n'est plus employée et elle est tombée dans un discrédit peut-être injuste; disons-en quelques mots cependant, pour la comparer avec celle de Gauss et d'Olbiers qui sont exposées dans cet Ouvrage.

Avec trois observations, ou en en faisant intervenir un plus grand nombre s'il y a lieu, on calcule par interpolation les valeurs, à un certain instant t , de l'ascension droite α , de la déclinaison δ et de leurs dérivées $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d^2\delta}{dt^2}$.

Ce sont ces six quantités que nous regarderons comme les données de la question. Prenons, d'autre part, pour inconnues la distance ρ de la planète à la Terre et ses deux dérivées $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d^2\rho}{dt^2}$.

Les trois composantes de l'accélération de la planète seront des fonctions linéaires non homogènes de ρ , $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d^2\rho}{dt^2}$. Les coefficients de ces fonctions linéaires seront des quantités connues dépendant directement des données. D'autre part, la loi de Newton nous donne ces trois composantes en fonctions des coordonnées de la planète, et ces coordonnées dépendent seulement, d'une part, de ρ , et, d'autre part, de α et de δ qui sont des données. Ainsi, la loi de Newton nous donne les trois composantes en fonctions de ρ . En égalant les deux valeurs de chacune de ces trois composantes, nous obtiendrons un système de trois équations que j'appellerai pour abréger les équations (1) de Laplace.

Comment tirer de ces trois équations les valeurs des inconnues? Nous commencerons par éliminer $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d^2\rho}{dt^2}$. Pour cela, projetons l'accélération sur une

droite perpendiculaire à la fois au rayon vecteur qui joint la Terre à la planète à l'instant t , et au rayon vecteur infiniment voisin qui joint ces deux astres à l'instant $t + dt$. Égalons les deux expressions de cette projection, nous obtenons une équation que j'appellerai l'équation (2) de Laplace. Cette équation est algébrique et elle ne contient d'autre inconnue que ρ .

Quand on en aura tiré ρ , les équations (1) ne contiendront plus les inconnues restantes $\frac{d\rho}{dt}$ et $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ que sous la forme linéaire. Le calcul de ces deux inconnues se ramènera donc à la résolution d'équations du premier degré.

Telle est la méthode de Laplace, dont l'avantage est de tenir compte, non seulement de trois observations, mais de toutes celles dont on dispose.

Passons à la méthode de Gauss qui est exposée dans le Chapitre II de cet Ouvrage; elle est fondée sur la considération des trois triangles formés par le Soleil et les trois positions de la planète et dont les aires sont désignées (page 12) par

$$\frac{1}{2} [r, r'], \quad \frac{1}{2} [r', r''], \quad \frac{1}{2} [r, r''].$$

Ces aires peuvent être développées suivant les puissances des intervalles des observations, ou des petites quantités θ , θ' , θ'' que l'on définit page 13 et qui sont proportionnelles à ces intervalles.

En première approximation, ces triangles se confondront avec les secteurs correspondants; ils seront donc proportionnels à θ^2 , θ'^2 et $\theta''^2 = 0 + \theta^2$.

L'erreur commise est donc égale au segment compris entre un petit arc d'ellipse et sa corde; elle est donc du troisième ordre.

On verrait aisément que ce segment est sensiblement au secteur correspondant comme l'accélération (qui est toujours dirigée vers le Soleil), multipliée par le carré de l'intervalle correspondant, est à six fois le rayon vecteur. Après cette correction l'erreur n'est plus que du quatrième ordre. C'est ainsi que s'expliquent les termes en $\frac{\theta^2}{6r^2}$ dans les formules qui sont à la fin de la page 14.

On aurait pu d'ailleurs, avec la même approximation, remplacer dans la première de ces formules par exemple r' par r'' , c'est-à-dire qu'on aurait pu introduire, au lieu du rayon vecteur au commencement de l'intervalle, le rayon vecteur final ou un rayon vecteur intermédiaire quelconque. C'est ainsi que le rayon vecteur r' , qui figure au dénominateur du second terme dans nos trois for-

mules, est le rayon initial pour la première formule, un rayon intermédiaire pour la seconde, le rayon final pour la troisième.

L'examen de la seconde formule montre que si les observations sont équidistantes le terme en $\frac{dr'}{dt}$ disparaît. Cela signifie que si dans le calcul du terme correctif on introduit, au lieu du rayon initial ou final, celui qui correspond au milieu de l'intervalle, l'erreur commise n'est plus que du cinquième ordre. Cela revient, dans la première formule par exemple, à changer r' en $r' + \frac{\theta}{2} \frac{dr'}{K dt}$. Ainsi s'explique l'introduction du second terme correctif en $\frac{dr'}{dt}$.

Telle est la signification géométrique des formules de la page 14. L'examen de ces formules nous apprend encore un autre fait, utilisé dans la méthode d'Olbiers : c'est que si les observations sont équidistantes, le rapport de $[r', r'']$ à $[r, r']$ est égal à celui de θ à θ'' au troisième ordre près.

On arrive ensuite à des équations linéaires par rapport aux trois distances de la planète à la Terre, ρ , ρ' et ρ'' : ce sont les équations (1) de la page 45, identiques aux notations près aux équations (1) de la page 17. Ces équations correspondent aux équations (1) de Laplace et peuvent s'y réduire en première approximation. Comme on pourrait ne pas les y reconnaître, il convient d'insister un peu sur ce point.

Comme θ et θ'' sont très petits, nous pourrions développer ρ et ρ'' suivant les puissances de ces quantités et écrire, en nous arrêtant aux termes du second ordre,

$$\begin{aligned}\rho &= \rho' - \frac{d\rho'}{K dt} \theta + \frac{d^2 \rho'}{K^2 dt^2} \frac{\theta^2}{2}, \\ \rho'' &= \rho' + \frac{d\rho'}{K dt} \theta'' + \frac{d^2 \rho'}{K^2 dt^2} \frac{\theta''^2}{2}.\end{aligned}$$

Développons de même α' , β' , α'' , β'' et leurs lignes trigonométriques, en nous arrêtant toujours au second ordre. Remplaçons $[r, r'']$, etc. par leurs développements de la page 14 en conservant les deux premiers termes.

Substituons dans les équations (1) : les termes du premier et du second ordre disparaîtront d'eux-mêmes ; nous négligerons ceux qui sont du quatrième ordre ou d'ordre supérieur. Quant aux termes du troisième ordre, ils contiendront en facteur le produit $\theta\theta'\theta''$; si l'on supprime ce facteur, on retombera aux notations près sur les équations de Laplace.

Nos équations (1), analogues à celles de Laplace, se traiteront de la même manière ; on les combinera de façon à éliminer ρ et ρ'' . Quel est le sens géométrique de cette opération ? La première des équations (1) est la traduction de l'équation de la page 17 :

$$[r', r''] x - [r, r''] x' + [r, r'] x'' = 0.$$

La même équation a lieu évidemment entre les coordonnées y ou z , ou encore entre les projections des rayons vecteurs r, r', r'' sur une droite quelconque. Choisissons cette droite.

Soient :

S le Soleil ;

P, P', P'' les trois positions de la planète ;

T, T', T'' celles de la Terre ;

D une droite perpendiculaire à la fois à PT et à P'T''.

Si nous projetons sur D, les deux distances ρ et ρ'' se trouveront éliminées, et nous tomberons sur l'équation (2) de la page 46 dont le sens géométrique se trouve ainsi défini.

On voit ainsi que K, A, B, C sont entre eux comme le cosinus de l'angle de P'T' avec D, et les projections sur D des trois rayons vecteurs SP, SP' et SP''.

Cette équation (2) correspond à l'équation (2) de Laplace. En première approximation, il y a identité entre les deux équations. Toutes deux sont linéaires en ρ' et $\frac{1}{r^2}$ [voir les équations (24), page 51, et (26), page 53] ; les coefficients sont à peu près les mêmes ; la différence provient de ce que la droite D est perpendiculaire aux deux vecteurs PT et P'T'' qui sont très voisins, mais non infiniment voisins. Dans la méthode de Laplace, au contraire, on projette sur la perpendiculaire commune à deux vecteurs infiniment voisins.

Mais, et c'est là l'avantage de la méthode de Gauss, la même équation peut servir dans les approximations suivantes. Dans l'équation (26), les coefficients K, A, B, C, d'après leur définition même, restent les mêmes à toutes les approximations ; il n'y a à changer que le coefficient Q, et le changement est d'ailleurs très faible, de sorte que, connaissant la solution de l'équation approchée, on en déduit, par un calcul rapide, celle de l'équation exacte.

Ayant calculé ρ' , on obtiendra ρ et ρ'' par des équations linéaires ; de même

que, dans la méthode de Laplace, le calcul de $\frac{d^2 p}{dt^2}$ et $\frac{d^2 \rho}{dt^2}$, après la détermination de p , se ramène à la résolution de deux équations du premier degré.

Ainsi, et c'est là le point que je voulais faire comprendre, la méthode de Gauss en première approximation ne diffère que par la forme de celle de Laplace; l'avantage qu'elle présente c'est qu'il suffit d'un petit changement dans les équations pour passer aux approximations suivantes.

Il est clair qu'il ne serait pas difficile de conférer à la méthode de Laplace un avantage analogue; on pourrait écrire par exemple, en appelant α , α' , α'' les trois longitudes, β , β' , β'' les trois latitudes et en s'arrêtant au troisième ordre,

$$\alpha = \alpha' - \theta \frac{d\alpha'}{K dt} + \frac{\theta^2}{2} \frac{d^2 \alpha'}{K^2 dt^2} - \frac{\theta^3}{6} \frac{d^3 \alpha'}{K^3 dt^3},$$

avec des équations analogues pour α'' , β , β' . On trouverait d'ailleurs aisément l'expression de $\frac{d^2 \alpha'}{dt^2}$ en fonction de α' , β' , p' , $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d\beta'}{dt}$, $\frac{dp'}{dt}$. En première approximation on ferait

$$\frac{d^2 \alpha'}{dt^2} = 0,$$

et l'on aurait de premières valeurs approchées de $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d^2 \alpha'}{dt^2}$, dont on se servirait pour le calcul. Dans l'expression de $\frac{d^2 \alpha'}{dt^2}$, on remplacerait ensuite α' , β' , p' , $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d\beta'}{dt}$, $\frac{dp'}{dt}$ par leurs valeurs déduites de cette première approximation, et l'on aurait de nouvelles valeurs approchées de $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d^2 \alpha'}{dt^2}$, et ainsi de suite.

C'est au reste ce qu'a exposé Laplace au Livre II, n° 32, de sa *Mécanique céleste*. On peut donc se demander si, même à ce point de vue, les deux méthodes ne sont pas équivalentes.

Dans le Chapitre I^{er}, Tisserand étudie la méthode d'Olbiers pour la détermination des orbites paraboliques. Les calculs, d'après cette méthode, se divisent en deux parties.

Dans la première partie, on ne se sert pas de l'hypothèse que l'orbite est une parabole, et l'on combine les six équations données par les trois observations de façon à en tirer une équation unique.

Dans la seconde partie, on introduit l'hypothèse de l'orbite parabolique; on n'a donc plus que cinq inconnues, et, si l'on ne veut pas d'équation surabon-

dante, il faut seulement cinq équations. On prendra les quatre équations données par les observations extrêmes et l'on y joindra l'équation finale obtenue dans la première partie.

Il est clair que, dans la première partie, on pourrait combiner d'une infinité de manières les six équations dont on dispose et en tirer une infinité d'équations différentes, et l'on ne voit pas bien du premier coup d'œil pour quelle raison on choisira l'une plutôt que l'autre.

Quoi qu'il en soit, voici ce que fait Olbiers. Reprenons les équations (1) des pages 17 et 45. Elles expriment, nous l'avons dit, que les projections sur une droite quelconque des trois vecteurs SP , SP' , SP'' , multipliées respectivement par $[r, r']$, $-[r, r'']$, $[r', r'']$, ont pour somme zéro. Projignons sur une droite perpendiculaire au plan $SP'T'$; les projections des trois vecteurs SP , SP' , SP'' seront nulles et ces trois vecteurs se trouveront éliminés.

Les projections de SP'' et de SP sont entre elles comme les triangles $SP''P'$, $SP'P'$. Or le rapport de ces triangles est égal au rapport des secteurs, c'est-à-dire à $\frac{\theta''}{\theta'}$ au second ordre près; il est encore égal à $\frac{\theta''}{\theta'}$ au troisième ordre près, si les observations sont équidistantes.

Pour la même raison, le rapport des triangles $ST''T'$, $ST'T'$, c'est-à-dire le rapport des projections de ST'' et de ST , sera encore égal à $\frac{\theta''}{\theta'}$.

Or, si l'on a

$$\frac{\text{proj. } ST''}{\text{proj. } ST} = \frac{\text{proj. } SP''}{\text{proj. } SP} = \frac{\theta''}{\theta'},$$

on aura également

$$\frac{\text{proj. } P'T''}{\text{proj. } P'T} = \frac{\text{proj. } ST'' - \text{proj. } SP''}{\text{proj. } ST - \text{proj. } SP} = \frac{\theta''}{\theta'}.$$

Connaissant le rapport des projections de $P'T''$ et $P'T$, il est aisé d'en déduire le rapport de ces deux vecteurs eux-mêmes et, par conséquent, le rapport de p'' à p .

Tel est le sens géométrique de l'analyse du n° 7, pages 16 et suivantes.

Il est aisé maintenant de comprendre la raison du choix fait par Olbiers. L'équation à laquelle il parvient est d'une forme remarquablement simple, et elle conserve cette simplicité en deuxième approximation dans le cas où les observations sont équidistantes.

Passons à la seconde partie du calcul. Nous avons à résoudre quatre équations à quatre inconnues. Ces équations sont algébriques, mais leur résolution

rigoureuse est impossible, et il faut procéder à des approximations successives. Pour que ces approximations soient rapides, il faut que la valeur dont on fait usage dans le premier tâtonnement soit déjà suffisamment approchée.

La méthode qui consiste à faire d'abord $\rho = 1$ (voir la fin de la page 24) n'est donc pas justifiée : il vaut mieux profiter de ce que les observations sont très rapprochées et faire d'abord $s = 0$; c'est là le sens de la méthode d'approximation exposée aux paragraphes 9 et 10. Il est aisé de voir en effet que, si les deux observations sont infiniment rapprochées, s et θ' sont nuls et que l'on a $\eta = 0$, $\mu = 1$.

L'avantage de la méthode d'Olbers, c'est que la seule des équations qui pourrait engendrer des difficultés de calcul ne contient d'autre lettre que μ et η .

Elle a donc pu être réduite en Tables à simple entrée qui donnent immédiatement la valeur d'une de ces deux inconnues en fonction de l'autre.

H. POINCARÉ.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	de la Note	de la ligne de :	Lignes :
13	1 de la Note	voisine du θ	voisine du Soleil	
19	5 en remontant	$\frac{h_1}{T}$	$\frac{h_1}{50}$	
24	2 en remontant	de la suivante	de la façon suivante	
50	3 en remontant	n et n'	n et n'	
55	1, formules (29)	$[r', r']$ $[r, r']$ $[r, r']$	$[r', r']$ $[r, r']$ $[r, r']$	
61	9	CC'	C, C'	
75	9	$(S = 497', 8)$	$(s = 497', 8)$	

LEÇONS

SUR LA

DÉTERMINATION DES ORBITES.

CHAPITRE I.

MÉTHODE D'OLDERS POUR LA DÉTERMINATION DE L'ORBITTE D'UNE COMÈTE.

1. Formules du mouvement elliptique. — Cherchons d'abord les équations différentielles du mouvement d'une planète ou d'une comète autour du Soleil.

Soient $O\xi, O\eta, Oz$ un système d'axes rectangulaires fixes; X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité du Soleil; M , sa masse; ξ, η, ζ , m les quantités analogues pour un astéroïde, et enfin r la distance des deux points. L'intensité de l'attraction mutuelle des deux corps est $f \frac{Mm}{r^2}$.

Les équations de leurs mouvements sont

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= f m \frac{\xi - X}{r^3}, & \frac{d^2 Y}{dt^2} &= f m \frac{\eta - Y}{r^3}, & \frac{d^2 Z}{dt^2} &= f m \frac{\zeta - Z}{r^3}, \\ \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= f M \frac{X - \xi}{r^3}, & \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= f M \frac{Y - \eta}{r^3}, & \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= f M \frac{Z - \zeta}{r^3}. \end{aligned}$$

Soient x, y, z les coordonnées de l'astéroïde par rapport à des axes parallèles aux axes fixes, mais passant par le centre de gravité du Soleil. En retranchant les équations précédentes, on obtiendra les équations du mouvement relatif de la planète ou de la comète autour du Soleil,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + f(M+m) \frac{x}{r^3} &= 0, & \frac{d^2 y}{dt^2} + f(M+m) \frac{y}{r^3} &= 0, & \frac{d^2 z}{dt^2} + f(M+m) \frac{z}{r^3} &= 0, \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

T. — P.

Elles admettent les intégrales

$$(A) \quad \begin{cases} y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = C, \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = C', \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C'', \end{cases}$$

$$(B) \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = f(M+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{k} \right).$$

Des intégrales (A) on déduit

$$Cx + C'y + C''z = 0,$$

ce qui montre que l'orbite est plane et que son plan passe par le Soleil; en le prenant pour plan de coordonnées xOy , z est nul ainsi que $\frac{dz}{dt}$ et les équations du mouvement se réduisent à

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\mu \frac{x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + f\mu \frac{y}{r^3} = 0, \quad \mu = M + m.$$

Elles admettent les intégrales

$$(B') \quad \begin{cases} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C, \\ \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = f\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{k} \right). \end{cases}$$

Le premier membre de la dernière équation représente le carré de la vitesse à l'époque t . On a

$$V^2 = f\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{k} \right).$$

Avec les coordonnées polaires r et φ les intégrales précédentes s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c, \\ \left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\varphi^2}{dt^2} \right) = f\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{k} \right). \end{cases}$$

Soit S l'aire décrite par le rayon vecteur dans le temps $t - t_0$, on a

$$dS = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{2},$$

d'où

$$S = \frac{c}{2} (t - t_0).$$

On retrouve la première loi de Kepler, c représente le double de l'aire décrite dans l'unité de temps.

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant dt entre les équations (1). En intégrant ensuite et en désignant par ϖ une constante arbitraire, on trouve

$$(2) \quad r = \frac{\frac{c^2}{f\mu}}{1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{f\mu a}} \cos(\varphi - \varpi)}.$$

On voit que c'est une section conique dont un foyer est au centre de gravité du Soleil.

Dans le cas des planètes, les constantes sont telles que cette courbe est une ellipse, tandis que, pour les comètes, c'est une ellipse très allongée ou une parabole.

On retrouve ainsi la deuxième loi de Kepler.

Considérons d'abord le cas d'une ellipse.

Soient a le demi grand axe, p le paramètre, e l'excentricité de l'orbite, A le périhélie, φ l'anomalie vraie, T le temps que met la planète à parcourir sa trajectoire, n le moyen mouvement. On sait que

$$(3) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

et que l'aire totale est $\pi a^2 (1 - e^2)$.

En comparant ces formules à (B') et à (2), on voit que

$$\varpi = \varphi - \omega, \quad \lambda = a, \quad c = \sqrt{f\mu p} = \sqrt{f\mu a (1 - e^2)},$$

et, par suite,

$$(4) \quad V^2 = f\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad \frac{c}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{T}.$$

En remplaçant c par sa valeur $\sqrt{f\mu a (1 - e^2)}$, la dernière relation devient

$$(5) \quad \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = f\mu = fM \left(1 + \frac{m}{M} \right).$$

Pour tous les astéroïdes, le rapport $\frac{m}{M}$ est absolument négligeable, de sorte

que l'on a

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = fM = K^2.$$

C'est la troisième loi de Kepler.

Le nombre K est appelé la *constante de Gauss*.

En appliquant la formule (5) à la Terre et en prenant, comme unité de temps, le jour solaire moyen, et, comme unité de distance, la distance moyenne de la Terre au Soleil, on trouve que

$$K = \frac{2\pi}{T\sqrt{1+\frac{m}{M}}}.$$

Gauss a donné à T et à $\frac{m}{M}$ les valeurs

$$T = 365,2563835, \quad \frac{m}{M} = \frac{1}{354710},$$

et il a trouvé

$$K = 0,0172021.$$

Les valeurs précédentes de T et de $\frac{m}{M}$ ne sont pas très exactes. Il semble donc qu'il y ait lieu de modifier cette valeur de K ; mais, à cause des inconvénients qu'entraînerait la variabilité de K , on considère cette quantité comme une constante absolue ayant la valeur trouvée par Gauss. Cela revient à prendre, pour unité de distance, la distance moyenne au Soleil d'un corps de masse $\frac{M}{354710}$, qui, avec la loi d'attraction newtonienne, tournerait autour du Soleil en 365,2563835 jours solaires moyens. En désignant par T la durée exacte de rotation de la Terre, par m sa masse, sa distance moyenne au Soleil sera déterminée par la formule

$$a = \left(\frac{KT\sqrt{1+\frac{m}{M}}}{3\pi} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

2. **Détermination de la position de la planète sur son orbite à une époque quelconque.** — Les valeurs de r , w sont données par

$$(6) \quad \begin{cases} r^2 \frac{dw}{dt} = na^2 \sqrt{1-e^2}, \\ r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos w}. \end{cases}$$

En éliminant w on trouve

$$(7) \quad n dt = \frac{r}{a} \frac{dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}}.$$

On est conduit à introduire une variable auxiliaire, l'anomalie excentrique u , définie par l'équation

$$(8) \quad a - r = ae \cos u.$$

En intégrant l'équation (7), on trouve l'équation de Kepler

$$(9) \quad u - e \sin u = n(t - \tau) = \zeta;$$

τ représente le temps du passage de la planète à son périhélie, ζ est l'anomalie moyenne.

Les valeurs de r et de w se déduisent de la valeur de u par les formules de l'un des groupes suivants, qui sont faciles à établir :

$$(10) \quad \begin{cases} r \sin w = a \sqrt{1-e^2} \sin u, \\ r \cos w = a(\cos u - e); \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \sqrt{r} \sin \frac{w}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{u}{2}, \\ \sqrt{r} \cos \frac{w}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{u}{2}; \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} r = a(1 - e \cos u), \\ \tan \frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2}. \end{cases}$$

L'excentricité est souvent remplacée, dans les orbites elliptiques, par un angle φ , moindre que 90° , qu'on appelle *angle d'excentricité*, et qui est défini par l'égalité

$$\sin \varphi = e.$$

Il est aisé de voir ce que deviennent les formules précédentes quand on introduit cet angle au lieu de e .

Les éléments d'une planète étant connus, pour calculer sa position à un instant donné, on exprime en jours solaires moyens le temps t qui s'est écoulé depuis le passage de la planète à son périhélie et l'on calcule l'anomalie moyenne ζ . On en déduit l'anomalie excentrique par l'équation

$$u - e \sin u = \zeta.$$

Si e est petit, ζ est une première valeur approchée de u ; plus généralement, soit u , une valeur quelconque, peu différente de u , et ζ , la valeur correspondante de ζ . En différentiant l'équation de Képler et en remplaçant les différentielles par les accroissements, on obtiendra

$$u_2 - u_1 = \frac{M_1 - M_2}{1 - e \cos u_1}.$$

Cette formule donne une valeur beaucoup plus approchée u_2 de la valeur exacte de u . En l'appliquant successivement deux ou trois fois, on aura une approximation suffisante.

Quand l'excentricité est un peu forte, on emploie le procédé d'Encke pour obtenir une première valeur approchée de u :

On pose

$$x = u - \zeta,$$

l'équation de Képler devient

$$\begin{aligned} x &= e \sin(\zeta + x), \\ x &= e \sin \zeta \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24} x^4 - \dots\right) + e \cos \zeta \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \dots\right), \\ (1 - e \cos \zeta) x &= e \sin \zeta \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right) + x e \cos \zeta \left(-\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \dots\right), \end{aligned}$$

et en posant

$$\tan y = \frac{e \sin \zeta}{1 - e \cos \zeta},$$

il vient

$$x = \tan y \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \dots\right) - x \tan y \cot \zeta \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{120} x^5 - \dots\right);$$

$\tan y$ est du premier ordre. En négligeant successivement le deuxième et le quatrième ordres, on a pour x les valeurs approchées

$$x_1 = \tan y, \quad x_2 = \tan y - \frac{1}{2} \tan^3 y.$$

Or, on sait que

$$\sin y = \tan y - \frac{1}{3} \tan^3 y + \dots,$$

Il y a donc avantage à développer x suivant les puissances de $\sin y = \eta$. On trouve ainsi

$$x = \eta - \frac{1}{6} \cot u \cdot \eta^3 + \dots$$

Pour avoir x en secondes d'arc, on doit diviser les coefficients par l'arc de $1''$.

Voici l'ensemble des formules dont on a besoin pour effectuer les calculs :

$$\begin{aligned} \tan y &= \frac{e \sin \zeta}{1 - e \cos \zeta}, \\ \eta &= \tan y \cos y, \\ x &= \alpha \eta + \beta \cot M \cdot \eta^3 + \gamma \eta^5 + \delta \cot M \cdot \eta^7, \\ \log \alpha &= 5,3144351, \quad \log \beta = 4,536274, \\ \log \gamma &= 4,53627, \quad \log \delta = 4,2766, \\ u_1 &= \zeta + x^0, \\ \zeta_1 &= u_1 - \alpha e \sin u_1, \\ u_2 &= u_1 + \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{1 - e \cos u_1}. \end{aligned}$$

En général, la valeur de u suffira; s'il n'en est pas ainsi, on prendra celle de u_2 ; au besoin, on pourrait calculer une valeur u_3 encore plus approchée que u_2 .

En général, la valeur de u , calculée par les formules précédentes, ne différera de la valeur exacte de u que de quelques secondes d'arc et la valeur de u_2 sera suffisamment approchée.

On obtiendra ensuite les valeurs de r et de w par les formules (10), (11) ou (12).

3. Mouvement parabolique. — Considérons le cas où les constantes initiales sont telles que l'équation de la trajectoire, déduite des équations différentielles du mouvement, est une parabole.

Nous conservons aux lettres K, p, τ les mêmes significations que dans le mouvement elliptique; nous désignons encore par A le périhélie, c'est-à-dire le sommet de la parabole, par M la position de la comète au temps t , par r son rayon vecteur et par w l'anomalie vraie.

L'aire du secteur MOA est

$$\frac{c}{2} (t - \tau) \quad \text{ou} \quad \frac{K\sqrt{p}}{2} (t - \tau).$$

On a donc

$$\frac{1}{2} \int_{\tau}^t r^2 dw = \frac{K}{2} \sqrt{p} (t - \tau).$$

Or l'équation de la parabole est

$$r = \frac{p}{1 + \cos w} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{w}{2}}.$$

de sorte que l'équation des aires s'écrit

$$\frac{p^2}{4} \int \frac{1}{\cos^3 \frac{w}{2}} dv = K \sqrt{p} (t - \tau),$$

ou

$$\frac{p^2}{2} \int \frac{\frac{dv}{2}}{\cos^3 \frac{w}{2} \cos^3 \frac{w}{2}} = K \sqrt{p} (t - \tau);$$

et, en intégrant

$$\tan \frac{w}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{w}{2} = \frac{2K}{p^{\frac{3}{2}}} (t - \tau).$$

Au lieu du paramètre p , les astronomes introduisent généralement la distance périhélie $q = 2p$.

La valeur de w , à l'époque t , est donnée par l'équation du troisième degré

$$(1) \quad \tan \frac{w}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{w}{2} = \frac{K(t - \tau)}{\sqrt{q} \eta^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour $w = 0$, le premier membre est nul.

Pour $w = 180^\circ$, il est infini. Or il croît sans cesse avec w . Donc, pour chaque valeur de t , cette équation n'a qu'une racine.

En posant

$$(2) \quad M = \frac{\sqrt{2}}{K} \left(\tan \frac{w}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{w}{2} \right),$$

on aura

$$(3) \quad M = \frac{t - \tau}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour faciliter la résolution de l'équation (1), on a construit différentes Tables faisant connaître les valeurs de M pour les différentes valeurs de w et réciproquement. Les plus complètes et les plus commodes sont celles d'Oppolzer (*Traité de la détermination des orbites des planètes et des comètes*, 1^{er} Volume, Tables IV).

Les valeurs de w s'y succèdent de $10''$ en $10''$; chaque page contient 2° . De 0° à 10° , on y trouve les valeurs mêmes de M ; de 10° à 176° , elles donnent les valeurs de $\log M$. Pour les valeurs négatives de w , il faut changer le signe de M . L'interpolation est facilitée par de petites Tables de parties proportionnelles placées au bas de chaque page; pour aucune valeur de w il n'est nécessaire de tenir compte des différences secondes.

Pour obtenir la position de la comète à une époque donnée, on calcule M par la formule (3) et l'on cherche dans les Tables la valeur correspondante de w ; l'équation de la parabole fait ensuite connaître la valeur de r .

On procède d'une façon inverse pour avoir le temps qui correspond à une position donnée de l'orbite.

Les Tables précédentes ne sont pas commodes pour les valeurs de w voisines de 180° . On sait, en effet, que dans le voisinage de 90° la tangente croît rapidement, de sorte que les différences sont grandes et l'interpolation est pénible.

Pour de grandes anomalies on peut se servir avantageusement d'une formule donnée par Nicolai (*Astr. Nach.*, n° 79).

L'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{{}_2K(t - \tau)}{(2q)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3} \tan^3 \frac{1}{2} w \left(1 + 3 \cot^2 \frac{1}{2} w \right).$$

On pose ensuite

$$x = \cot \frac{1}{2} w, \quad y = \frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{6K}(t - \tau)} \quad \text{ou} \quad y = \frac{r\sqrt{q}}{\sqrt{t - \tau}}, \quad \log r = 0,4792708.$$

En supposant w peu différent de 180° , x est du premier ordre; il en est de même de y . On développe x suivant les puissances croissantes de y et l'on a

$$x = y \left(1 + y^2 + y^4 + \frac{2}{3} y^6 + \dots \right).$$

Au sixième ordre près,

$$x = \frac{y}{1 - y^2};$$

de sorte qu'en posant

$$y = \sin z,$$

on aura

$$x = \frac{\sin z}{\cos^2 z}.$$

En résumé, on se servira des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \log r &= 0,4792708, \\ \sin z &= \frac{r\sqrt{q}}{\sqrt{t - \tau}}, \\ \cot \frac{w}{2} &= \frac{\sin z}{\cos^2 z}, \quad r = \frac{q}{\cot^2 \frac{1}{2} w} \left(1 + \cot^2 \frac{1}{2} w \right). \end{aligned}$$

Les calculs précédents sont encore simplifiés avec les Tables V_a et V_b du *Traité des orbites*, d'Oppolzer.

T. — P.

4. **Théorème d'Euler.** — Soient M et M' deux points d'une orbite parabolique, r et r' les rayons vecteurs de ces points, ι et ι' les temps correspondants, $\iota' > \iota$, et c la longueur de la corde MM'.

Euler a montré que le temps $\iota' - \iota$ mis par la comète pour aller de M en M' ne dépendait que de $r + r'$ et de c . On a la relation

$$6K(\iota' - \iota) = (r + r' + c)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - c)^{\frac{3}{2}}.$$

En désignant par w et w' les anomalies des points M et M', on sait que

$$(1) \quad \begin{cases} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta}{2} = \frac{2K(\iota' - \iota)}{p^{\frac{3}{2}}}, \\ \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta}{2} = \frac{2K(\iota - \iota')}{p^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$(2) \quad \tan \frac{\theta}{2} = z, \quad \tan \frac{\theta'}{2} = z'.$$

En retranchant membre à membre les équations (1), nous aurons

$$z' - z + \frac{1}{3}(z'^3 - z^3) = \frac{2K(\iota' - \iota)}{p^{\frac{3}{2}}},$$

ou bien

$$(3) \quad (z' - z)[3(1 + zz') + (z' - z)^2] = \frac{6K(\iota' - \iota)}{p^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, des équations de la parabole, on déduit

$$(4) \quad r = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{w}{2}}, \quad r' = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{w'}{2}},$$

ou encore

$$r = \frac{p}{2}(1 + z^2), \quad r' = \frac{p}{2}(1 + z'^2).$$

D'autre part, on a

$$c^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(w' - w),$$

ou encore

$$c^2 = (r + r')^2 - 4rr' \cos^2 \frac{\theta'}{2},$$

$$2\sqrt{rr'} \cos \frac{\theta' - \theta}{2} = \pm \sqrt{(r + r')^2 - c^2}.$$

Il faudra prendre le signe + devant le radical si $\frac{\theta' - \theta}{2}$ est moindre que 180° , et le signe - dans le cas contraire.

Dans les premières déterminations des orbites, les différences des temps des observations sont toujours assez petites; c'est donc le signe + qui convient.

En remplaçant dans l'équation précédente r et r' par leurs valeurs (4), on trouve

$$1 + \tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta'}{2} = \pm \frac{1}{p} \sqrt{(r + r')^2 - c^2},$$

et en posant

$$r + r' + c = u, \quad r + r' - c = v,$$

il vient

$$1 + z z' = \pm \frac{\sqrt{uv}}{p}, \quad r + r' = \frac{u + v}{2}.$$

Des formules (4) on déduit encore

$$r + r' = \frac{p}{2}(z^2 + z'^2 + 2),$$

Donc

$$z^2 + z'^2 + 2 = \frac{u + v}{p},$$

et, par suite,

$$z^2 + z'^2 + 2 - 2 - 2 z z' = \frac{u + v \mp 2\sqrt{uv}}{p},$$

$$z' - z = \frac{\sqrt{u \pm \sqrt{v}}}{\sqrt{p}}.$$

En portant ces valeurs de $z' - z$ et de $z z'$ dans (3), il vient

$$\frac{6K(\iota' - \iota)}{p^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{u \pm \sqrt{v}}}{\sqrt{p}} \left[\pm \frac{3uv}{p} + \frac{(\sqrt{u \pm \sqrt{v}})^2}{p} \right],$$

ou bien

$$6K(\iota' - \iota) = (\sqrt{u \pm \sqrt{v}})(u \pm \sqrt{uv} + v).$$

Avec les signes supérieurs, on a

$$6K(\iota' - \iota) = (\sqrt{u} - \sqrt{v})(u + \sqrt{uv} + v) = u^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{3}{2}},$$

et, avec les signes inférieurs,

$$6K(\iota' - \iota) = (\sqrt{u} + \sqrt{v})(u - \sqrt{uv} + v) = u^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}.$$

Donc, en résumé,

$$6K(t'-t) = (r+r'+c)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-c)^{\frac{3}{2}}.$$

On prend le signe — dans le deuxième membre si $\theta' - \theta < 180^\circ$, ce qui est le cas général, et le signe + quand $\theta' - \theta > 180^\circ$.

Cette formule a été établie pour la première fois par Euler. Elle est remarquable par sa forme simple et par le fait que le paramètre de la parabole n'y entre pas.

Si la courbe a une courte distance périhélie, $\theta' - \theta$ peut facilement être $> 180^\circ$. Il faut employer une autre méthode. (Voir Oppolzer, au commencement.)

5. Soient M, M', M'' les positions de l'astre sur son orbite aux temps t, t', t'' ($t < t' < t''$); r, r', r'' les rayons vecteurs; $\xi, \eta; \xi', \eta'; \xi'', \eta''$ les coordonnées des trois points M, M', M'' par rapport à un système d'axes rectangulaires passant par le centre du Soleil.

Nous allons exprimer, en fonction du paramètre p , les aires des triangles rectilignes MSM', M'SM'' et MSM''. Nous désignons respectivement les doubles de ces aires par $[r, r']$, $[r', r'']$, $[r, r'']$. On a

$$(1) \quad \begin{cases} [r, r'] = \xi \eta' - \eta \xi', \\ [r', r''] = \xi' \eta'' - \eta' \xi'', \\ [r, r''] = \xi \eta'' - \eta \xi''. \end{cases}$$

En supposant les intervalles de temps $t'' - t'$ et $t' - t$ assez petits, on peut écrire

$$(2) \quad \begin{cases} \xi'' = \xi + \frac{(t''-t')}{1} \frac{d\xi}{dt} + \frac{(t''-t')^2}{1.2} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{(t''-t')^3}{1.2.3} \frac{d^3\xi}{dt^3} + \dots, \\ \eta'' = \eta + \frac{(t''-t')}{1} \frac{d\eta}{dt} + \frac{(t''-t')^2}{1.2} \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{(t''-t')^3}{1.2.3} \frac{d^3\eta}{dt^3} + \dots, \\ \xi = \xi + \frac{(t'-t)}{1} \frac{d\xi}{dt} + \frac{(t'-t)^2}{1.2} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \dots, \\ \eta = \eta + \frac{(t'-t)}{1} \frac{d\eta}{dt} + \frac{(t'-t)^2}{1.2} \frac{d^2\eta}{dt^2} + \dots, \end{cases}$$

Or on a

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -K \frac{\xi}{r^3}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -K \frac{\eta}{r^3},$$

On en déduit successivement

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\frac{K^2}{r'^3} \xi' + \frac{3K^2}{r'^3} \xi' \frac{dr'}{dt}, \\ \frac{d^2\xi''}{dt^2} = \frac{K^2}{r''^3} \xi'' + \frac{6K^2}{r''^3} \xi'' \frac{dr'}{dt} + 3K^2 \xi' \left(\frac{1}{r'^3} \frac{dr'}{dt^2} - \frac{4}{r'^3} \frac{dr'}{dt^2} \right), \\ \frac{d^2\eta'}{dt^2} = -\frac{K^2}{r'^3} \eta' + \frac{3K^2}{r'^3} \eta' \frac{dr'}{dt}, \\ \frac{d^2\eta''}{dt^2} = \frac{K^2}{r''^3} \eta'' + \frac{6K^2}{r''^3} \eta'' \frac{dr'}{dt} + 3K^2 \eta' \left(\frac{1}{r'^3} \frac{dr'}{dt^2} - \frac{4}{r'^3} \frac{dr'}{dt^2} \right). \end{cases}$$

En portant ces valeurs des dérivées successives de ξ' et de η' dans les équations (2), on trouvera

$$\xi'' = \xi' \left[1 - \frac{K^2}{2r'^3} (t''-t')^2 + \frac{K^2}{2r'^3} \frac{dr'}{dt} (t''-t') - \dots \right] + \frac{d\xi'}{dt} \left[(t''-t') - \frac{K^2}{6r'^3} (t''-t')^3 + \frac{K^2}{4r'^3} (t''-t')^2 \frac{dr'}{dt} + \dots \right].$$

Posons

$$(4) \quad \begin{cases} A' = 1 - \frac{K^2}{2r'^3} (t''-t')^2 + \frac{K^2}{2r'^3} \frac{dr'}{dt} (t''-t')^2 + \dots (1), \\ B' = (t''-t') \left[1 - \frac{K^2}{6r'^3} (t''-t')^2 + \frac{K^2}{4r'^3} \frac{dr'}{dt} (t''-t')^2 + \dots \right], \\ A = 1 - \frac{K^2}{2r'^3} (t'-t)^2 + \frac{K^2}{2r'^3} \frac{dr'}{dt} (t'-t)^2 + \dots, \\ B = (t'-t) \left[1 - \frac{K^2}{6r'^3} (t'-t)^2 + \frac{K^2}{4r'^3} \frac{dr'}{dt} (t'-t)^2 + \dots \right]. \end{cases}$$

On pourra écrire

$$(4) \quad \begin{cases} \xi'' = A' \xi' + B' \frac{d\xi'}{dt}, & \xi = A \xi' + B \frac{d\xi'}{dt}, \\ \eta'' = A' \eta' + B' \frac{d\eta'}{dt}, & \eta = A \eta' + B \frac{d\eta'}{dt}. \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, nous posons encore

$$\theta = K(t'-t), \quad \theta' = K(t''-t), \quad \theta'' = K(t'-t'');$$

ces quantités $\theta, \theta', \theta''$ sont positives puisque nous avons supposé $t < t' < t''$.

(1) Ces développements n'existeront pas si la comète est voisine du θ . On détermine alors des données avant que $\frac{1}{r}$ soit assez grand pour que les développements soient divergents. Ce cas présente de grandes difficultés.

Les expressions de A, B, A', B' s'écrivent

$$(5) \quad \begin{cases} A' = 1 - \frac{\theta^2}{2r'^3} + \frac{\theta^3}{3r'^4} \frac{dr'}{dt} + \dots \\ B' = \frac{\theta}{K} \left(1 - \frac{\theta^2}{6r'^3} + \frac{\theta^3}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} + \dots \right) \\ A = 1 - \frac{\theta^2}{2r^3} + \frac{\theta^3}{3r^4} \frac{dr}{dt} + \dots \\ B = -\frac{\theta^2}{K} \left(1 - \frac{\theta^2}{2r^3} + \frac{\theta^3}{4r^4} \frac{dr}{dt} + \dots \right) \end{cases}$$

et, en portant ces valeurs dans les seconds membres des équations (1), on trouve

$$\begin{aligned} [r', r'] &= B' \left(\xi' \frac{d\eta'}{dt} - \eta' \frac{d\xi'}{dt} \right) = B' K \sqrt{p}, \\ [r, r] &= -B \left(\xi' \frac{d\eta'}{dt} - \eta' \frac{d\xi'}{dt} \right) = -B K \sqrt{p}, \\ [r, r'] &= (AB' - BA') \left(\xi' \frac{d\eta'}{dt} - \eta' \frac{d\xi'}{dt} \right) = (AB' - BA') K \sqrt{p}. \end{aligned}$$

Or des formules (3) on tire

$$\begin{aligned} K(AB' - BA') &= \theta - \frac{\theta\theta'^2}{2r'^3} - \frac{\theta\theta'^2}{2r'^3} \frac{dr'}{dt} - \frac{\theta^3}{4r'^4} + \frac{\theta^3}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} - \dots \\ &= -\left(-\theta' + \frac{\theta^2\theta'}{2r'^3} + \frac{\theta^2\theta'}{2r'^3} \frac{dr'}{dt} + \frac{\theta^3}{6r'^4} - \frac{\theta^3}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} - \dots \right) \\ &= \theta + \theta' - \frac{\theta^3}{6r'^3} (\theta' + 3\theta^2\theta' + 3\theta\theta'^2 + \theta'^3) + \frac{1}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} + \dots \\ &= [\theta - \theta' + 2\theta\theta'(\theta' - \theta'^2)] \frac{1}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} + \dots \end{aligned}$$

Des valeurs de $\theta, \theta', \theta''$ il résulte que

$$\theta + \theta' = \theta'',$$

de sorte que

$$K(AB' - BA') = \theta' \left[1 - \frac{\theta'^2}{6r'^3} + \frac{\theta'^2(\theta - \theta')}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} + \dots \right].$$

On a donc, en considérant les intervalles de temps $t' - t, t'' - t', t'' - t$ comme des quantités du premier ordre et en négligeant les termes d'ordre supérieur au quatrième,

$$(6) \quad \begin{cases} [r', r'] = \theta' \sqrt{p} \left[1 - \frac{\theta'^2}{6r'^3} + \frac{\theta'^3}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} \right], \\ [r, r'] = \theta' \sqrt{p} \left[1 - \frac{\theta'^2}{6r'^3} + \frac{\theta'^2(\theta - \theta')}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} \right], \\ [r, r'] = \theta' \sqrt{p} \left[1 - \frac{\theta'^2}{6r'^3} + \frac{\theta'^3}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} \right]. \end{cases}$$

6. Expression de l'aire du triangle rectiligne formé par les trois positions de l'astre. — Nous désignerons par Σ le double de cette aire; nous aurons

$$\Sigma = [r, r'] + [r', r''] - [r, r''].$$

En remplaçant dans les seconds membres les crochets par leurs valeurs données par les formules (6), on trouve

$$\frac{\Sigma}{\sqrt{p}} = \frac{\theta'^2}{6r'^3} - \frac{\theta^2}{6r'^3} + \frac{\theta^2 - \theta'^2}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} - \frac{\theta^2}{4r'^4} \frac{dr'}{dt}$$

ou encore

$$(7) \quad \Sigma = \sqrt{p} \frac{\theta\theta'}{2r'^3} \left[1 + \frac{\theta}{r'} \frac{dr'}{dt} \dots \right].$$

6'. Expression du rapport des segments déterminés par la droite SP' sur la droite PP' . — Les aires des deux triangles de même base SPP' et $SP'P''$ sont

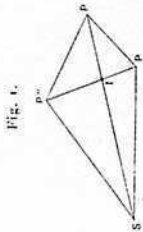


Fig. 1.

dans le même rapport que les hauteurs correspondantes ou que PI et $P'I$. Donc

$$\frac{PI}{P'I} = \frac{[r, r']}{[r', r'']},$$

On en déduit, par les formules (6),

$$\begin{aligned} \frac{PI}{P'I} &= \frac{\theta'}{\theta} \left[1 - \frac{\theta'^2}{6r'^3} + \frac{\theta'^2}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} \right] \left[1 + \frac{\theta^2}{6r'^3} - \frac{\theta^3}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} \right] \\ &= \frac{\theta'}{\theta} \left[1 + \frac{\theta'(\theta - \theta')}{6r'^3} - \frac{\theta^2 + \theta'^2}{4r'^4} \frac{dr'}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Aux termes du deuxième ordre près, dans le cas général, et du troisième ordre, quand les observations sont faites à des intervalles de temps égaux, on a

$$(8) \quad \frac{PI}{P'I} = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{t' - t}{t'' - t}.$$

T. — P.

6°. Calcul de la flèche $P'I$. — Les aires des deux triangles $PP'P''$ et SPp'' sont dans le même rapport que les longueurs $P'I$ et SI . Donc

$$\frac{P'I}{SI} = \frac{\Sigma}{[r, r']^2}.$$

En remplaçant Σ et $[r, r']$ par leurs valeurs données par les formules (6) et (7), on a

$$\frac{P'I}{SI} = \frac{6\theta^2}{2r'^2} \left(1 + \frac{\theta^2 - \theta'}{r'} \frac{dr'}{K dt} \right).$$

Or

$$SI = SP' \left(1 - \frac{P'I}{Sp'} \right) = r' \left(1 - \frac{P'I}{r'} \right);$$

de sorte qu'en négligeant le quatrième ordre on a

$$P'I = \frac{6\theta^2}{2r'^2} \left(1 + \frac{\theta^2 - \theta'}{r'} \frac{dr'}{K dt} \right).$$

D'autre part,

$$r^2 = r' + \frac{\theta^2 - \theta'}{r'} \frac{dr'}{dt} + \dots$$

$$r = r' - \frac{\theta^2 - \theta'}{r'} \frac{dr'}{dt}.$$

On peut donc écrire, au quatrième ordre près, dans le cas général,

$$P'I = \frac{6\theta^2}{2r'^2} \left(1 - \frac{r + r^2 - 2r'}{r'} \right).$$

Quand les observations sont équidistantes, la formule précédente devient

(9)

$$P'I = \frac{6\theta^2}{2r'^2}.$$

7. Résolution d'un problème fondamental dans la méthode d'Olbers.

— Considérons trois observations d'une planète ou d'une comète faites aux temps t, t', t'' .

Soient $\alpha, \alpha', \alpha''$ les longitudes géométriques; $\delta, \delta', \delta''$ les latitudes géocentriques; ρ, ρ', ρ'' les projections sur le plan de l'écliptique des distances de la planète à la Terre; ces quantités sont appelées les *distances parcourues* de la planète à la Terre; soient encore $\Theta, \Theta', \Theta''$ les longitudes du Soleil; R, R', R'' ses distances à la Terre aux temps t, t', t'' .

Nous nous proposons de calculer le rapport $\frac{P'}{P}$.

Soient $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$ les coordonnées rectangulaires héliocen-

triques de la comète aux moments des trois observations, le plan des xy étant le plan de l'écliptique.

L'équation du plan de l'orbite est

et l'on a

$$AX + BY + CZ = 0,$$

$$Ax + By + Cz = 0, \quad Ax' + By' + Cz' = 0, \quad Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

En éliminant $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{C}$ entre les quatre équations précédentes, on trouve

$$x(y'z'' - z'y'') - x'(yz'' - zy'') + x''(yz' - zy') = 0.$$

Les quantités entre parenthèses $y'z'' - z'y''$, $yz'' - zy''$, $yz' - zy'$ représentent les projections sur le plan des yz des aires des trois triangles formés par le Soleil et deux des positions de la comète.

On obtiendrait de la même façon deux autres équations analogues.

En remplaçant les projections des aires par les aires elles-mêmes, ce qui est possible à cause de la forme des équations, on aura

$$[r', r'']x - [r, r'']x' + [r, r']x'' = 0,$$

$$[r', r'']y - [r, r'']y' + [r, r']y'' = 0,$$

$$[r', r'']z - [r, r'']z' + [r, r']z'' = 0.$$

D'autre part, les projections sur chacun des axes de coordonnées du triangle formé, à l'époque de chaque observation, par le centre de gravité du Soleil, celui de la Terre et la planète ou la comète, conduisent aux relations suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha - R \cos \Theta, & x' = \rho' \cos \alpha' - R' \cos \Theta', & x'' = \rho'' \cos \alpha'' - R'' \cos \Theta'', \\ y = \rho \sin \alpha - R \sin \Theta, & y' = \rho' \sin \alpha' - R' \sin \Theta', & y'' = \rho'' \sin \alpha'' - R'' \sin \Theta'', \\ z = \rho \tan \delta, & z' = \rho' \tan \delta', & z'' = \rho'' \tan \delta''. \end{cases}$$

On peut donc écrire :

(1)

$$\begin{cases} [r', r''](\rho \cos \alpha - R \cos \Theta) - [r, r''](\rho' \cos \alpha' - R' \cos \Theta') + [r, r'](\rho'' \cos \alpha'' - R'' \cos \Theta'') = 0, \\ [r', r''](\rho \sin \alpha - R \sin \Theta) - [r, r''](\rho' \sin \alpha' - R' \sin \Theta') + [r, r'](\rho'' \sin \alpha'' - R'' \sin \Theta'') = 0, \\ [r', r'']\rho \tan \delta - [r, r'']\rho' \tan \delta' + [r, r']\rho'' \tan \delta'' = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont fondamentales dans la détermination des orbites des planètes et des comètes.

Pour obtenir le rapport $\frac{P'}{P}$, nous éliminerons R' et ρ' , et, par suite, $[r, r'']$.

T. — P.

A cet effet, nous retranchons Θ' de toutes les longitudes. La deuxième et la troisième équation (1) deviennent ainsi

$$(2) \quad \begin{cases} [r' r''] \left\{ \rho \sin(\alpha - \Theta') + R \sin(\Theta' - \Theta) \right\} \\ + [r' r'] \left\{ \rho' \sin(\alpha' - \Theta') - R' \sin(\Theta' - \Theta') \right\} = [r' r''] \rho' \sin(\alpha' - \Theta'), \\ [r' r''] \rho \tan \delta + [r' r'] \rho' \tan \delta' = [r' r''] \rho' \tan \delta'; \end{cases}$$

et, en éliminant ρ' , on trouve

$$[r' r''] \left\{ \rho [\sin(\alpha - \Theta') \tan \delta' - \sin(\alpha' - \Theta') \tan \delta] + R \tan \delta' \sin(\Theta' - \Theta) \right\} + [r' r'] \left\{ \rho' [\sin(\alpha' - \Theta') \tan \delta' - \sin(\alpha - \Theta') \tan \delta] - R' \sin(\Theta' - \Theta') \tan \delta' \right\} = 0,$$

d'où

$$(3) \quad \begin{cases} \rho = \rho' \frac{[r' r'] \tan \delta' \sin(\alpha - \Theta') - \tan \delta \sin(\alpha' - \Theta')}{[r' r'] \tan \delta' \sin(\alpha' - \Theta') - \tan \delta \sin(\alpha - \Theta')} \\ + \frac{\tan \delta' [r' r'] R \sin(\Theta' - \Theta) - [r' r'] R' \sin(\Theta' - \Theta')}{[r' r'] \tan \delta' \sin(\alpha' - \Theta') - \tan \delta \sin(\alpha - \Theta')}. \end{cases}$$

Or on a

$$[R' R'] = R' \sin(\Theta' - \Theta'), \quad [R R'] = R \sin(\Theta' - \Theta).$$

La seconde partie du deuxième membre de l'équation (3) peut donc s'écrire

$$\frac{R \tan \delta' \sin(\Theta' - \Theta)}{\tan \delta' \sin(\alpha' - \Theta') - \tan \delta \sin(\alpha - \Theta')} \left\{ \frac{[r' r']}{[r' r']} - \frac{R' R' \sin(\Theta' - \Theta')}{R R' \sin(\Theta' - \Theta)} \right\}.$$

La quantité entre crochets est égale à

$$\frac{[r' r']}{[r' r']} - \frac{[R' R']}{[R R']}.$$

De sorte qu'en posant

$$(4) \quad \begin{cases} M' = \frac{\tan \delta' \sin(\alpha - \Theta') - \tan \delta \sin(\alpha' - \Theta')}{\tan \delta' \sin(\alpha' - \Theta') - \tan \delta \sin(\alpha - \Theta')}, \\ M'' = \frac{\tan \delta' \sin(\Theta' - \Theta)}{\tan \delta' \sin(\alpha' - \Theta') - \tan \delta \sin(\alpha - \Theta')}, \end{cases}$$

on aura

$$(5) \quad \rho = \frac{[r' r'']}{[r' r']} M' \rho + \frac{[R' R']}{[R R']} M'' R.$$

Or on a trouvé

$$\begin{aligned} [r' r''] &= \rho \sqrt{p} \left\{ 1 - \frac{\theta^2}{6r'^2} + \frac{\theta^2}{4r'^3} \frac{dr'}{K dt} + \dots \right\}, \\ [r' r'] &= \rho' \sqrt{p} \left\{ 1 - \frac{\theta'^2}{6r'^2} + \frac{\theta'^2}{4r'^3} \frac{dr'}{K dt} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{[r' r'']}{[r' r']} = \frac{\theta}{\theta'} \left\{ 1 - \frac{\theta^2 - \theta'^2}{6r'^2} + \frac{\theta^2 + \theta'^2}{4r'^3} \frac{dr'}{K dt} + \dots \right\}.$$

On aurait, de même,

$$\frac{[R' R']}{[R R']} = \frac{\theta}{\theta'} \left\{ 1 - \frac{\theta^2 - \theta'^2}{6R^2} + \frac{\theta^2 + \theta'^2}{4R^3} \frac{dR'}{K dt} + \dots \right\}.$$

En remplaçant, dans les seconds membres, θ, θ' par leurs valeurs

$$\theta = K(\ell' - \ell'), \quad \theta' = K(\ell' - \ell),$$

on trouve

$$(6) \quad \begin{cases} \rho = \frac{\ell' - \ell'}{\ell' - \ell} M' \rho \left\{ 1 - \frac{K^2(\ell' - \ell)}{6r'^2} (\ell' + \ell - 2\ell') + \dots \right\} \\ + \frac{\ell' - \ell'}{\ell' - \ell} M'' R \frac{K^2}{6} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r'^2} \right) (\ell' - \ell) (\ell' + \ell - 2\ell'). \end{cases}$$

Pour calculer l'expression $\frac{K^2(\ell' - \ell)}{6r'^2} (\ell' + \ell - 2\ell')$, nous remarquons qu'en désignant par A le demi grand axe de l'orbite terrestre, par T la durée de l'année sidérale, on a

$$K^2 = 4\pi^2 \frac{A^3}{T^3}.$$

En portant cette valeur de K dans l'expression précédente, elle devient

$$\frac{K^2(\ell' - \ell)}{6r'^2} [\ell' - \ell' - (\ell' - \ell)] = \frac{2}{3} \pi^2 \frac{\ell' - \ell}{T} \left(\frac{\ell' - \ell'}{T} - \frac{\ell' - \ell}{T} \right).$$

Supposons, par exemple,

$$\frac{\ell' - \ell}{T} = \frac{1}{50}, \quad \ell' - \ell = 7 \text{ jours environ,}$$

et posons

$$\frac{\ell' - \ell'}{T} = \frac{h}{50}, \quad \frac{\ell' - \ell}{T} = \frac{h_1}{T}, \quad 0 < h < 1, \quad 0 < h_1 < 1, \quad h + h_1 = 1,$$

on aura

$$1 - K^2 \frac{\ell' - \ell}{6r'^2} (\ell' + \ell - 2\ell') = 1 - \frac{4\pi^2}{6} \left(\frac{R'}{r'} \right)^3 \frac{h - h_1}{(50)^2} = 1 - \frac{1}{375} \left(\frac{R'}{r'} \right)^3 (h - h_1).$$

Si r' n'est pas trop petit, on aura une bonne approximation en prenant

$$\rho = \frac{\ell' - \ell'}{\ell' - \ell} M' \rho.$$

En définitive, si l'on néglige le deuxième ordre et si l'on pose

$$(7) \quad M = \frac{t' - t}{t' - t} \frac{\tan \delta' \sin(\alpha - \theta') - \tan \delta \sin(\alpha' - \theta')}{\tan \delta' \sin(\alpha' - \theta) - \tan \delta \sin(\alpha - \theta)},$$

on aura

$$\rho' = M \rho.$$

Les termes négligés sont du troisième ordre quand les observations sont équidistantes, c'est-à-dire quand on a

$$t' = \frac{t + t''}{2}.$$

Remarque. — En se reportant à la formule (5) on voit que les transformations précédentes reviennent à remplacer le rapport des aires $\frac{[r'r'']}{[r'r']}$ par le rapport des temps correspondants $\frac{t' - t'}{t' - t}$.

Or les triangles $SM'M''$ et SMM' peuvent être considérés comme ayant même base SM' : le rapport de leurs aires est donc égal au rapport des hauteurs ou encore à $\frac{M''}{M}$.

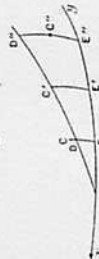
Les simplifications précédentes reviennent donc à admettre que

$$\frac{M''}{M} = \frac{t' - t'}{t' - t};$$

on a vu précédemment que cette égalité était vérifiée au deuxième ordre près dans le cas général et au troisième ordre près quand les observations étaient équidistantes.

Représentation géométrique du coefficient de $\frac{t' - t'}{t' - t}$ dans M. — Considérons une figure sphérique géocentrique. Soient C, C', C'' les trois positions de la comète,

Fig. 2.



S' la position du Soleil dans l'observation moyenne, xy le plan de l'écliptique; $CE, C'E, C'E''$ les arcs de grand cercle, perpendiculaires à l'écliptique, qui représentent les latitudes géocentriques, et enfin $S'C'$ le grand cercle qui passe par la position moyenne du Soleil et de la comète. On aura

$$\begin{aligned} S'E &= \alpha - \theta', & S'E' &= \alpha' \theta', & S'E'' &= \alpha'' - \theta''; \\ EC &= \delta, & E'C' &= \delta', & E'C'' &= \delta''. \end{aligned}$$

Posons encore

$$ED = \delta_1, \quad E'D' = \delta'_1; \quad E'S/C' = I.$$

On aura

$$\begin{aligned} \tan \delta' &= \sin(\alpha' - \theta') \tan I, \\ \tan \delta_1 &= \sin(\alpha - \theta') \tan I, \\ \tan \delta'_1 &= \sin(\alpha' - \theta') \tan I. \end{aligned}$$

En portant dans l'expression de M' et de M'' les valeurs de $\sin(\alpha - \theta')$ et de $\sin(\alpha' - \theta')$ tirées de ces équations, les formules (4) deviennent

$$(4') \quad \begin{cases} M' = \frac{\tan \delta_1 - \tan \delta}{\tan \delta' - \tan \delta'_1} = \frac{\sin(\delta_1 - \delta)}{\sin(\delta' - \delta'_1)} \frac{\cos \delta' \cos \delta'_1}{\cos \delta \cos \delta_1}, \\ M'' = \frac{\tan \delta'_1}{\sin(\alpha' - \theta')} \frac{\sin(\theta' - \theta)}{\tan \delta' - \tan \delta'_1}. \end{cases}$$

On voit que M' et, par suite, M ne sera positif que si l'on a

$$\delta > \delta_1 \quad \text{et} \quad \delta' > \delta'_1,$$

ou bien

$$\delta < \delta_1 \quad \text{et} \quad \delta' < \delta'_1.$$

Donc C' et C doivent être de part et d'autre du grand cercle $S'C$.

Cas d'exception. — Si l'on a $\delta_1 = \delta$ et $\delta'_1 = \delta'$, le mouvement apparent de la comète s'effectue sur le grand cercle SC , c'est-à-dire que les trois positions apparentes de la comète sont sur un arc de cercle passant par le Soleil. L'expression qui définit M' se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$ et celle qui définit M'' devient infinie. Les formules précédentes ne sont plus applicables. Nous nous proposons d'en établir d'autres.

A cet effet, revenons aux équations fondamentales (1). En retranchant α' de toutes les longitudes, la seconde des équations (1) devient

$$\begin{aligned} [r'r''] \rho \sin(\alpha - \alpha') - R \sin(\theta - \alpha') \{ \\ + [r'r''] R' \sin(\theta' - \alpha') + [r'r'] \rho^2 \sin(\alpha' - \alpha') - R' \sin(\theta'' - \alpha') \} = 0. \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \rho^2 = & \frac{[r'r''] \sin(\alpha' - \alpha)}{[r'r'] \sin(\alpha - \alpha')} \rho \\ & + \frac{[r'r''] R' \sin(\theta' - \alpha') - [r'r'] R' \sin(\theta'' - \alpha') + [r'r'] R' \sin(\theta' - \alpha')}{[r'r'] \sin(\alpha - \alpha')}, \end{aligned}$$

or on a

$$\begin{aligned}\frac{[r'r']}{[r'r']} &= \frac{\theta}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta^2 - \theta'^2}{6r'^2}\right), & \frac{[R'R']}{[R'R']} &= \frac{\theta}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta^2 - \theta'^2}{6R'^2}\right), \\ \frac{[r'r']}{[r'r']} &= \frac{\theta'}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta^2 - \theta'^2}{6r'^2}\right), & \frac{[R'R']}{[R'R']} &= \frac{\theta'}{\theta^2} \left(1 - \frac{\theta^2 - \theta'^2}{6R'^2}\right).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{[r'r']}{[r'r']} &= \frac{[R'R']}{[R'R']} \left[1 + \frac{\theta^2 - \theta'^2}{6} \left(\frac{1}{R'^2} - \frac{1}{r'^2}\right)\right], \\ \frac{[r'r']}{[r'r']} &= \frac{[R'R']}{[R'R']} \left[1 + \frac{\theta'^2 - \theta^2}{6} \left(\frac{1}{R'^2} - \frac{1}{r'^2}\right)\right],\end{aligned}$$

et en posant

$$R \sin(\theta - \alpha') = Y, \quad R' \sin(\theta' - \alpha') = Y', \quad R' \sin(\theta' - \alpha') = Y'',$$

il vient

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \rho \frac{r' - r'}{r' - r'} \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha)} \left(1 + \frac{\theta'^2 - \theta^2}{6r'^2}\right) \\ &+ \frac{[R'R']Y \left[1 + \frac{\theta^2 - \theta'^2}{6} \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{R'^2}\right)\right] - [R'R']Y' \left\{1 + \frac{\theta'^2 - \theta^2}{6} \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{R'^2}\right)\right\} + [R'R']Y''}{[R'R'] \sin(\alpha' - \alpha')}.\end{aligned}$$

On simplifie l'expression de ρ^2 en remarquant que, les trois positions de la planète étant dans un même plan, on a

$$[R'R']Y - [R'R']Y' + [R'R']Y'' = 0;$$

d'autre part, on peut, dans les termes restants, négliger les différences $R' - R$ et $\theta' - \theta$, ou faire $Y = Y'$, et enfin

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{R'^2}\right) \frac{[R'R']}{[R'R']} (\theta'^2 - \theta^2) &- \frac{[R'R']}{[R'R']} (\theta'^2 - \theta^2) \left\{R' \sin(\theta' - \alpha')\right. \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{R'^2}\right) \left\{\frac{\theta}{\theta^2} (\theta'^2 - \theta^2) - \frac{\theta'}{\theta^2} (\theta'^2 - \theta^2)\right\} R' \sin(\theta' - \alpha') \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{R'^2}\right) \frac{\theta \theta'}{R'} \sin(\theta' - \alpha');\end{aligned}$$

on trouve

$$\rho^2 = \frac{r' - r'}{r' - r'} \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha)} \rho \left(1 - \frac{\theta - \theta'}{6r'^2}\right) + \frac{1}{2} \frac{\theta \theta'}{R'} R' \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{R'^2}\right) \frac{\sin(\theta' - \alpha')}{\sin(\alpha' - \alpha')}.$$

Le terme $\frac{\theta \theta'}{\sin(\alpha' - \alpha')}$ est du premier ordre; en négligeant les termes du

deuxième ordre, on trouve donc

$$\rho^2 = \frac{r' - r'}{r' - r'} \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha)} \rho + \frac{1}{2} \frac{\theta \theta'}{R'} \frac{\sin(\theta' - \alpha')}{\sin(\alpha' - \alpha')} R' \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{R'^2}\right).$$

Pour obtenir une valeur approchée du rapport $\frac{\rho^2}{\rho}$, on négligera la seconde partie du deuxième membre. En posant

$$(7') \quad M_1 = \frac{r' - r'}{r' - r'} \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha')}$$

on aura

$$\rho^2 = M_1 \rho,$$

mais la valeur ainsi obtenue pour $\frac{\rho^2}{\rho}$ ne sera pas aussi approchée que dans le cas général.

Autre cas d'exception. — Les formules précédentes donnent de mauvais résultats quand les différences $\alpha' - \alpha$ et $\alpha'' - \alpha'$ sont très petites, c'est-à-dire quand la longitude de la comète varie lentement.

Pour ne pas introduire les différences $\alpha' - \alpha$ et $\alpha'' - \alpha'$, en éliminant ρ' entre les équations (1), on retranche θ' des longitudes au lieu d'en retrancher α' . On trouve ainsi

$$\begin{aligned}[r'r'] \rho \cos(\alpha - \theta') - R \cos(\theta - \theta') \{ \\ + [r'r'] \rho^2 \cos(\alpha'' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta') \} = [r'r'] \rho' \cos(\alpha' - \theta') - R' \rho',\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\rho' &= \frac{[r'r'] \rho \cos(\alpha - \theta') - R \cos(\theta - \theta') - \frac{[r'r'] \rho^2 \cos(\alpha'' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')}{[r'r'] \rho \cos(\alpha' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')}}{[r'r'] \rho \cos(\alpha' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')} \\ &- \frac{[r'r'] \rho \cos(\alpha - \theta') - R \cos(\theta - \theta')}{[r'r'] \rho \cos(\alpha' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')}.\end{aligned}$$

et en faisant les mêmes transformations que dans le cas précédent, on arrive aisément à la formule suivante :

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \frac{r' - r'}{r' - r'} \frac{\rho \cos(\alpha - \theta') - R \cos(\theta - \theta') - \frac{[r'r'] \rho^2 \cos(\alpha'' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')}{[r'r'] \rho \cos(\alpha' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')}}{[r'r'] \rho \cos(\alpha' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')} \\ &- \frac{1}{2} \frac{\theta \theta'}{R'} \frac{R' \cos(\alpha' - \theta') - R \cos(\theta - \theta')}{[r'r'] \rho \cos(\alpha' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')} \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{R'^2}\right).\end{aligned}$$

On prendra pour $\frac{\rho^2}{\rho}$ la valeur

$$(7'') \quad M_2 = \frac{r' - r'}{r' - r'} \frac{\rho \cos(\alpha - \theta') - R \cos(\theta - \theta') - \frac{[r'r'] \rho^2 \cos(\alpha'' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')}{[r'r'] \rho \cos(\alpha' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')}}{[r'r'] \rho \cos(\alpha' - \theta') - R' \cos(\theta' - \theta')}.$$

8. Méthode d'Olbers pour la détermination des orbites paraboliques. — Soient t et t' les temps de deux observations d'une comète; α, α' ses longitudes; δ, δ' ses latitudes; soient, de même, Θ, Θ' les longitudes correspondantes du Soleil; R, R' ses distances à la Terre.

Les coordonnées de la comète sont données par les observations, celles du Soleil par la *Connaissance des Temps* ou d'autres éphémérides.

Nous désignerons encore par ρ et ρ' les distances accrourcies de la comète à la Terre et nous supposons qu'on a calculé, par une des formules précédentes, la valeur M du rapport $\frac{\rho'}{\rho}$, avec les données fournies par une troisième observation.

Les coordonnées héliocentriques x, y, z, x', y', z' de la comète aux temps t et t' sont données par les formules suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \alpha - R \cos \Theta, & x' = M \rho \cos \alpha' - R' \cos \Theta', \\ y = \rho \sin \alpha - R \sin \Theta, & y' = M \rho \sin \alpha' - R' \sin \Theta', \\ z = \rho \tan \delta; & z' = M \rho \tan \delta'. \end{cases}$$

Les distances r, r' de la comète au Soleil, aux temps t et t' , sont

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

La corde qui joint les deux positions de l'astre est donnée par l'équation

$$s^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

En exprimant r, r' et s à l'aide des données des observations et de ρ , on a

$$(2) \quad \begin{cases} r^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2 \delta} - 2\rho R \cos(\alpha - \Theta) + R^2, \\ r'^2 = \frac{M^2 \rho^2}{\cos^2 \delta'} - 2\rho M R \cos(\alpha' - \Theta') + R'^2, \\ s^2 = r^2 + r'^2 - 2RR' \cos(\Theta' - \Theta) + 2\rho R' \cos(\alpha - \Theta') \\ \quad + 2M\rho R \cos(\alpha' - \Theta) - 2M\rho^2 \cos(\alpha' - \alpha) - 2M\rho^2 \tan \delta \tan \delta'. \end{cases}$$

Enfin le théorème d'Euler nous donne l'équation

$$(3) \quad (r + r' + s)^2 - (r + r' - s)^2 = 6K(t' - t) = \frac{t'^2 - t^2}{m}; \quad \log m = 0,9862673.$$

On a ainsi quatre équations à quatre inconnues r, r', s et ρ .

La résolution rigoureuse en est impossible. On peut procéder par tâtonnement de la suivante :

On fait $\rho = 1$ et l'on en déduit les valeurs de r, r', s par les formules (2); on

cherche ensuite par la relation (3) la valeur correspondante de $t' - t$. On trouve généralement qu'elle est différente de celle qui correspond aux observations. On donne ensuite à ρ une suite de valeurs peu différentes, à partir de l'unité, et dont l'ordre de grandeur est déterminé de façon qu'on obtienne par les formules (2) et (3) des valeurs de plus en plus exactes de $t' - t$.

Ces valeurs de ρ sont de plus en plus approchées de la valeur exacte; mais les calculs sont pénibles.

9. Il est préférable de se servir des transformations de Gauss.

Des équations (1) on déduit

$$\begin{cases} x'' - x = \rho(M \cos \alpha' - \cos \alpha) - R' \cos \Theta' + R \cos \Theta, \\ y'' - y = \rho(M \sin \alpha' - \sin \alpha) - R' \sin \Theta' + R \sin \Theta, \\ z'' - z = \rho(M \tan \delta' - \tan \delta). \end{cases}$$

On pose ensuite

$$\begin{aligned} R' \cos \Theta' - R \cos \Theta &= g \cos G, \\ R' \sin \Theta' - R \sin \Theta &= g \sin G; \quad g > 0. \end{aligned}$$

En retranchant Θ des longitudes, ces formules deviennent

$$\begin{aligned} R' \cos(\Theta' - \Theta) - R &= g \cos(G - \Theta), \\ R' \sin(\Theta' - \Theta) &= g \sin(G - \Theta); \end{aligned}$$

g étant assujéti à la condition d'être positif, les équations précédentes déterminent sans ambiguïté g et G . On a ensuite

$$\begin{cases} x'' - x = \rho(M \cos \alpha' - \cos \alpha) - g \cos G, \\ y'' - y = \rho(M \sin \alpha' - \sin \alpha) - g \sin G, \\ z'' - z = \rho(M \tan \delta' - \tan \delta). \end{cases}$$

On pose encore

$$\begin{cases} M \cos \alpha' - \cos \alpha = h \cos \zeta \cos H, \\ M \sin \alpha' - \sin \alpha = h \cos \zeta \sin H, \\ M \tan \delta' - \tan \delta = h \sin \zeta. \end{cases}$$

Avec les conditions $h > 0$; $-90^\circ < \zeta < 90^\circ$, ces équations déterminent sans ambiguïté h, ζ, H .

Pour les calculs, il est plus commode de se servir des formules suivantes que l'on obtient en retranchant α' des longitudes

$$\begin{cases} h \cos \zeta \cos(H - \alpha') = M - \cos(\alpha' - \alpha), \\ h \cos \zeta \sin(H - \alpha') = M \sin(\alpha' - \alpha), \\ h \sin \zeta = M \tan \delta' - \tan \delta, \end{cases}$$

Ces transformations conduisent aux formules

$$\begin{cases} x' - x = h\rho \cos \zeta \cos H - g \cos G, \\ y' - y = h\rho \cos \zeta \sin H - g \sin G, \\ z' - z = h\rho \sin \zeta. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} s^2 = h^2 \rho^2 - 2gh\rho \cos \zeta \cos(H - H) + g^2, \\ r^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2 \delta} - 2\rho R \cos(\alpha - \Theta) + R^2, \\ r'^2 = \frac{M^2 \rho^2}{\cos^2 \delta'} - 2M\rho R' \cos(\alpha' - \Theta') + R'^2. \end{cases}$$

Considérons une figure sphérique géocentrique, le plan de l'écliptique étant pris pour plan des xy .

Solent S la position du Soleil, C celle de la comète, à un instant donné. Menons l'arc CE perpendiculaire à l'écliptique, nous formerons ainsi un triangle dans

Fig. 3.



lequel CE représentera la latitude δ de la comète et SE la différence des longitudes géocentriques de l'astéroïde et du Soleil.

En désignant par ψ l'arc SC et par P l'angle ESC , on a

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \cos \delta \cos(\alpha - \Theta); & \sin \psi \sin P &= \sin \delta, \\ \cos P &= \cot \psi \tan(\alpha - \Theta), \\ \cos P \sin \psi &= \frac{\cos \psi}{\cos(\alpha - \Theta)} \sin(\alpha - \Theta) = \cos \delta \sin(\alpha - \Theta). \end{aligned}$$

On aura des formules analogues en considérant les positions de la comète et du Soleil au temps t' .

Les angles ψ et ψ' sont déterminés sans ambiguïté par les équations

$$\begin{cases} \cos \psi = \cos \delta \cos(\alpha - \Theta), & \cos \psi' = \cos \delta' \cos(\alpha' - \Theta'), \\ \sin \psi \cos P = \cos \delta \sin(\alpha - \Theta), & \sin \psi' \cos P' = \cos \delta' \sin(\alpha' - \Theta'), \\ \sin \psi \sin P = \sin \delta, & \sin \psi' \sin P' = \sin \delta'. \end{cases}$$

Gauss pose encore

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \zeta \cos(G - H), \\ \sin \varphi \sin w &= \cos \zeta \sin(G - H), \\ \sin \varphi \sin w &= \sin \zeta; \end{aligned}$$

φ étant assujéti à la condition d'être compris entre 0° et 180° , ces relations déterminent sans ambiguïté φ et w .

En portant dans les expressions de s , r , r' les valeurs de $\cos(\alpha - \Theta)$, $\cos(\alpha' - \Theta')$ et de $\cos(G - H)$ fournies par les équations précédentes, il vient

$$\begin{aligned} s^2 &= h^2 \rho^2 - 2gh\rho \cos \varphi + g^2 = (h\rho - g \cos \varphi)^2 + g^2 \sin^2 \varphi, \\ r^2 &= \frac{\rho^2}{\cos^2 \delta} - 2\rho R \frac{\cos \psi}{\cos \delta} + R^2 = \left(\frac{\rho}{\cos \delta} - R \cos \psi \right)^2 + R^2 \sin^2 \psi, \\ r'^2 &= \frac{M^2 \rho^2}{\cos^2 \delta'} - 2M\rho R' \frac{\cos \psi'}{\cos \delta'} + R'^2 = \left(\frac{M\rho}{\cos \delta'} - R' \cos \psi' \right)^2 + R'^2 \sin^2 \psi'. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} A &= g \sin \varphi, & B &= R \sin \psi, & B' &= R' \sin \psi', \\ \rho h - g \cos \varphi &= u, \end{aligned}$$

les formules précédentes deviennent

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{u^2 + A^2}, \\ r &= \sqrt{\left(\frac{u + g \cos \varphi - hR \cos \delta \cos \psi}{h \cos \delta} \right)^2 + B^2}, \\ r' &= \sqrt{\left(\frac{Mu + M'g \cos \varphi - hR' \cos \delta' \cos \psi'}{h \cos \delta'} \right)^2 + B'^2}; \end{aligned}$$

et enfin, si l'on pose

$$\begin{aligned} h \cos \delta &= b, & \frac{h \cos \delta'}{M} &= b', \\ g \cos \varphi - bR \cos \psi &= c, & g \cos \varphi - b'R' \cos \psi' &= c', \end{aligned}$$

on a, pour déterminer r , r' , s et u , les quatre équations :

$$\begin{cases} s = \sqrt{u^2 + A^2}, \\ r = \sqrt{\left(\frac{u + c}{b} \right)^2 + B^2}, \\ r' = \sqrt{\left(\frac{u + c'}{b'} \right)^2 + B'^2}, \\ (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} - (r + r' - s)^{\frac{3}{2}} = \frac{b' - b}{m}. \end{cases}$$

T. — P.

4.

10. Simplification d'Encke pour la résolution des équations précédentes.

— En posant

$$H = r + r'',$$

on a, pour déterminer s , H et u , les trois équations :

$$s = \sqrt{u^2 + A^2}, \quad H = \sqrt{\left(\frac{u+c}{b}\right)^2 + B^2} + \sqrt{\left(\frac{u+c^2}{b^2}\right)^2 + B'^2},$$

$$6K(\ell'' - \ell) = (H + s)^{\frac{3}{2}} - (H - s)^{\frac{3}{2}}.$$

Encke introduit des quantités μ et η définies par les relations

$$s = \frac{2\theta'}{H^{\frac{3}{2}}} \times \mu, \quad \eta = \frac{2\theta'}{H^{\frac{3}{2}}};$$

l'équation d'Euler devient

$$3\eta = (1 + \mu\eta)^{\frac{3}{2}} - (1 - \mu\eta)^{\frac{3}{2}}.$$

En se reportant aux expressions de μ et de η , on voit que

$$\mu\eta = \frac{s}{r + r''} < 1.$$

On peut donc développer $(1 + \mu\eta)^{\frac{3}{2}}$ et $(1 - \mu\eta)^{\frac{3}{2}}$ suivant les puissances de $\mu\eta$, et écrire

$$3\eta = 1 + \frac{3}{2}\eta\mu + \frac{3}{8}\eta^2\mu^2 - \frac{1}{16}\mu^2\eta^3 + \frac{3}{128}\mu^4\eta^4 - \frac{3}{256}\mu^5\eta^5 + \dots \\ - \left(1 - \frac{3}{2}\eta\mu + \frac{3}{8}\eta^2\mu^2 - \frac{1}{16}\mu^2\eta^3 + \frac{3}{128}\mu^4\eta^4 - \frac{3}{256}\mu^5\eta^5 + \dots\right)$$

ou

$$1 = \mu - \frac{1}{24}\mu^2\eta^2 - \frac{1}{128}\mu^4\eta^4 - \dots;$$

et, en développant μ suivant les puissances de η , il viendra

$$\mu = 1 + a_1\eta^2 + a_2\eta^4 + a_3\eta^6 + \dots$$

On a construit des Tables donnant les valeurs de $\log \mu$ avec l'argument η . Dans le *Traité des orbites* d'Oppolzer, ces Tables portent le n° VII; elles font connaître avec sept décimales les valeurs de $\log \mu$ pour les valeurs de η comprises entre 0 et 0,8.

Dans les premières déterminations d'orbites, il est rare que cette limite soit dépassée. S'il en était ainsi, on calculerait directement la valeur μ par l'équation d'Euler, transformée comme il suit :

On pose

$$\frac{s}{r + r''} = \sin r_1, \quad 0 < r_1 < 90^\circ,$$

On a

$$\frac{6K\ell}{(r + r'')^{\frac{3}{2}}} = (1 + \sin r_1)^{\frac{3}{2}} - (1 - \sin r_1)^{\frac{3}{2}} \\ = \left(\cos \frac{r_1}{2} + \sin \frac{r_1}{2}\right)^3 - \left(\cos \frac{r_1}{2} - \sin \frac{r_1}{2}\right)^3 \\ = 6 \sin \frac{r_1}{2} - 4 \sin^3 \frac{r_1}{2},$$

$$\frac{6K(\ell'' - \ell)}{2^{\frac{3}{2}}(r + r'')^{\frac{3}{2}}} = \frac{3 \sin \frac{r_1}{2}}{\sqrt{2}} - 4 \left(\frac{\sin \frac{r_1}{2}}{\sqrt{2}}\right)^3,$$

et en posant

$$\frac{\sin \frac{r_1}{2}}{\sqrt{2}} = \sin \alpha, \quad \frac{6K(\ell'' - \ell)}{(2r + 2r'')^{\frac{3}{2}}} = \sin \lambda,$$

on aura

$$\sin \lambda = \sin 3\alpha.$$

En ne considérant que les valeurs de λ et de α comprises entre 0° et 90° , on a

$$\sin \frac{r_1}{2} = \sqrt{2} \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \frac{\lambda}{3}, \quad s = (r + r'')^{\frac{2}{3}} \sin \frac{r_1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{r_1}{2}}.$$

Connaissant une valeur approchée de $r + r''$, on pourra donc, par les formules précédentes, obtenir la valeur correspondante de s .

Dans le cas général, on se servira des Tables d'Oppolzer et l'on procédera par approximations successives.

On prendra d'abord :

Première approximation :

$$H_0 = (r + r'')e = a, \quad \mu_0 = 1, \quad s_0 = \frac{2\theta'}{\sqrt{2}}, \quad u_0 = \sqrt{s_0^2 - A^2}.$$

Avec cette valeur de u , on calculera une valeur plus approchée de H .

Deuxième approximation :

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{u_0 + c}{b}\right)^2 + B^2} + \sqrt{\left(\frac{u_0 + c^2}{b^2}\right)^2 + B'^2}, \quad \eta_1 = \frac{2\theta'}{\sqrt{H_1^3}}.$$

les Tables VII d'Oppolzer donneront $\log \mu_1$:

$$s_1 = \frac{2\theta' \mu_1}{\sqrt{H_1}}, \quad a_1 = \sqrt{s_1^2 - A^2}.$$

Troisième approximation :

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{u_1 + c}{b}\right)^2 + B^2} + \sqrt{\left(\frac{u_1 + c}{b'}\right)^2 + B'^2}, \quad \eta_1 = \frac{2\theta'}{\sqrt{H_2}},$$

les Tables VII donneront $\log \mu_2$:

$$s_2 = \frac{2\theta' \mu_2}{\sqrt{H_2}}, \quad u_2 = \sqrt{s_2^2 - A^2}.$$

On continuera de la même façon jusqu'à ce que deux approximations successives donnent pour u des valeurs suffisamment voisines.

Après trois approximations, on peut simplifier les calculs par la remarque suivante qui est applicable à tous les calculs du même genre.

Désignons par λ une fonction quelconque de $r + r'$; par exemple $\log(r + r')$. Les approximations successives donnent

$$\lambda_1 = f(\lambda_0), \quad \lambda_2 = f(\lambda_1), \quad \dots, \quad \lambda_n = f(\lambda_{n-1}), \quad \dots$$

et, en désignant par λ la valeur exacte, on devra avoir

$$\lambda = f(\lambda).$$

Posons

$$\lambda_1 = \lambda - a_1, \quad \lambda_2 = \lambda - a_2, \quad \lambda_3 = \lambda - a_3.$$

On aura

$$\begin{aligned} \lambda - a_2 &= f(\lambda - a_1) = f(\lambda) - a_1 f'_1 + \dots \\ \lambda - a_3 &= f(\lambda - a_2) = f(\lambda) - a_2 f'_2 + \dots \end{aligned}$$

En considérant a_1, a_2, a_3 comme des quantités du premier ordre et en négligeant le deuxième ordre, on a

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 f'_1, & a_3 &= a_2 f'_2, \\ a'_2 &= a_1 a_3. \end{aligned}$$

En remplaçant, dans cette égalité, a_1, a_2, a_3 par $\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \lambda - \lambda_3$, il vient

$$(\lambda - \lambda_2)' = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3),$$

d'où

$$\lambda - \lambda_2 = - \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)^2}{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3}.$$

Dans les calculs numériques, il sera commode d'introduire les différences des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Avec les notations habituelles, la formule précédente deviendra

$$\lambda = \lambda_3 - \frac{(\Delta \lambda_2)^2}{\Delta^2 \lambda_1}.$$

Remarque. — Dans la méthode d'Encke, la valeur de ρ est donnée par les formules

$$s^2 = u^2 + A^2, \quad u = \rho h - g \cos \varphi = \sqrt{s^2 - A^2}.$$

Il reste à déterminer le signe que l'on doit prendre devant le radical.

Or on a

$$s^2 = h^2 \rho^2 - 2h\rho g \cos \varphi + g^2, \quad s^2 - g^2 = h\rho(h\rho - 2g \cos \varphi).$$

Si $s > g$, on aura aussi

$$h\rho - 2g \cos \varphi > 0,$$

il faudra prendre le signe + devant le radical.

Si $s < g$, la formule précédente ne détermine plus le signe de u . Mais des définitions de ces quantités, il résulte que s est la corde qui joint les positions de la comète aux temps t et t' , et que g est la grandeur correspondante dans le mouvement du Soleil. L'intervalle $t' - t$ étant considéré comme du premier ordre, l'hypothèse $s < g$ revient à

$$\begin{aligned} \text{arc } MM' &< \text{arc } SS', \\ \frac{\text{arc } MM'}{t' - t} &< \frac{\text{arc } SS'}{t' - t}. \end{aligned}$$

Soient v' et v'' les vitesses de la comète et du Soleil au temps t' compris entre t et t' ; l'intervalle $t' - t$ étant considéré comme petit, v' et v'' sont dans le même ordre de grandeur que les vitesses moyennes.

De sorte que, si l'on avait $s < g$, on aurait aussi $v' < v''$; et en négligeant l'excentricité du Soleil,

$$v'^2 = \frac{2K^2}{r'^2}, \quad v''^2 = \frac{K^2}{R^2};$$

done on aurait

$$r' > 2R.$$

Mais on n'observe généralement pas les comètes à une aussi grande distance. On prendra donc toujours le signe + devant le radical

$$\rho = \frac{g \cos \varphi + \sqrt{s^2 - A^2}}{h}.$$

11. Calcul des lieux héliocentriques. — Soient l, l', l'' les longitudes héliocentriques; b, b', b'' les latitudes; r, r', r'' les rayons vecteurs, aux temps t, t', t'' . On a

$$\begin{aligned} r \cos b \cos l &= \rho \cos \alpha - R \cos \theta, \\ r \cos b \sin l &= \rho \sin \alpha - R \sin \theta, \\ r \sin b &= \rho \tan \delta. \end{aligned}$$

En retranchant θ de toutes les longitudes, les formules précédentes deviennent

$$\begin{aligned} r \cos b \cos(l - \theta) &= \rho \cos(\alpha - \theta) - R, \\ r \cos b \sin(l - \theta) &= \rho \sin(\alpha - \theta), \\ r \sin b &= \rho \tan \delta; \end{aligned}$$

on a de même

$$\begin{aligned} r' \cos b' \cos(l' - \theta') &= \rho' \cos(\alpha' - \theta') - R', \\ r' \cos b' \sin(l' - \theta') &= \rho' \sin(\alpha' - \theta'), \\ r' \sin b' &= \rho' \tan \delta'; \end{aligned}$$

ρ et ρ' sont déterminés par les formules

$$\rho = \frac{u + \frac{g}{h} \cos \varphi}{h}, \quad \rho' = M \rho.$$

Les équations précédentes font donc connaître $\log r, \log r', l, l', \log \tan b, \log \tan b'$.

PREMIÈRE VÉRIFICATION. — Les valeurs de $\log r$ et de $\log r'$ trouvées par ces formules devront coïncider avec celles qui ont été obtenues par les formules du n° 9. On s'assurera ainsi de l'exactitude des calculs qui auront été faits pour déterminer B, B', b, b', c et c' .

Calcul de Ω et i . — On a déterminé l et l' . Si $l' > l$, le mouvement est direct ($i < 90^\circ, \tan i > 0$); si $l' < l$, le mouvement est rétrograde ($i > 90^\circ, \tan i < 0$). Soient xy le plan de l'écliptique, N le nœud ascendant de l'orbite de la comète,

Fig. 4.



NM'' le plan de l'orbite, MP et $M''P$ des arcs de grand cercle perpendiculaires sur le plan des xy .

Dans les triangles NMP et $NM''P''$, on a

$$\begin{aligned} \tan b &= \sin(l - \Omega) \tan i, \\ \tan b' &= \sin(l' - \Omega) \tan i. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que ces formules sont encore vraies quand i est obtus. On peut écrire

$$\begin{aligned} \tan b &= \tan i \sin(l - \Omega + l' - l) \\ &= \tan i \sin(l - \Omega) \cos(l' - l) + \tan i \cos(l - \Omega) \sin(l' - l). \end{aligned}$$

On tire

$$\begin{aligned} \sin(l - \Omega) \tan i &= \tan b, \\ \cos(l - \Omega) \tan i &= \frac{\tan b' - \tan b \cos(l' - l)}{\sin(l' - l)}. \end{aligned}$$

Le signe de $\tan i$ étant connu, on a sans ambiguïté i et Ω .

Calcul de u et u' arguments de latitude. — Dans les triangles précédents, on a

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \tan u &= \frac{\tan(l - \Omega)}{\cos i}, & \tan u' &= \frac{\tan(l' - \Omega)}{\cos i}; \\ (\beta) \quad \tan u &= \frac{\tan b}{\sin i \cos(l - \Omega)}, & \tan u' &= \frac{\tan b'}{\sin i \cos(l' - \Omega)}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sin b = \sin u \sin i, \quad \sin b' = \sin u' \sin i.$$

Ces dernières formules font connaître les signes de $\sin u$ et de $\sin u'$. Les valeurs de $\tan u$, de $\tan u'$ déterminent donc u et u' sans ambiguïté.

On emploiera les formules (α) quand i sera moindre que 45° et les formules β quand i sera supérieur à 45° .

DEUXIÈME VÉRIFICATION. — Considérons le triangle SMM'' formé par le Soleil et

Fig. 5.



les deux positions de la comète, et désignons son périmètre par 2Σ . On sait que l'on a

$$\sin \frac{u'' - u}{2} = \sqrt{\frac{(\Sigma - r)(\Sigma - r')}{r \cdot r'}}.$$

Cette formule permet de vérifier les valeurs de u et de u' .
T. — P.

Calcul de q et de π . — Soient w et w' les anomalies vraies, p le paramètre, q la distance périhélie. On a

$$r = \frac{p}{1 + \cos w}, \quad r' = \frac{p}{1 + \cos w'},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} w}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad \frac{\cos \frac{1}{2} w'}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r'}}.$$

Or

$$w' = w + u' - u.$$

Donc

$$\frac{\cos \frac{1}{2} w \cos \frac{1}{2} (u' - u) - \sin \frac{1}{2} w \sin \frac{1}{2} (u' - u)}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r'}}.$$

On en tire

$$\left| \frac{\sin \frac{1}{2} u'}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r}} \cot \frac{u' - u}{2} - \frac{1}{\sqrt{r'}} \cos \frac{u' - u}{2}, \right.$$

$$\left. \frac{\cos \frac{1}{2} u'}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\sqrt{r}}. \right.$$

Ces formules déterminent sans ambiguïté q et w . On a ensuite

$$\omega = \Omega + u - w' = \Omega + u' - w'.$$

Calcul du temps T du passage au périhélie. — On se sert, pour cela, de l'équation

$$\tan \frac{w'}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{w'}{2} = \frac{K(t - T)}{\sqrt{2} q^{\frac{3}{2}}}.$$

En posant

$$M = \frac{\sqrt{2}}{K} \left(\tan \frac{w'}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{w'}{2} \right),$$

on a

$$M = \frac{t - T}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Les Tables IV d'Oppolzer dont nous avons déjà parlé au n° 3 font connaître les valeurs de M avec l'argument w . Le temps T du passage au périhélie est ensuite donné par la formule

$$T = t - M q^{\frac{3}{2}} = t' - M' q^{\frac{3}{2}}.$$

THOISIÈME VÉRIFICATION. — *Calcul du lieu moyen.* — T , t' et q étant connus, on détermine la valeur M' pour le temps t' par la formule

$$T = t' - M' q^{\frac{3}{2}}.$$

Les Tables IV font ensuite connaître w' , et l'on a

$$r' = \frac{q}{\cos^2 \frac{w'}{2}}, \quad u' = w' + \omega - \Omega.$$

Nous allons établir des formules permettant de calculer la longitude et la latitude géocentriques de la comète au temps t' , à l'aide des éléments de r' et de u' .

Considérons un système d'axes rectangulaires héliocentriques, le plan des xy étant le plan de l'écliptique et l'axe des x passant par le nœud ascendant de l'orbite. Soient, au temps t' , S le centre de gravité du Soleil, T celui de la Terre et M' la comète.

En projetant sur chacun des axes les côtés de ce triangle et en écrivant que

$$\text{Projection } TM' = \text{Projection } TS + \text{Projection } SM',$$

on trouve

$$p' \cos(\alpha' - \Omega) = r' \cos u' + R' \cos(\theta' - \Omega),$$

$$p' \sin(\alpha' - \Omega) = r' \sin u' \cos i + R' \sin(\theta' - \Omega),$$

$$p' \tan \delta' = r' \sin u' \sin i.$$

Les valeurs de α' et δ' calculées par ces formules doivent coïncider avec les données de l'observation. Si les calculs sont exacts et si les valeurs calculées α'_c et δ'_c diffèrent sensiblement des valeurs observées α'_o et δ'_o , l'orbite n'est pas une parabole, la comète est périodique. On s'en assure en essayant les mêmes vérifications avec d'autres observations.

Remarque. — Dans la méthode d'Olbers on n'emploie l'observation intermédiaire que dans le calcul de la valeur M du rapport $\frac{p'}{p}$.

$$M = \frac{t' - t}{t' - t} \frac{\tan \delta' \sin(\alpha' - \theta') - \tan \delta \sin(\alpha' - \theta')}{\tan \delta' \sin(\alpha' - \theta') - \tan \delta \sin(\alpha' - \theta')}.$$

Or, on peut écrire cette expression

$$M = \frac{t' - t}{t' - t} \frac{\frac{\tan \delta'}{\sin(\alpha' - \theta')} \sin(\alpha' - \theta') - \tan \delta}{\frac{\tan \delta'}{\sin(\alpha' - \theta')} \sin(\alpha' - \theta') - \tan \delta}.$$

α' et δ' n'y entrent que par la quantité $\frac{\tan \delta'}{\sin(\alpha' - \theta')}$.

Quelle que soit la nature de l'orbite, si les calculs sont exacts, la valeur de $\frac{p'}{p}$ déduite des éléments trouvés sera égale à la valeur de M qui a servi à les obtenir;

et, pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'expression $\frac{\tan \delta'}{\sin(\alpha' - \theta')}$ prenne la même valeur quand on y donne à δ' et α' les valeurs observées ou les valeurs calculées. En désignant les coordonnées observées au temps t' par α'_o , δ'_o , et les coordonnées calculées pour la même époque par α'_c , δ'_c , on doit avoir

$$(a) \quad \frac{\tan \delta'_o}{\sin(\alpha'_o - \theta')} = \frac{\tan \delta'_c}{\sin(\alpha'_c - \theta')}.$$

La signification géométrique de l'expression considérée permet de transformer avantageusement cette formule.

Fig. 6.



Soit xy le plan de l'écliptique; P'_o et P'_c les positions observées et calculées au temps t' ; S' la position du Soleil.

Abaïssons $P'_o Q$ perpendiculaire sur xy et P'_c perpendiculaire sur $P'_o Q$, et désignons par J l'angle $S' P'_o Q$.

Dans le triangle $S' P'_o Q$, on a

$$\cot J = \frac{\tan \delta'_o}{\sin(\alpha'_o - \theta')},$$

et l'égalité (a) exprime que le point P'_c se trouve sur l'arc $S' P'_o$.

Or, dans le triangle $P'_c P'_o H$ on a

$$HP'_c = (\alpha'_o - \alpha'_c) \cos \delta'_o, \quad HP'_c = \delta'_o - \delta'_c.$$

$$\cot J = \frac{P'_o H}{P'_c H}.$$

Donc la formule (a) peut s'écrire

$$(a') \quad \frac{\sin \delta'_o}{\tan(\alpha'_o - \theta')} = \frac{\delta'_o - \delta'_c}{(\alpha'_o - \alpha'_c) \cos \delta'_o}.$$

Cette formule est indépendante de l'hypothèse faite sur la nature de l'orbite; elle contient des quantités α'_o et δ'_o qui dépendent de tous les éléments. Elle fournit donc un excellent contrôle des calculs.

12. Résumé des formules pour la détermination d'une orbite parabolique, avec trois observations, par la méthode d'Olbers.

PREMIÈRE PARTIE. — *Préparation des observations :*

(I). On convertit les temps moyens des observations en temps moyens de Paris. (*Voir* à ce sujet les indications de la *Connaissance des Temps*).

(II). On exprime les mois, les heures, les minutes et les secondes en jours moyens et fractions décimales de jour moyen. On néglige seulement la 6^e décimale. (Tables XIV de la *Connaissance des Temps*.)

(III). On transforme les ascensions droites en degrés, minutes et secondes d'arc. (Tables VII de la *Connaissance des Temps*.)

(IV). On rapporte les ascensions droites et les déclinaisons à l'équinoxe moyen de janvier 0 de l'année.

Les corrections sont données, en secondes d'arc, par les formules suivantes :
Pour les ascensions droites

$$- [f + g \sin(\zeta + \Delta) \tan \Theta + h \sin(H + \Delta) \sec \Theta + f' + g' \sin(\zeta' + \Delta') \tan \Theta].$$

Pour les déclinaisons

$$- [g \cos(\zeta + \Delta) + h \cos(\zeta' + \Delta') \sin \Theta + i \cos \Theta + g' \cos(\zeta' + \Delta')].$$

Les coefficients $f, g, \dots, h, i$ sont donnés dans la *Connaissance des Temps*.

Il suffit, en général, de prendre les deux premiers termes de la correction des Δ et le premier de la correction des Θ .

(V). On transforme les ascensions droites et les déclinaisons en longitudes, $\alpha, \alpha', \alpha''$ et en latitudes $\delta, \delta', \delta''$, par les formules

$$\begin{aligned} \tan N &= \frac{\tan \delta}{\sin \Delta}, \\ \tan \alpha &= \frac{\cos(N - \epsilon)}{\cos N} \tan \Delta, \quad \cos \alpha \cos \Delta > 0, \\ \tan \delta &= \tan(N - \epsilon) \sin \alpha; \end{aligned}$$

ϵ représente l'obliquité moyenne de l'écliptique à janvier 0 de l'année. On trouve sa valeur dans la *Connaissance des Temps*.

On peut vérifier ces dernières transformations, avec la formule,

$$\frac{\cos(N - \epsilon)}{\cos N} = \frac{\cos \beta \sin \alpha}{\cos \Theta \sin \Delta}.$$

Il est préférable de calculer encore les α et δ par les formules suivantes

$$\begin{cases} \cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \sin \Omega, \\ \sin \alpha \cos \delta = \cos \Omega \sin \lambda \cos \varepsilon + \sin \Omega \sin \varepsilon, \\ \sin \delta = -\cos \Omega \sin \lambda \sin \varepsilon + \sin \Omega \cos \varepsilon. \end{cases}$$

(VI). On cherche dans la *Connaissance des Temps* les coordonnées moyennes du Soleil, rapportées à janvier 0 de l'année, pour les trois temps des observations, t, t', t'' .

On ajoute aux longitudes la valeur absolue de l'aberration $20'',44 \pm$ une petite correction.

Soient $\Theta, \Theta', \Theta''$ les longitudes ainsi corrigées et R, R', R'' les distances du Soleil à la Terre aux temps t, t', t'' .

On néglige la parallaxe.

On a ainsi les données du calcul

$$\begin{array}{llll} t, & \alpha, & \delta; & \Theta, \log R, \\ t', & \alpha', & \delta'; & \Theta', \log R'. \\ t'', & \alpha'', & \delta''; & \Theta'', \log R''. \end{array}$$

DEUXIÈME PARTIE. — Formules :

$$(I) \quad M = \frac{t'' - t'}{t' - t} \frac{\tan \delta' \sin(\alpha - \Theta') - \tan \delta \sin(\alpha' - \Theta')}{\tan \delta' \sin(\alpha' - \Theta') - \tan \delta \sin(\alpha - \Theta')}.$$

$$(II) \quad \begin{cases} g \cos(\zeta - \Theta) = R' \cos(\Theta' - \Theta) - R \\ g \sin(\zeta - \Theta) = R' \sin(\Theta' - \Theta) \end{cases} \quad \begin{array}{l} g > 0, \\ h > 0, \end{array}$$

$$(III) \quad \begin{cases} h \cos \zeta \cos(H - \alpha'') = M - \cos(\alpha'' - \alpha) \\ h \cos \zeta \sin(H - \alpha'') = \sin(\alpha'' - \alpha) \end{cases} \quad \begin{array}{l} -90^\circ < \zeta < 90^\circ, \\ h \sin \zeta = M \tan \delta' - \tan \delta, \end{array}$$

$$\cos \psi = \cos \delta \cos(\alpha - \Theta),$$

$$\sin \psi \cos P = \cos \delta \sin(\alpha - \Theta),$$

$$\sin \psi \sin P = \sin \delta,$$

$$\cos \psi' = \cos \delta' \cos(\alpha' - \Theta'),$$

$$\sin \psi' \cos P' = \cos \delta' \sin(\alpha' - \Theta'),$$

$$\sin \psi' \sin P' = \sin \delta',$$

$$\cos \varphi = \cos \zeta \cos(\zeta - H),$$

$$\sin \varphi \cos w = \cos \zeta \sin(\zeta - H),$$

$$\sin \varphi \sin w = \sin \zeta,$$

$$A = g \sin \varphi, \quad B = R \sin \psi, \quad C = R' \sin \psi',$$

et

$$(V) \quad \begin{cases} b = h \cos \delta, & c = g \cos \varphi - b R \cos \psi, \\ b' = \frac{h}{M} \cos \delta', & c' = g \cos \varphi - b' R' \cos \psi'. \end{cases}$$

(VI) Résolution de l'équation d'Euler.

$$z' = K(t'' - t), \quad s = \frac{2K(t'' - t)}{\sqrt{r + r''}} p,$$

$$\log K = 8,2355814.$$

Premier essai :

$$\begin{array}{llll} \mu = 1, & (r + r'')_0 = 2, & s = \tau' \sqrt{2}, \\ u = \sqrt{2\tau'^2 - \Lambda^2}, & r'_1 = \sqrt{\left(\frac{u+c}{b}\right)^2 + B^2}, & r''_1 = \sqrt{\left(\frac{u+c'}{b'}\right)^2 + B'^2}. \end{array}$$

Deuxième essai :

$$\eta = \frac{2\tau'}{(r + r'')^{\frac{3}{2}}}.$$

Les Tables VIII d'Oppolzer, que nous reproduisons plus loin, donnent $\log \mu$, avec l'argument η .

$$\begin{array}{llll} s = \frac{2\tau' \mu}{\sqrt{(r + r'')^3}}, & u_1 = \sqrt{s^2 - \Lambda^2}, & r'_2 = \sqrt{\left(\frac{u_1+c}{b}\right)^2 + B^2}, & r''_2 = \sqrt{\left(\frac{u_1+c'}{b'}\right)^2 + B'^2}, \\ & (r + r'')_1, & \log(r + r'')_1, & \end{array}$$

S'il y a lieu on continue l'approximation comme il suit. On pose

$$\lambda_0 = \log(r + r'')_0, \quad \Delta \lambda_0 = \lambda_1 - \lambda_0, \quad \Delta^2 \lambda_0 = \Delta \lambda_1 - \Delta \lambda_0,$$

$$\lambda_1 = \log(r + r'')_1, \quad \Delta \lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1,$$

$$\lambda_2 = \log(r + r'')_2,$$

et l'on prend

$$\log(r + r'') = \lambda = \lambda_2 - \frac{(\Delta \lambda_1)^2}{\Delta^2 \lambda_0}.$$

Avec cette valeur de $r + r''$ on fait un nouvel essai et ainsi de suite jusqu'à ce que la valeur trouvée pour $r + r''$ soit égale à celle dont on est parti.

On a ainsi

$$(VII) \quad \begin{aligned} u, \log s, \log r, \log r', \\ \rho = \frac{u + s \cos \varphi}{h}, \quad \rho' = M \rho, \end{aligned}$$

$$(VIII) \quad \begin{cases} r \cos b \cos(l - \Theta) = \rho \cos(\alpha - \Theta) - R, \\ r \cos b \sin(l - \Theta) = \rho \sin(\alpha - \Theta), \\ r \sin b = \rho \tan \delta, \\ \rho = \frac{u + s \cos \varphi}{h}, \\ r' \cos b' \cos(l' - \Theta') = \rho' \cos(\alpha' - \Theta') - R', \\ r' \cos b' \sin(l' - \Theta') = \rho' \sin(\alpha' - \Theta'), \\ r' \sin b' = \rho' \tan \delta', \\ \rho' = M \rho. \end{cases}$$

Première vérification. — Les valeurs de $\log r, \log r'$ obtenues par ces formules doivent coïncider avec celles que l'on a obtenues précédemment.

$$(IX) \quad \begin{cases} \tan i \sin(l - \Omega) = \tan b, \\ \tan i \cos(l - \Omega) = \frac{\tan b' - \tan b \cos(l' - l)}{\sin(l' - l)}, & \tan i \sin(l' - l) > 0, \\ \tan i \sin(l' - \Omega) = \tan b', \\ \tan i \cos(l' - \Omega) = \frac{\tan b' - \tan b \cos(l - l')}{\sin(l - l')}, \end{cases}$$

si l'on a $|\cos i| > \sin i$,

$$(X) \quad \begin{cases} \tan u = \frac{\tan(l - \Omega)}{\cos i}, & \frac{\sin u}{\sin b} > 0, \\ \tan u' = \frac{\tan(l' - \Omega)}{\cos i}, & \frac{\sin u'}{\sin b'} > 0; \end{cases}$$

si l'on a $|\cos i| < \sin i$,

$$(X') \quad \begin{cases} \tan u = \frac{\tan b}{\sin i \cos(l - \Omega)}, & \frac{\sin u}{\sin b} > 0, \\ \tan u' = \frac{\tan b'}{\sin i \cos(l' - \Omega)}, & \frac{\sin u'}{\sin b'} > 0. \end{cases}$$

Vérification importante :

$$\sum = \frac{1}{s} (r + r' + s), \quad \sin u' - u = \sqrt{\frac{1}{s} \frac{\sum - r}{r' - r}},$$

et

$$(XI) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{v}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}}, \\ \frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{v}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \cot \frac{u' - u}{2} - \frac{1}{\sqrt{r^2}} \operatorname{cosec} \frac{u' - u}{2}, \end{cases}$$

$$(XII) \quad \begin{cases} v' = v + u' - u, \\ u = u - v = u' - v', \\ \pi = \Omega + \omega. \end{cases}$$

Les Tables IV d'Oppolzer donnent $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$, avec les arguments v, v' :

$$(XIII) \quad \begin{cases} T = t - \mathfrak{M} q^{\frac{2}{3}}, \\ T = t' - \mathfrak{M}' q'^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

(XIV) *Calcul du lieu moyen et vérifications finales.*

$$\mathfrak{M}' = \frac{t' - T'}{q'^{\frac{2}{3}}}.$$

On obtient v' avec les Tables IV d'Oppolzer et $\frac{v'}{\mathfrak{M}'} > 0$.

$$r' = \frac{q}{\cos^2 \frac{v'}{2}},$$

$$u' = v' + \omega,$$

$$\rho' \cos(\alpha' - \Omega) = r' \cos u' + R' \cos(\Theta' - \Omega),$$

$$\rho' \sin(\alpha' - \Omega) = r' \sin u' \cos i + R' \sin(\Theta' - \Omega),$$

$$\rho' \tan \delta' = r' \sin u' \sin i.$$

En désignant par α'_0, δ'_0 les coordonnées observées, on a

$$\frac{(\alpha'_0 - \alpha') \cos \delta'_0}{\delta'_0 - \delta'} = \frac{\tan(\alpha'_0 - \Theta')}{\sin \delta'_0}.$$

On n'emploie cette dernière formule que dans le cas où la différence $\delta'_0 - \delta'$ est assez notable.

PREMIER CAS D'EXCEPTION. — Nous avons vu que l'expression avec laquelle on calcule M (formule I) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ quand les trois positions apparentes de la comète sont dans un même plan passant par le Soleil. Dans ce cas

cas, on calcule d'abord une première valeur approchée de M par la formule

$$M_0 = \frac{t' - t}{t' - t} \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha')},$$

et l'on continue les calculs jusqu'à l'équation d'Euler (formules II à V). On en déduit p , r , r' et, par interpolation, r'' . On obtient une valeur plus approchée de M

$$M = M_0 + \frac{1}{2} \frac{p p'}{p} \frac{\sin(\theta' - \alpha')}{\sin(\alpha' - \alpha')} \frac{R'}{p} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right),$$

et l'on emploie ensuite les mêmes formules que dans le cas général.

DEUXIÈME CAS D'EXCEPTION. — Quand les différences $\alpha' - \alpha$ et $\alpha'' - \alpha$ sont très petites, c'est-à-dire quand la longitude de la comète varie lentement dans l'intervalle des observations, on détermine une première valeur approchée de M ,

$$M_0 = \frac{t' - t}{t' - t} \frac{\tan \delta \cos(\alpha - \theta') - \tan \delta' \cos(\alpha' - \theta')}{\tan \delta \cos(\alpha' - \theta') - \tan \delta' \cos(\alpha' - \theta')};$$

on forme encore l'équation d'Euler avec les formules de II à V du cas général; on en déduit p , r , r' et r'' par interpolation. On obtient ensuite une valeur plus approchée de M

$$M = M_0 - \frac{1}{2} \frac{p p'}{p} \frac{\tan \delta' \cos(\alpha' - \theta') - \tan \delta' \cos(\alpha' - \theta')}{\tan \delta \cos(\alpha' - \theta') - \tan \delta' \cos(\alpha' - \theta')} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \frac{R'}{p},$$

et l'on est ramené au cas général.

13. Calcul de l'éphéméride d'une comète. — On détermine, avec les éléments, les ascensions droites et les déclinaisons de la comète à des intervalles de temps égaux, généralement de quatre en quatre jours, et pour minuit, temps moyen de Paris.

Considérons une figure héliocentrique et soient x' , y' , z' les coordonnées de la comète. Avec les notations habituelles, on a

$$\frac{x'}{r} = \cos(x'M) = \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i,$$

$$\frac{y'}{r} = \cos(y'M) = \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i,$$

$$\frac{z'}{r} = \cos(z'M) = \sin u \sin i.$$

D'autre part, en désignant par ε l'obliquité moyenne de l'écliptique, par x , y ,

z les coordonnées héliocentriques équatoriales de la comète, on a

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon, \\ z = y' \sin \varepsilon + z' \cos \varepsilon, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{x}{r} = \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \\ \frac{y}{r} = \cos u \sin \Omega \cos \varepsilon + \sin u (\cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon), \\ \frac{z}{r} = \cos u \sin \Omega \sin \varepsilon + \sin u (\cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon). \end{cases}$$

On introduit les constantes de Gauss A , B , C , a , b , c en posant

$$\begin{cases} \cos \Omega = \sin a \sin A & \sin a > 0, \\ -\sin \Omega \cos i = \sin a \cos A \\ \sin \Omega \cos \varepsilon = \sin b \sin B & \sin b > 0, \\ \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon = \sin b \cos B \\ \sin \Omega \sin \varepsilon = \sin c \sin C & \sin c > 0, \\ \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon = \sin c \cos C \end{cases}$$

On en déduit

$$(1) \quad \begin{cases} \cot A = -\tan \Omega \cos i, & \sin a = \frac{\cos \Omega}{\sin A}, \\ \tan N = \frac{\tan i}{\cos \Omega}, \\ \cot B = \frac{\cos i \cos(N + \varepsilon)}{\tan \Omega \cos N \cos \varepsilon} & \sin b = \frac{\sin \Omega \cos \varepsilon}{\sin B}, \\ \cot C = \frac{\cos i \sin(N + \varepsilon)}{\tan \Omega \cos N \sin \varepsilon} & \sin c = \frac{\sin \Omega \sin \varepsilon}{\sin C}. \end{cases}$$

On choisit A , B , C de façon que $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ soient positifs; le cadran de N est arbitraire; i , Ω , ε sont rapportés à l'équinoxe et à l'écliptique de janvier 0 de l'année. On vérifie les calculs par la formule

$$(2) \quad \tan i = \frac{\sin b \sin c \sin(C - B)}{\sin a \cos A}.$$

En introduisant les constantes de Gauss dans les expressions de x , y , z , on trouve

$$(3) \quad \begin{cases} x = r \sin a \sin(u + A), \\ y = r \sin b \sin(u + B), \\ z = r \sin c \sin(u + C). \end{cases}$$

L'argument de la latitude et le rayon vecteur r sont déterminés par les équations (4)

$$\mathcal{M} = \frac{t - T}{q^2};$$

on obtient ν avec les Tables IV d'Oppolzer

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{\nu}{2}},$$

$$\omega = \pi - \Omega,$$

$$u = \nu + \omega.$$

Soient X, Y, Z les coordonnées moyennes du Soleil; on les trouve dans la *Connaissance des Temps* pour midi et minuit moyens; ρ la distance de la comète à la Terre, $\odot$ sa déclinaison, Δ son ascension droite.

En projetant sur chacun des axes de coordonnées le triangle formé par le Soleil, la Terre et la comète, on trouve les trois équations suivantes qui déterminent $\rho, \Delta, \odot$

$$(5) \quad \begin{cases} \rho \cos \odot \cos \Delta = x + X, \\ \rho \cos \odot \sin \Delta = y + Y, \\ \rho \sin \odot = z + Z. \end{cases}$$

On passe à l'équinoxe vrai du jour en ajoutant les corrections

$$(6) \quad \begin{cases} \delta \Delta = f + g \sin (\odot + \Delta) \tan \odot, \\ \delta \odot = g \cos (\odot + \Delta), \end{cases}$$

On a ainsi les Δ et les $\odot$ calculés. Pour les comparer aux coordonnées observées, il faut encore tenir compte de l'aberration, comme nous l'avons dit plus haut.

On calcule habituellement les valeurs de $\delta \Delta$ et de $\delta \odot$, de huit en huit jours, et l'on interpole.

On convertit les ascensions droites corrigées en heures, minutes et secondes de temps, avec les Tables VIII de la *Connaissance des Temps*.

CHAPITRE II.

MÉTHODE DE GAUSS POUR LA DÉTERMINATION DE L'ORbite D'UNE PLANÈTE AVEC TROIS OBSERVATIONS.

1. Soient

t, t', t'' les temps des observations;
 $\alpha, \alpha', \alpha''$ les longitudes;
 β, β', β'' les latitudes géocentriques de la planète;
 ρ, ρ', ρ'' ses distances à la Terre;
 L, L', L'' les longitudes du Soleil;
 R, R', R'' ses distances à la Terre.

Nous désignons encore par $[rr']$, $[r'r'']$, $[r''r']$ les doubles des aires des triangles rectilignes, formés par le Soleil et deux des positions M, M', M'' de la planète.

En écrivant que les trois points M, M', M'' sont dans un même plan passant par le centre de gravité du Soleil, on trouve, par des transformations identiques à celles du paragraphe de la méthode d'Olbers, que l'on a

$$(1) \quad \begin{cases} [r'r''](\rho \cos \beta \cos \alpha - R \cos L) - [rr''](\rho' \cos \beta' \cos \alpha' - R' \cos L') \\ + [rr'](\rho'' \cos \beta'' \cos \alpha'' - R'' \cos L'') = 0, \\ [r'r''](\rho \cos \beta \sin \alpha - R \sin L) - [rr''](\rho' \cos \beta' \sin \alpha' - R' \sin L') \\ + [rr'](\rho'' \cos \beta'' \sin \alpha'' - R'' \sin L'') = 0, \\ [r'r''](\rho \cos \beta) \tan \beta - [rr''](\rho' \cos \beta') \tan \beta' + [rr'](\rho'' \cos \beta'') \tan \beta'' = 0. \end{cases}$$

Posons

$$u = \frac{[r'r'']}{[rr'']}, \quad u'' = \frac{[r'r']}{[rr']}.$$

En résolvant les équations (1) par rapport à $\rho \cos \beta$, $\rho' \cos \beta'$, $\rho'' \cos \beta''$, on

trouve

$$(2) \quad K' \cos \beta' = nA + n'B - C,$$

$$(3) \quad \begin{cases} K = \tan \beta \sin(\alpha' - \alpha') - \tan \beta' \sin(\alpha'' - \alpha') + \tan \beta'' \sin(\alpha' - \alpha'), \\ A = R [\tan \beta' \sin(\alpha - L) - \tan \beta \sin(\alpha'' - L)], \\ B = R' [\tan \beta' \sin(\alpha - L') - \tan \beta \sin(\alpha'' - L')], \\ C = R' [\tan \beta' \sin(\alpha - L') - \tan \beta \sin(\alpha'' - L')]. \end{cases}$$

En considérant les différences $\alpha'' - \alpha$, $\beta'' - \beta$, $L' - L$, $L'' - L'$, $R' - R$, $R'' - R'$ comme de petites quantités du premier ordre, on voit que A, B, C sont du premier ordre et que les différences A - B, B - C sont du deuxième ordre. Nous allons démontrer que K est du troisième ordre.

Désignons par C, C', C'' les points où les rayons menés de la Terre aux positions de la planète percent la sphère de rayon unité et dont le centre est en T. Soient ξ , ξ' , ξ'' ; η , η' , η'' ; ζ , ζ' , ζ'' les coordonnées rectangulaires géocentriques de C, C', C'', le plan des xy étant le plan de l'écliptique.

On a

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \beta \cos \alpha, & \eta &= \cos \beta \sin \alpha, & \zeta &= \sin \beta, \\ K \cos \beta \cos \beta' \cos \beta'' &= \xi(\eta' \xi'' - \eta'' \xi') + \xi'(\eta'' \xi - \eta \xi'') + \xi''(\eta' \xi' - \eta \xi'). \end{aligned}$$

Au signe près, le second membre représente six fois le volume du tétraèdre TCC'C''.

$$(4) \quad \begin{cases} K = (\tan \beta - 2 \tan \beta' + \tan \beta'') \sin(\alpha' - \alpha') \\ + (\tan \beta'' - \tan \beta') [\sin(\alpha' - \alpha) - \sin(\alpha'' - \alpha')] \\ + \tan \beta' [\sin(\alpha'' - \alpha') + \sin(\alpha - \alpha'') + \sin(\alpha' - \alpha)], \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{aligned} K &= (\tan \beta - 2 \tan \beta' + \tan \beta'') \sin(\alpha' - \alpha') \\ &+ 2(\tan \beta'' - \tan \beta') \sin\left(\alpha' - \frac{\alpha + \alpha''}{2}\right) \cos \frac{\alpha'' - \alpha}{2} \\ &+ 4 \tan \beta' \sin \frac{\alpha'' - \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha''}{2} \sin \frac{\alpha' - \alpha''}{2}. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + (t'' - t') \frac{d\alpha'}{dt} + \frac{(t'' - t')^2}{1.2} \frac{d^2 \alpha'}{dt^2} + \dots, \\ \alpha &= \alpha + (t - t') \frac{d\alpha}{dt} + \frac{(t - t')^2}{1.2} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \dots, \\ \tan \beta' &= \tan \beta + (t'' - t') \frac{d \tan \beta'}{dt} + \frac{(t'' - t')^2}{2} \frac{d^2 \tan \beta'}{dt^2} + \dots, \\ \tan \beta &= \tan \beta + (t - t') \frac{d \tan \beta}{dt} + \frac{(t - t')^2}{2} \frac{d^2 \tan \beta}{dt^2} + \dots, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \tan \beta + \tan \beta'' - 2 \tan \beta' &= (t + t'' - 2t') \frac{d \tan \beta'}{dt} + \dots, \\ \alpha + \alpha'' - 2\alpha' &= (t + t'' - 2t') \frac{d\alpha}{dt} + \dots, \\ (\tan \beta + \tan \beta'' - 2 \tan \beta') \sin(\alpha' - \alpha') &= (t'' - t')(t + t'' - 2t') \frac{d\alpha}{dt} \frac{d \tan \beta'}{dt} + \dots, \\ 2(\tan \beta'' - \tan \beta') \sin\left(\alpha' - \frac{\alpha + \alpha''}{2}\right) &= -(t'' - t')(t + t'' - 2t') \frac{d\alpha}{dt} \frac{d \tan \beta'}{dt} + \dots. \end{aligned}$$

En portant dans l'équation (4), on voit que les deux premiers termes de K sont du deuxième ordre et le dernier du troisième; mais les parties du deuxième ordre dans les deux premiers se détruisent; donc K est bien du troisième ordre.

Nous avons trouvé précédemment que l'expression $K \cos \beta \cos \beta' \cos \beta''$ était égale à six fois le volume du tétraèdre TCC'C''. Le rayon de la sphère étant égal



Fig. 7.

à 1, ce volume est $\frac{1}{6} \sin CC' \times \frac{1}{3} \sin C'1$, en désignant par C'1 l'arc de grand cercle perpendiculaire à CC'' et passant par C'. Donc

$$K \cos \beta \cos \beta' \cos \beta'' = 6 \times \frac{1}{2} \sin CC'' \times \frac{1}{3} \sin C'1.$$

Or CC'' est du premier ordre; donc C'1 doit être du deuxième ordre.

2. Expression de ρ et ρ'' en fonction de ρ' . — En retranchant α' de toutes les longitudes, les équations (1) deviennent

$$(5) \quad \begin{cases} n \rho \cos \beta \cos(\alpha - \alpha') + n' \rho' \cos \beta'' - \rho' \cos \beta' \cos(\alpha' - \alpha'') \\ = n R \cos(L - \alpha') + n' R' \cos(L' - \alpha') - R' \cos(L' - \alpha''), \end{cases}$$

$$(6) \quad n \rho \sin \beta + n' \rho' \sin \beta' - \rho' \sin \beta'' = 0,$$

$$(7) \quad \begin{cases} n \rho \cos \beta \sin(\alpha - \alpha') - \rho' \cos \beta' \sin(\alpha' - \alpha'') \\ = n R \sin(L - \alpha') + n' R' \sin(L' - \alpha') - R' \sin(L' - \alpha''). \end{cases}$$

En éliminant ρ'' entre (5) et (6), il vient

$$(8) \quad \begin{cases} n \rho [\sin \beta' \cos \beta \cos(\alpha - \alpha') - \sin \beta \cos \beta'] \\ - \rho' [\sin \beta'' \cos \beta' \cos(\alpha' - \alpha'') - \sin \beta' \cos \beta''] \\ = \sin \beta' [n R \cos(L - \alpha') + n' R' \cos(L' - \alpha') - R' \cos(L' - \alpha'')]. \end{cases}$$

On peut appliquer les équations (7) et (8) à la Terre; il faut, pour cela, annuler ρ , ρ' , ρ'' ; remplacer L , L' , L'' par $180^\circ + L$, $180^\circ + L'$, $180^\circ + L''$; n et n'' par

$$N = \frac{[R'R']}{[RR']} = \frac{R' \sin(L'' - L')}{R \sin(L'' - L)}.$$

On trouve ainsi

$$(7') \quad 0 = NR \sin(L - \alpha') + N'R' \sin(L'' - \alpha') - R' \sin(L' - \alpha'),$$

$$(8') \quad 0 = NR \cos(L - \alpha') + N'R' \cos(L'' - \alpha') - R' \cos(L' - \alpha').$$

Ces dernières formules peuvent d'ailleurs être établies directement. Des équations (7) et (7') d'une part, (8) et (8') de l'autre, on déduit aisément

$$(9) \quad \begin{cases} n\rho \cos\beta \sin(\alpha - \alpha') - \rho' \cos\beta' \sin(\alpha' - \alpha'') \\ = (n - N)R \sin(L - \alpha') + (n - N')R' \sin(L'' - \alpha'), \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} n\rho [\sin\beta^* \cos\beta \cos(\alpha - \alpha') - \sin\beta \cos\beta'] \\ - \rho' [\sin\beta^* \cos\beta' \cos(\alpha' - \alpha'') - \sin\beta' \cos\beta''] \\ = \sin\beta'' [(n - N)R \cos(L - \alpha') + (n' - N')R' \cos(L'' - \alpha'')]. \end{cases}$$

Pour rendre ces formules calculables par logarithmes, on pose

$$(11) \quad \begin{cases} \sin\beta \cos\beta' - \sin\beta' \cos\beta \cos(\alpha' - \alpha) = \sin\Delta' \sin W, \\ \cos\beta' \sin(\alpha' - \alpha) = \sin\Delta' \cos W, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} \sin\beta' \cos\beta'' - \cos\beta' \sin\beta'' \cos(\alpha' - \alpha'') = \sin\Delta \cos W, \\ \sin\beta' \sin(\alpha' - \alpha'') = \sin\Delta \sin W. \end{cases}$$

On assujettit, en outre, Δ et Δ' aux conditions $\sin\Delta > 0$, $\sin\Delta' > 0$. Les équations (11) et (12) déterminent sans ambiguïté Δ , Δ' , W , W' . Les équations (9) et (10) deviennent ainsi

$$\begin{aligned} n\rho \sin\Delta' \sin W &= \rho' \sin\Delta \sin W \\ &+ (N - n)R \sin(\alpha' - L) - (N' - n')R' \sin(\alpha'' - L'') \\ n\rho \sin\Delta' \cos W &= \rho' \sin\Delta \cos W \\ &+ [(N - n)R \cos(\alpha' - L) + (N' - n')R' \cos(\alpha'' - L'')] \sin\beta'. \end{aligned}$$

En multipliant ces équations par $\sin W$, $\cos W$ et en les ajoutant, on trouve

$$\begin{aligned} n\rho \sin\Delta &= \rho' \sin\Delta \cos(W - W) \\ &+ (N - n)R [\cos(\alpha' - L) \sin\beta' \cos W - \sin(\alpha' - L) \sin W] \\ &+ (N' - n')R' [\cos(\alpha'' - L'') \sin\beta' \cos W - \sin(\alpha'' - L'') \sin W]. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(13) \quad \begin{cases} \sin\beta' \cos W = f_1 \sin F, \\ -\sin W = f_1 \cos F, \end{cases} \quad \text{avec la condition } f_1 > 0,$$

il vient

$$\begin{aligned} n\rho \sin\Delta &= \rho' \sin\Delta \cos(W - W) + (N - n)R f_1 \sin(\alpha' - L + F) \\ &+ (N' - n')R' f_1 \sin(\alpha'' - L'' + F). \end{aligned}$$

Posons enfin

$$(14) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{f_1 R}{\sin\Delta} \sin(\alpha' - L + F), \\ b_0 = \frac{f_1 R'}{\sin\Delta'} \sin(\alpha'' - L'' + F), \\ c_0 = \frac{\sin\Delta}{\sin\Delta'} \cos(W_0 - W), \end{cases}$$

il viendra

$$(15) \quad n\rho = c_0 \rho' + (N - n)a_0 + (N' - n')b_0.$$

On fera un calcul analogue pour obtenir ρ'' ; on sera ainsi conduit à poser

$$(11'') \quad \begin{cases} \sin\beta' \cos\beta - \cos\beta' \sin\beta \cos(\alpha' - \alpha) = \sin\Delta' \sin W', \\ \cos\beta' \sin(\alpha' - \alpha) = \sin\Delta' \cos W', \end{cases} \quad \sin\Delta' > 0,$$

$$(12'') \quad \begin{cases} \sin\beta' \cos\beta - \cos\beta' \sin\beta \cos(\alpha' - \alpha) = \sin\Delta' \sin W'_0, \\ \cos\beta' \sin(\alpha' - \alpha) = \sin\Delta' \cos W'_0, \end{cases} \quad \sin\Delta' > 0,$$

$$(13'') \quad \begin{cases} \sin\beta \cos W' = f'_1 \sin F', \\ \sin W' = f'_1 \cos F', \end{cases} \quad f'_1 > 0,$$

$$(14'') \quad \begin{cases} a'_0 = \frac{f'_1 R}{\sin\Delta'} \sin(\alpha - L + F'), \\ b'_0 = \frac{f'_1 R'}{\sin\Delta'} \sin(\alpha - L' + F'), \\ c'_0 = \frac{\sin\Delta'}{\sin\Delta} \cos(W'_0 - W'). \end{cases}$$

On trouvera

$$n''\rho'' = c'_0 \rho' + (N - n)a'_0 + (N' - n')b'_0.$$

REMARQUES. — 1^{re} De l'équation (11), on déduit

$$(16) \quad \sin^2 \Delta' = \cos^2 \beta \sin^2(\alpha' - \alpha) + [\sin\beta \cos\beta' - \sin\beta' \cos\beta \cos(\alpha' - \alpha)]^2.$$

Le second membre doit être moindre que 1; cela a lieu, car il est du deuxième ordre.

T. — P.

2° On déduit encore de l'équation (11'')

$$(17) \quad \sin^2 \Delta' = \cos^2 \beta' \sin^2 (\alpha' - \alpha) + [\sin \beta' \cos \beta - \cos \beta' \sin \beta \cos (\alpha' - \alpha)]^2.$$

Les deux expressions (16) et (17) de $\sin^2 \Delta'$ doivent être égales; or, on tire de (16)

$$(18) \quad \sin^2 \Delta' = 1 - [\sin \beta \sin \beta' + \cos \beta \cos \beta' \cos (\alpha' - \alpha)]^2;$$

la formule (17) conduirait au même résultat. On voit en même temps que $\sin^2 \Delta'$ est bien moindre que 1.

On tire aussi des équations (12')

$$(19) \quad \sin^2 \Delta' = 1 - [\sin \beta \sin \beta' + \cos \beta \cos \beta' \cos (\alpha' - \alpha)]^2.$$

Interprétation géométrique de Δ' et Δ'' . — Soient Q le pôle de l'écliptique, C, C', C'' les trois positions de la planète; considérons les triangles QCC', QC'C'', QC'C''.

Fig. 8.



Fig. 9.

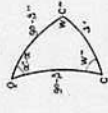


Fig. 10.



La formule (19) montre que $\Delta'' = CC'$. On a ensuite

$$\frac{\sin (\alpha' - \alpha)}{\sin \Delta'} = \frac{\cos \beta'}{\sin QCC'},$$

en comparant avec (12'') on voit que

$$\sin QCC' = \sin W_0'.$$

La seconde des formules (12'') donnerait

$$\cos QCC' = \cos W_0'.$$

donc

$$QCC' = W_0';$$

de même pour les autres angles.

3. Introduction de valeurs approchées pour n et n' . — Soient η, η', η'' les rapports des trois secteurs aux trois triangles correspondants

$$\eta = \frac{\theta \sqrt{p}}{[r^2]}, \quad \eta' = \frac{\theta' \sqrt{p}}{[r'^2]}, \quad \eta'' = \frac{\theta'' \sqrt{p}}{[r''^2]};$$

d'où

$$n = \frac{[r'^2]}{[r^2]} = \frac{\theta}{\theta'} \frac{\eta'}{\eta}, \quad n'' = \frac{[r''^2]}{[r^2]} = \frac{\theta''}{\theta'} \frac{\eta''}{\eta}.$$

On pose

$$\frac{\eta'}{\eta} = 1 + \frac{Y}{2r^2}, \quad \frac{\eta''}{\eta} = 1 + \frac{Y}{2r'^2},$$

d'où

$$(20) \quad Y' = 2r'^2 \left(\frac{\eta'}{\eta} - 1 \right), \quad Y = 2r^2 \left(\frac{\eta''}{\eta} - 1 \right),$$

$$(21) \quad n = \frac{\theta}{\theta'} \left(1 + \frac{Y'}{2r'^2} \right), \quad n'' = \frac{\theta''}{\theta'} \left(1 + \frac{Y}{2r^2} \right).$$

En remplaçant n et n'' par leurs développements en séries, il vient

$$(22) \quad \begin{cases} Y' = \frac{\theta'^2 - \theta^2}{3} + \theta' \frac{\theta'^2 + \theta\theta'' - \theta^2}{2r'} \frac{dr'}{dt} + \dots, \\ Y = \frac{\theta'^2 - \theta''^2}{3} - \theta \frac{\theta'^2 + \theta\theta'' - \theta''^2}{2r'} \frac{dr'}{dt} + \dots. \end{cases}$$

L'équation (2) devient, en ayant égard à (21),

$$\begin{aligned} K' \cos \beta + C &= \frac{\Lambda \theta}{\theta'} \left(1 + \frac{Y'}{2r'^2} \right) + B \frac{\theta'}{\theta'} \left(1 + \frac{Y}{2r^2} \right) \\ &= \frac{\Lambda \theta + B \theta'}{\theta + \theta''} \left(1 + \frac{1}{2r'^2} \frac{\Lambda \theta Y' + B \theta'' Y}{\Lambda \theta + B \theta''} \right). \end{aligned}$$

On pose

$$(23) \quad \frac{\theta''}{\theta} = P, \quad \frac{\Lambda Y' + B Y}{\Lambda + P B} = Q;$$

il vient

$$(24) \quad K' \cos \beta' + C = \frac{\Lambda + P B}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2r'^2} \right).$$

4. On obtient une valeur approchée de Q en y remplaçant Y, Y'' par leurs valeurs approchées (22); on trouve

$$\begin{aligned} Q(\Lambda + B P) &= \frac{1}{3} [\Lambda(\theta'^2 - \theta^2) + P B(\theta'^2 - \theta''^2)] \\ &\quad + \frac{1}{2r'} \frac{dr'}{dt} \left[\Lambda \theta'(\theta'^2 - \theta^2 + \theta\theta'') + P B \theta(\theta'^2 - \theta^2 - \theta\theta'') \right] + \dots, \\ Q(\Lambda \theta + B \theta') &= \frac{\theta \theta''}{3} [\Lambda(2\theta + \theta') + B(2\theta'' + \theta)] \\ &\quad + \frac{1}{2r'} \frac{dr'}{dt} [(\Lambda + B)(\theta'^2 - \theta^2) + (\Lambda - B)\theta\theta''] + \dots. \end{aligned}$$

et

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} Q &= \theta \theta'' \left[1 + \frac{(A-B)(\theta''-\theta)}{A\theta+B\theta''} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2r^2} \frac{d^2r}{K dt} \frac{(A+B)(\theta'^2-\theta^2) + (A-B)\theta\theta''}{A\theta+B\theta''} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

A et B sont du premier ordre, A - B est du deuxième ordre. Donc

$$\begin{aligned} \frac{(A-B)(\theta''-\theta)}{A\theta+B\theta''} &\text{ est du premier ordre,} \\ \frac{(A+B)(\theta'^2-\theta^2)}{A\theta+B\theta''} &\text{ est du premier ordre,} \\ \frac{(A-B)\theta\theta''}{A\theta+B\theta''} &\text{ est du deuxième ordre.} \end{aligned}$$

On pourra donc prendre comme première valeur approchée de Q,

$$Q_0 = \theta \theta''.$$

Cette valeur sera en erreur d'une petite quantité du troisième ordre, ou même du quatrième ordre, si les observations sont équidistantes.

5. Remarque. — On a

$$\begin{aligned} \frac{dr'}{K dt} &= \frac{A}{\sqrt{p}} e \sin w', \\ \frac{1}{r^2} \frac{dr'}{K dt} &= \frac{(1+e \cos w') e \sin w'}{p^2}; \end{aligned}$$

soit x le rapport des deux premiers termes de Q

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2r^2} \frac{dr'}{K dt} \frac{(A+B)(\theta'^2-\theta^2)}{A\theta+B\theta''} : \frac{(A-B)(\theta''-\theta)}{A\theta+B\theta''} \\ &= e \sin w' \frac{1+e \cos w'}{2p^2} \frac{(A+B)\theta'}{A-B}. \end{aligned}$$

Pour déterminer l'ordre de grandeur de x on peut prendre les valeurs

$$\begin{aligned} A+B &= C = R' [\tan \theta' \sin(\alpha-L') - \tan \beta \sin(\alpha'-L')], \\ R' \cos L' &= R' \cos L' - R' \sin L' \frac{dL'}{dt} (t'-t), \\ R \cos L &= R' \cos L' + R' \sin L' \frac{dL'}{dt} (t-t'), \\ R' \cos L' - R \cos L &= -R' \sin L' \frac{dL'}{dt} (t'-t) \\ &= -R' \sin L' \frac{K \sqrt{p}}{R^2} (t'-t), \end{aligned}$$

ou encore

$$R' \cos L' - R \cos L = -\frac{\sqrt{p} \theta'}{R'} \sin L'.$$

On trouverait de même

$$R' \sin L' - R \sin L = +\frac{\sqrt{p} \theta'}{R'} \cos L'.$$

Il en résulte

$$A-B = \frac{\theta' \sqrt{p}}{R'} [\tan \beta' \cos(\alpha-L') - \tan \beta \cos(\alpha'-L')].$$

En remplaçant A + B et A - B par ces valeurs approchées dans x , on trouve

$$x = \frac{1}{2} e \sin w' (1 + e \cos w') \left(\frac{R'}{p} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\tan \beta' \sin(\alpha-L') - \tan \beta \sin(\alpha'-L')}{\tan \beta' \cos(\alpha-L') - \tan \beta \cos(\alpha'-L')},$$

et, e étant petit, $\left(\frac{R'}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$ est voisin de $\frac{1}{3}$.

Le rapport x sera généralement petit, de sorte qu'il sera avantageux de prendre, en première approximation, pour Q la valeur approchée

$$Q = \theta \theta'' \left[1 + \frac{(A-B)(\theta''-\theta)}{A\theta+B\theta''} \right].$$

Quand les observations sont équidistantes, la seconde partie disparaît. $\theta \theta''$ est alors une valeur approchée de Q, au quatrième ordre près.

6. Autre remarque. — L'équation (24) peut s'écrire

$$(26) \quad K \theta' \cos \beta' + \frac{C \theta' - A \theta - B \theta''}{\theta'} = \frac{A \theta + B \theta''}{\theta'} \frac{Q}{2r'^3} = 0.$$

Le premier terme et le dernier sont du troisième ordre; il doit en être de même du deuxième terme. Pour le vérifier, remplaçons-y A, B, C par leurs valeurs données par les formules (3). On trouve ainsi

$$\begin{aligned} C \theta' - A \theta - B \theta'' &= (\tan \beta' \sin \alpha - \tan \beta \sin \alpha') (\theta' R' \cos L' - \theta R \cos L - \theta' R' \cos L') \\ &\quad - (\tan \beta' \cos \alpha - \tan \beta \cos \alpha') (\theta' R' \sin L' - \theta R \sin L - \theta' R' \sin L'). \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} R \cos L &= R' \cos L' - \frac{\theta'}{K} \frac{d(R' \cos L')}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\theta'^2}{K^2} \frac{d^2(R' \cos L')}{dt^2} - \dots, \\ R' \cos L' &= R' \cos L' + \frac{\theta}{K} \frac{d(R' \cos L')}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{K^2} \frac{d^2(R' \cos L')}{dt^2} + \dots, \end{aligned}$$

d'où

$$\partial R \cos L + \partial^2 R' \cos L' - \partial' R' \cos L' = \frac{1}{2} \partial \partial' \partial'' \frac{d^2(R' \cos L')}{d\alpha^2} = \frac{1}{2} \partial \partial' \partial'' \frac{\cos L'}{R'^3}.$$

On trouverait de même

$$\partial R \sin L + \partial' R' \sin L' - \partial'' R' \sin L' = -\frac{1}{2} \partial \partial' \partial'' \frac{\sin L'}{R'^3}.$$

On en déduit que

$$C \partial' - A \partial - B \partial''$$

$$= \frac{\partial \partial' \partial''}{2 R'} [(\tan \beta \sin \alpha - \tan \beta \sin \alpha') \cos L' - (\tan \beta' \cos \alpha - \tan \beta \cos \alpha') \sin L'],$$

$$\frac{C \partial' - A \partial - B \partial''}{\partial'} = \partial \partial' \frac{C}{2 R'^2}.$$

L'équation (26) peut donc s'écrire, en première approximation,

$$K \partial' \cos \beta' + \frac{C \partial \partial''}{2 R'^3} - \frac{C \partial \partial''}{2 R'^3} = 0,$$

$$(27) \quad K \partial' \cos \beta' = \frac{1}{2} \partial \partial' C \left(\frac{1}{R'^2} - \frac{1}{R^2} \right).$$

On retrouve ainsi l'équation fondamentale de la méthode de Laplace, dont nous parlerons plus loin.

7. Marche à suivre pour faire les calculs. — Première approximation.

Les quantités A, B, C, K et P étant déterminées par les formules (3) et (23), on calcule un premier système de valeurs approchées $\rho_0, r_0; \rho_0', r_0'; \rho_0'', r_0''$ de $\rho, r; \rho', r'; \rho'', r''$ par les formules

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_0 &= \partial \partial' \left[1 + \frac{(A-B)(P-1)}{A+BP} \right], \\ K \rho_0' \cos \beta' + C &= \frac{A+BP}{1+P} \left(1 + \frac{Q_0}{2r_0'^2} \right), \\ r_0'^2 &= \rho_0'^2 + R'^2 - 2\rho_0' R' \cos \beta' \cos(\alpha' - L'), \\ Y_0 &= \frac{\partial'^2 - \partial''^2}{3}, \quad Y_0'' = \frac{\partial'^2 - \partial''^2}{3}, \\ n_0 &= \frac{\partial}{\partial'} \left(1 + \frac{Y_0''}{2r_0'^2} \right), \quad n_0'' = \frac{\partial''}{\partial'} \left(1 + \frac{Y_0}{2r_0'^2} \right), \\ n_0 \rho_0 &= c_0 \rho_0' + (N - n_0) a_0 + (N' - n_0'') b_0, \\ n_0' \rho_0' &= c_0' \rho_0'' + (N - n_0) a_0' + (N' - n_0'') b_0'. \end{aligned} \right.$$

On détermine ensuite les lieux héliocentriques extrêmes et l'on calcule les éléments jusqu'à p inclusivement par des formules que nous donnerons plus loin.Deuxième approximation. — On calcule $\eta_1, \eta_1', \eta_1'', Y_1, Y_1', Q_1$, par les formules

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\partial \sqrt{\rho}}{[r', r'']}, & \eta_1' &= \frac{\partial' \sqrt{\rho}}{[r', r'']}, & \eta_1'' &= \frac{\partial'' \sqrt{\rho}}{[r', r'']}, \\ Y_1 &= 2r_0'^2 \left(\frac{\eta_1'}{\eta_1} - 1 \right), & Y_1' &= 2r_0'^2 \left(\frac{\eta_1''}{\eta_1} - 1 \right), \\ Q_1 &= \frac{AY_1' + BPY_1}{A + BP}. \end{aligned} \right.$$

On en déduit $\rho_1', r_1'; \rho_1'', r_1''$ par les mêmes formules que dans la première approximation.

Et l'on continue ainsi jusqu'à ce que deux approximations successives donnent le même résultat.

8. Équation en z de Gauss. — Soient, au temps t' , S le centre de gravité du Soleil, T celui de la Terre et P' la planète.

Dans le triangle S'T'P', on a

$$(30) \quad \rho' = R' \frac{\sin(\delta - z)}{\sin z}, \quad r' = \frac{R' \sin \delta}{\sin z}.$$

Fig. 11.

D'autre part, A, B, C, K et P étant déterminés par les formules (3) et (23), on a entre r' et ρ' la relation

$$(31) \quad K \rho' \cos \beta' + C = \frac{A + BP}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2r'^3} \right).$$

En y remplaçant ρ' et r' par leurs valeurs données par les formules (30), il vient

$$[R \cos \beta' R' \sin(\delta - z) + C \sin z] \frac{P + 1}{A + BP} - \sin z = \frac{Q \sin^2 z}{2R'^3 \sin^3 \delta}.$$

On pose

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} C - K R' \cos \beta' \cos \delta &= S \cos \sigma, \\ K R' \cos \beta' \sin \delta &= S \sin \sigma, \end{aligned} \right. \quad \text{avec la condition } S > 0.$$

L'équation (31) devient ainsi

$$(33) \quad \frac{P+1}{A+PB} S \sin(z+\sigma) = \sin z + \frac{Q \sin^2 z}{2 R^2 \sin^2 \delta}.$$

On détermine ensuite Ω et ω_1 , avec la condition $\Omega > 0$ par les formules

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{P+1}{A+PB} S \sin z = \Omega \sin \omega_1, \\ \frac{P+1}{A+PB} S \cos z - 1 = \Omega \cos \omega_1. \end{cases}$$

L'équation (33) devient

$$\Omega \sin(z + \omega_1) = \frac{Q \sin^2 z}{2 (R^2 \sin^2 \delta)}.$$

On pose enfin

$$(35) \quad M = \frac{Q}{2 (R^2 \sin^2 \delta) \Omega},$$

et l'on trouve l'équation de Gauss

$$(36) \quad M \sin^2 z = \sin(z + \omega_1).$$

Après avoir résolu cette équation, on obtiendra, par les formules (30), les valeurs de ρ' et de r' .

9. Remarque sur le calcul de S et de σ . — Les formules (32) peuvent s'écrire

$$(37) \quad \begin{cases} S \sin(\delta + \sigma) = C \sin \delta, \\ S \cos(\delta + \sigma) = C \cos \delta - K R' \cos \beta'. \end{cases}$$

Considérons une figure sphérique dont le centre coïncide avec le centre de

Fig. 12.



gravité de la Terre, au temps t' ; soient S' le centre de gravité du Soleil, C' la planète; xy le plan de l'écliptique. Dans le triangle $S' C' P$, on a

$$(38) \quad \begin{cases} \cos \delta = -\cos \beta' \cos(\alpha' - L'), \\ \sin \delta \cos \psi = \cos \beta' \sin(\alpha' - L'), \\ \sin \delta \sin \psi = \sin \beta'. \end{cases}$$

Ces formules permettent de transformer avantageusement les équations (37). En remplaçant C , K et $\cos \delta$ par leurs valeurs données par (3) et (38), on trouve

$$\begin{aligned} C \cos \delta - K R' \cos \beta' &= R' [-\cos \beta' \cos(\alpha' - L') \{ \tan \beta' \sin(\alpha' - L') - \tan \beta \sin(\alpha' - L') \} \\ &\quad - \cos \beta' \{ \tan \beta \sin(\alpha' - L') - \tan \beta' \sin(\alpha' - \alpha) + \tan \beta' \sin(\alpha' - \alpha) \}] \\ &= R' \{ \sin \beta' \sin(\alpha' - \alpha) + \cos \beta' \sin(\alpha' - L') \{ \tan \beta \cos(\alpha' - L') \\ &\quad - \tan \beta' \cos(\alpha' - L') \} \}. \end{aligned}$$

On pose

$$(39) \quad D = R' \{ \tan \beta \cos(\alpha' - L') - \tan \beta' \cos(\alpha' - L') \},$$

et il vient

$$C \cos \delta - K R' \cos \beta' = D \sin \delta \cos \psi + R' \sin \delta \sin \psi \sin(\alpha' - \alpha).$$

Les formules (37) peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{S}{\sin \delta} \sin(\delta + \sigma) &= C, \\ \frac{S}{\sin \delta} \cos(\delta + \sigma) &= D \cos \psi + R' \sin \psi \sin(\alpha' - \alpha). \end{aligned}$$

On pose enfin

$$(40) \quad \begin{cases} D = T \sin \tau, \\ R' \sin(\alpha' - \alpha) = T \cos \tau, \end{cases}$$

et l'on a, pour déterminer S et δ , les formules

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{S}{\sin \delta} \sin(\delta + \sigma) = C, \\ \frac{S}{\sin \delta} \cos(\delta + \sigma) = T \sin(\tau + \psi). \end{cases}$$

10. Résumé des formules qui servent à calculer ρ' et r' .

$$\begin{aligned} \theta &= K(\rho' - L'), & \theta' &= K(L' - L), & P &= \frac{\theta'}{\theta}, \\ \begin{cases} K &= \tan \beta \sin(\alpha' - \alpha') - \tan \beta' \sin(\alpha' - \alpha) + \tan \beta' \sin(\alpha' - \alpha), \\ A &= R' \{ \tan \beta' \sin(\alpha' - L') - \tan \beta \sin(\alpha' - L') \}, \\ B &= R' \{ \tan \beta' \sin(\alpha' - L') - \tan \beta \sin(\alpha' - L') \}, \\ C &= R' \{ \tan \beta' \sin(\alpha' - L') - \tan \beta \sin(\alpha' - L') \}, \\ D &= R' \{ \tan \beta \cos(\alpha' - L') - \tan \beta' \cos(\alpha' - L') \}, \\ T &= P. \end{cases} \end{aligned} \quad (A)$$

et

$$Q = \theta \theta' \left[1 + \frac{(\Lambda - B)(P - 1)}{\Lambda + BP} + \dots \right].$$

$$\cos \delta = -\cos \delta' \cos (\alpha' - L'),$$

$$\sin \delta \cos \psi = \cos \delta' \sin (\alpha' - L'), \quad 0 < \delta < 180^\circ,$$

$$\sin \delta \sin \psi = \sin \delta',$$

$$T \sin \tau = D,$$

$$T \cos \tau = R' \sin (\alpha' - \alpha), \quad T > 0,$$

$$\frac{S}{\sin \delta} \sin (\delta + \tau) = C,$$

$$\frac{S}{\sin \delta} \cos (\delta + \tau) = T \sin (\tau + \psi),$$

(A) On prend pour S le signe qui correspond à la plus petite valeur de σ .

$$\Omega \sin \omega_1 = \frac{P+1}{\Lambda+PB} S \sin \sigma,$$

$$\Omega \cos \omega_1 = \frac{P+1}{\Lambda+PB} S \cos \sigma - 1, \quad \Omega > 0,$$

$$M = \frac{Q}{2\Omega (R' \sin \delta)^2},$$

$$M \sin^2 z = \sin (z + \omega_1),$$

$$r' = \frac{R' \sin \delta}{\sin z},$$

$$p' = \frac{R' \sin (\delta - z)}{\sin z}.$$

11. Discussion et résolution de l'équation $M \sin^2 z = \sin (z + \omega_1)$. — Pour qu'une racine de cette équation convienne au problème, il faut qu'elle soit moindre que δ , car, s'il en était autrement, la valeur correspondante de p' , serait négative.

Nous savons qu'il y a toujours la racine $z = \delta$ qui correspond à la Terre.

On peut écrire l'équation précédente

$$(M \sin^2 z - \sin z \cos \omega_1)^2 = \sin^2 \omega_1 (1 - \sin^2 z),$$

$$f(z) = M^2 \sin^2 z - 2M \cos \omega_1 \sin^2 z + \sin^2 z - \sin^2 \omega_1 = 0.$$

Si $\cos \omega_1 < 0$, $f(z)$ ne présente qu'une variation, il n'y a que la racine positive $z = \delta$; le problème est impossible.

Il faut donc que l'on ait

$$\cos \omega_1 > 0.$$

Dans ce cas, $f(z)$ présente trois variations et l'on a

$$f(0) = -\sin^2 \omega_1, \quad f(+1) = (M - \cos \omega_1)^2.$$

Il y a donc une ou trois racines entre 0 et 1.

S'il n'y en a qu'une, le problème est encore impossible. Supposons qu'il y en ait trois. Soient z_1 , z_2 et δ . On peut avoir

$$(1) \quad z_1 < z_2 < \delta;$$

$$(2) \quad z_1 < \delta < z_2;$$

$$(3) \quad \delta < z_1 < z_2.$$

Dans le premier cas, les deux valeurs sont acceptables. Il y a deux orbites possibles avec les trois observations dont on s'est servi; il faut avoir recours à une quatrième observation. Dans le deuxième cas, il n'y a qu'une valeur acceptable. Dans le troisième cas, le problème est encore impossible.

Il n'y a donc lieu que de chercher la valeur de z qui est moindre que δ .

Or, δ est en général assez petit: donc z aussi et à plus forte raison $M \sin^2 z$. La valeur de z est donc peu différente de $-\omega_1$. On commence, pour la trouver, à substituer des valeurs de z à partir de $-\omega_1$. On s'approche de plus en plus de la racine par la méthode d'approximation ordinaire.

On simplifie les calculs de la façon suivante.

Soit z_0 une valeur suffisamment approchée. La racine est $z = z_0 + \varepsilon$ et l'on a

$$(43) \quad \log M + 4 \log \sin (z_0 + \varepsilon) - \log \sin (z_0 + \varepsilon + \omega_1) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(43') \quad \begin{cases} \log M + 4 \log \sin z_0 - \log \sin (z_0 + \omega_1) \\ + 4 [\log \sin (z_0 + \varepsilon) - \log \sin z_0] \\ - [\log \sin (z_0 + \omega_1 + \varepsilon) - \log \sin (z_0 + \omega_1)] = 0. \end{cases}$$

Posons

$$(44) \quad h = \log M + 4 \log \sin z_0 - \log \sin (z_0 + \omega_1);$$

h est le résultat de la substitution de la valeur essayée z_0 : sa valeur est donc connue.

D'autre part, z_0 étant suffisamment approché, on a

$$\begin{aligned} \log \sin (z_0 + \varepsilon) &= \log \sin z_0 &= \varepsilon \frac{d(\log \sin z_0)}{dz}, \\ \log \sin (z_0 + \omega_1 + \varepsilon) - \log \sin (z_0 + \omega_1) &= \varepsilon \frac{d[\log \sin (z_0 + \omega_1)]}{dz}. \end{aligned}$$

Soit c l'intervalle de l'argument des Tables de logarithmes employées et a, b les différences tabulaires de $\log \sin(z_0)$ et de $\log \sin(z_0 + \omega_1)$

$$\begin{aligned} a &= \log \sin(z_0 + c) & - \log \sin z_0 &= c \frac{d(\log \sin z_0)}{dz} \\ b &= \log \sin(z_0 + \omega_1 + c) - \log \sin(z_0 + \omega_1) = c \frac{d[\log \sin(z_0 + \omega_1)]}{dz} \end{aligned}$$

L'équation (43') peut s'écrire

$$h + 4a \frac{\varepsilon}{c} - b \frac{\varepsilon}{c} = 0;$$

d'où

$$(45) \quad \begin{cases} \varepsilon = c \frac{h}{b - 4a}, \\ z = z_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

On pourra procéder avec cette nouvelle valeur de z comme on l'a fait avec z_0 . En général, il suffira d'un petit nombre d'approximations ainsi faites pour obtenir une valeur de z suffisamment exacte.

On obtiendra ensuite les valeurs de ρ', r', ρ, r par les formules

$$(B) \quad \begin{cases} \rho' = \frac{R' \sin(\theta - z)}{\sin z}, & r' = \frac{R' \sin \theta}{\sin z}, \\ Y = \frac{\theta^2 - \theta'^2}{3}, & Y' = \frac{\theta^2 - \theta'^2}{3}, \\ n = \frac{\theta}{\theta'} \left(1 + \frac{Y'}{3r'^2} \right), & n' = \frac{\theta'}{\theta} \left(1 + \frac{Y}{3r'^2} \right), \\ n\rho = c_0 \rho' + (N - n)a_0 + (N' - n')b_0, & \\ n'\rho' = c_0' \rho' + (N - n)a_0' + (N' - n')b_0'. & \end{cases}$$

12. Calcul des coordonnées héliocentriques correspondant aux observations extrêmes. — Soient l la longitude, b la latitude héliocentriques au temps t ; l', b' les valeurs des mêmes quantités au temps t' .

En projetant les rayons vecteurs de la planète sur chacun des axes de coordonnées, on a

$$(46) \quad \begin{cases} r \cos b \cos l = \rho \cos \beta \cos \alpha - R \cos L, & r' \cos b' \cos l' = \rho' \cos \beta' \cos \alpha' - R' \cos L', \\ r \cos b \sin l = \rho \cos \beta \sin \alpha - R \sin L, & r' \cos b' \sin l' = \rho' \cos \beta' \sin \alpha' - R' \sin L', \\ r \sin b = \rho \sin \beta, & r' \sin b' = \rho' \sin \beta'. \end{cases}$$

Ces formules déterminent sans ambiguïté $r, l, b; r', l', b'$.

Calcul de l'arc héliocentrique $2f$ compris entre les deux positions extrêmes C et C' de la planète. — Soit Q le pôle de l'écliptique. Dans le triangle QCC' , on a

$$\cos 2f = \sin b \sin b' + \cos b \cos b' \cos(l' - l).$$

Cette formule ne convient pas pour le calcul numérique, car f' est petit et, par suite, il est mal déterminé par son cosinus. On se sert généralement, pour déterminer f' , de la formule suivante que l'on déduit aisément de celle qui précède

$$(47) \quad \sin^2 f' = \sin^2 \frac{b' - b}{2} + \cos b \cos b' \sin^2 \frac{l' - l}{2}.$$

Calcul des arcs héliocentriques $2f$ et $2f'$ respectivement compris entre C, C' et CC' .

— On a posé

$$u = \frac{[r' r']}{[r r']}, \quad u' = \frac{[r' r']}{[r r']}.$$

On peut écrire ces formules

$$u = \frac{r' r' \sin 2f}{r r' \sin 2f'}, \quad u' = \frac{r' r' \sin 2f'}{r r' \sin 2f};$$

on en déduit

$$(48) \quad \begin{cases} \sin 2f = \frac{r'}{r} u \sin 2f', \\ \sin 2f' = \frac{r'}{r} u' \sin 2f. \end{cases}$$

On peut se servir, pour vérifier les calculs, de la formule suivante

$$(49) \quad f' = f + f''.$$

13. Calcul des éléments elliptiques d'une planète connaissant deux lieux héliocentriques et le temps employé par la planète pour passer de la première position à la seconde. — Soient r, r' deux rayons vecteurs d'une orbite elliptique, $2f'$ leur angle; w, w' les anomalies vraies; E, E' les anomalies excentriques; t et t' les temps correspondants.

En désignant les éléments par les notations habituelles, on a

$$(1) \quad \begin{cases} \sqrt{r'} \sin \frac{w'}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E'}{2}, & \sqrt{r'} \cos \frac{w'}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E'}{2}, \\ \sqrt{r} \sin \frac{w}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2}, & \sqrt{r} \cos \frac{w}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2}, \\ \sqrt{r r'} \cos \frac{w' - w}{2} = a(1-e) \cos \frac{E'}{2} \cos \frac{E}{2} + a(1+e) \sin \frac{E'}{2} \sin \frac{E}{2}. \end{cases}$$

On peut écrire cette égalité

$$\sqrt{rr'} \cos f' = a \left[\frac{E' - E}{2} - e \cos \frac{E' + E}{2} \right].$$

D'autre part, on a

$$r + r' = a(1 - e \cos E) + a(1 - e \cos E'),$$

$$r + r' = 2a - 2ae \cos \frac{E' + E}{2} \cos \frac{E' - E}{2},$$

$$\frac{K}{a^{\frac{3}{2}}} (\ell' - \ell) = \frac{E' - E}{a^{\frac{3}{2}}} - e \sin \frac{E' - E}{2} \cos \frac{E' + E}{2}.$$

Posons

$$(2) \quad E' - E = 2g', \quad E' + E = G', \quad K(\ell' - \ell) = \theta'.$$

Les équations précédentes peuvent s'écrire

$$(3) \quad \begin{cases} \sqrt{rr'} \cos f' = a(\cos g' - e \cos G'), \\ r + r' = 2a - 2ae \cos g' \cos G', \\ \frac{\theta'}{2a^{\frac{3}{2}}} = g' - \sin g' \cos G'. \end{cases}$$

On a ainsi un système de trois équations à trois inconnues $a, g', e \cos G'$. On en tire

$$\begin{cases} e \cos G' = \cos g' - \frac{\sqrt{rr'} \cos f'}{a}, \\ r + r' = 2a - 2ae \cos g' \left(\cos g' - \frac{\sqrt{rr'} \cos f'}{a} \right), \\ \frac{\theta'}{2a^{\frac{3}{2}}} = g' - \sin g' \left(\cos g' - \frac{\sqrt{rr'} \cos f'}{a} \right). \end{cases}$$

Les deux dernières équations peuvent s'écrire

$$(4) \quad \begin{cases} 2a \sin^2 g' = r + r' - 2\sqrt{rr'} \cos f' \cos g', \\ \theta' = (2g' - \sin 2g')a^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{rr'} \sin g' \cos f' a^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Posons

$$(5) \quad \frac{\sqrt{\frac{r}{r'}} + \sqrt{\frac{r'}{r}}}{2 \cos f'} = 1 + 2\lambda'.$$

Les équations (4) deviennent

$$(6) \quad \begin{cases} a \sin^2 g' = 2\sqrt{rr'} \cos f' \left(\lambda' + \sin^2 \frac{1}{2} g' \right), \\ \theta' = \frac{2g' - \sin 2g'}{\sin^3 g'} (2\sqrt{rr'} \cos f')^{\frac{3}{2}} \left(\lambda' + \sin^2 \frac{1}{2} g' \right)^{\frac{1}{2}} \\ \quad + 2\sqrt{rr'} \cos f' (2\sqrt{rr'} \cos f')^{\frac{1}{2}} \left(\lambda' + \sin^2 \frac{1}{2} g' \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Posons encore

$$(7) \quad m' = \frac{\theta'}{(2\sqrt{rr'} \cos f')^{\frac{3}{2}}}.$$

La deuxième des équations (6) deviendra

$$(8) \quad m' = \frac{2g' - \sin 2g'}{\sin^3 g'} \left(\lambda' + \sin^2 \frac{1}{2} g' \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\lambda' + \sin^2 \frac{1}{2} g' \right)^{\frac{1}{2}};$$

d'où l'on tire la valeur de g' ; a et $e \cos G'$ sont ensuite déterminés par les équations (9)

$$(9) \quad \begin{cases} a = \frac{2\sqrt{rr'} \cos f' \left(\lambda' + \sin^2 \frac{1}{2} g' \right)}{\sin^3 g'}, \\ e \cos G' = \cos g' - \frac{\sqrt{rr'} \cos f'}{a}. \end{cases}$$

14. Résolution de l'équation en g' . — Pour résoudre l'équation (8), Gauss fait les changements de fonctions

$$(10) \quad \begin{cases} x = \sin^2 \frac{1}{2} g', \\ X = \frac{2g' - \sin 2g'}{\sin^3 g'}. \end{cases}$$

L'équation (8) devient

$$(11) \quad m' = (\lambda' + x)^{\frac{1}{2}} + (\lambda' + x)^{\frac{3}{2}} X.$$

On peut exprimer X en fonction de x . On a

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dx}{dg'} = \frac{1}{2} \sin g', \\ X \sin^3 g' = 2g' - \sin 2g'; \end{array} \right|$$

d'où

$$(12) \quad \begin{aligned} 3X \cos g' + \frac{1}{2} \sin^2 g' \frac{dX}{dx} &= 4, \\ (2x - 2x^2) \frac{dX}{dx} + (3 - 6x)X - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} X &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots \\ \frac{dX}{dx} &= \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \dots \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans l'équation (12) et en égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de x , on détermine de proche en proche les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. On trouve ainsi

$$X = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6.8}{5.7}x^2 + \frac{6.8.10}{5.7.9}x^3 + \dots \right).$$

Cette série est convergente, mais les coefficients des différentes puissances de x vont en croissant; elle ne convient pas pour les applications numériques. Pour la transformer, Gauss a posé

$$X = \frac{4}{3} \frac{1}{1 + Ax + Bx^2 + \dots}.$$

On détermine de proche en proche les coefficients $A, B, C, \dots$, en égalant à zéro les coefficients de x dans l'identité

$$1 = (1 + Ax + Bx^2 + \dots) \left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6.8}{5.7}x^2 + \dots \right).$$

On arrive ainsi à la forme suivante, pour X ,

$$X = \frac{4}{3} \frac{1}{1 - \frac{6}{5}x + \frac{12}{175}x^2 + \frac{104}{2625}x^3 + \dots},$$

ou encore

$$(13) \quad X = \frac{4}{3} \frac{1}{1 - \frac{9}{10} \left(x - \frac{2}{35}x^2 - \frac{54}{1575}x^3 - \dots \right)}.$$

L'expression de m' en fonction de x est ensuite donnée par la formule (8). On pose encore

$$(14) \quad \begin{cases} \lambda' + x = \frac{m'^2}{y^2}, \\ \xi = \frac{2}{35}x^2 + \frac{52}{1575}x^3 + \dots \end{cases}$$

et il vient

$$\begin{aligned} y^3 &= y^2 + \frac{3}{4} - \frac{9}{10} \frac{m'^2}{y^2} (\lambda' - \xi) \\ (y^3 - y^2) \left[\frac{3}{4} + \frac{9}{10} (\lambda' + \xi) \right] &= \frac{9}{10} m'^2 \left(y + \frac{1}{y} \right), \end{aligned}$$

ou encore

$$(15) \quad \frac{y^3 - y^2}{y + \frac{1}{y}} = \frac{\frac{9}{10} m'^2}{\frac{3}{4} + \frac{9}{10} (\lambda' + \xi)} = \frac{m'^2}{\frac{5}{6} + \lambda' + \xi}.$$

Posons

$$(16) \quad h' = \frac{m'^2}{\frac{5}{6} + \lambda' + \xi}.$$

L'équation en y devient

$$y^3 - y^2 - h'y - \frac{h'}{9} = 0.$$

ξ étant très petit, h' est positif; l'équation précédente n'a qu'une variation, et, par conséquent, elle n'a qu'une seule racine positive; on la trouve en procédant par approximations.

On néglige d'abord ξ , qui est, en général, une grandeur du quatrième ordre. On obtient, pour h' , la valeur approchée h'_0

$$h'_0 = \frac{m'^2}{\frac{5}{6} + \lambda'};$$

la valeur correspondante de y est donnée par les Tables IX du *Traité des Orbites* d'Oppolzer.

On détermine x par l'équation (14); on obtient la valeur de ξ par les Tables X d'Oppolzer.

On en déduit une valeur plus exacte de h'

$$h' = \frac{m'^2}{\frac{5}{6} + \lambda' + \xi},$$

et l'on recommence les opérations précédentes jusqu'à ce que deux approximations successives donnent, pour x , des valeurs très peu différentes.

15. On obtient ensuite la valeur de a par la formule (6)

$$a \sin^2 g' = 2\sqrt{r r'} \cos f' \frac{m'^2}{y^2}.$$

T. — P.

En y remplaçant m'^2 par sa valeur, on trouve

$$(17) \quad a = \frac{\theta^2}{4rr^2y^2 \sin^2 g' \cos^2 f'}.$$

On a ensuite

$$(18) \quad \begin{aligned} \sqrt{rr^2} \sin \frac{\omega' - \omega}{2} &= \sqrt{a(1 - e^2)} \sin \frac{E' - E}{2}, \\ \sqrt{rr^2} \sin f' &= \sqrt{a} \sin g' \sqrt{p}, \\ \sqrt{p} &= \frac{\sqrt{rr^2} \sin f'}{\sqrt{a} \sin g'}, \end{aligned}$$

et, en remplaçant a par sa valeur,

$$\sqrt{p} = \frac{rr^2 \sin 2f'}{\theta},$$

d'où

$$y = \frac{K\sqrt{p}(l' - l)}{rr^2 \sin^2 f'}.$$

Cette formule montre que y est le rapport de l'aire du secteur $SC'C$, formé par le Soleil et les deux positions extrêmes de la planète, au triangle rectiligne $SC'C$. On a désigné précédemment, paragraphe 3, ce rapport par η' . On a donc

$$y = \eta'.$$

Les Tables IX dont nous avons parlé plus haut donnent $\log \eta'^2$. Pour déterminer les valeurs successives de η' , il est avantageux d'écrire l'équation (15) de la façon suivante

$$\eta' - 1 = \frac{h' \left(\eta' + \frac{1}{\eta'} \right)}{\eta'^2}.$$

Remarque sur le calcul de λ' . — L'équation (5) se prête peu au calcul numérique de λ . Gauss la transforme en posant

$$\sqrt{\frac{r^2}{r}} = \tan g(45 + \omega').$$

$\frac{r^2}{r}$ étant peu différent de 1, ω' est une quantité petite du premier ordre. L'équation (5) devient

$$1 + 2\lambda' = \frac{\tan g^2(45 + \omega') + \cot^2(45 + \omega')}{2 \cos f'}.$$

On en tire

$$\lambda' = \frac{\tan g^2 3\omega' + \sin^2 \frac{1}{2} f'}{\cos f'}.$$

Cette formule montre que λ' est une petite quantité du deuxième ordre.

16. Résumé des formules employées pour le calcul des lieux héliocentriques extrêmes. — Après avoir déterminé par les formules (A) et (B) un premier système de valeurs approchées de ρ , r' ; ρ' , ρ'' , on calcule des valeurs approchées de r , r'' ; f , f' , f'' par les formules

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} r \cos b \cos(l - \alpha) &= \rho \cos \beta - R \cos(L - \alpha), \\ r \cos b \sin(l - \alpha) &= -R \sin(L - \alpha), \\ r \sin b &= \rho \sin \beta; \\ r^2 \cos b' \cos(l' - \alpha') &= \rho' \cos \beta' - R' \cos(L' - \alpha'), \\ r^2 \cos b' \sin(l' - \alpha') &= -R' \sin(L' - \alpha'), \\ r^2 \sin b' &= \rho' \sin \beta'; \\ \sin^2 f' &= \sin^2 \frac{b' - b}{2} + \cos b \cos b' \sin^2 \frac{l' - l}{2}, \\ \sin 2f &= \frac{r}{r'} n \sin 2f', \\ \sin 2f'' &= \frac{r''}{r'} n'' \sin 2f'. \end{aligned} \right.$$

On cherche les valeurs de η , η' , η''

$$(D) \quad \left\{ \begin{aligned} m &= \frac{\theta^2}{(2\sqrt{rr^2} \cos f')^2}, \\ \tan g(45 + \omega) &= \sqrt{\frac{r^2}{r'}}, \\ \lambda &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f' + \tan g^2 2\omega}{\cos f'}; \\ m' &= \frac{\theta'^2}{(2\sqrt{rr^2} \cos f')^2}, \\ \tan g(45 + \omega') &= \sqrt{\frac{r^2}{r'}}, \\ \lambda' &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f' + \tan g^2 2\omega'}{\cos f'}; \\ m'' &= \frac{\theta''^2}{(2\sqrt{rr^2} \cos f'')^2}, \\ \tan g(45 + \omega'') &= \sqrt{\frac{r^2}{r''}}, \\ \lambda'' &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f'' + \tan g^2 2\omega''}{\cos f''}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, on tire des formules (2),

$$\begin{aligned} 4w^2 - w^2 &= 2f', & w^2 + w &= 2F', \\ E^2 - E &= 2g', & E^2 + E &= 2G'. \end{aligned}$$

Les formules précédentes deviennent

$$(19) \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{r}{a}} \sin \left(\frac{F' - f'}{2} \right) = \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{G' - g'}{2}, \\ \sqrt{\frac{r}{a}} \cos \left(\frac{F' - f'}{2} \right) = \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{G' - g'}{2}, \\ \sqrt{\frac{r^2}{a^2}} \sin \left(\frac{F' + f'}{2} \right) = \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{G' + g'}{2}, \\ \sqrt{\frac{r^2}{a^2}} \cos \left(\frac{F' + f'}{2} \right) = \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{G' + g'}{2}. \end{cases}$$

On en tire F', G', a, φ . A cet effet, on les multiplie respectivement par $\frac{F' + g'}{2}, \cos \frac{F' + g'}{2}, -\sin \frac{F' - g'}{2}, -\cos \frac{F' - g'}{2}$, et l'on trouve

$$(20) \quad \left(\sqrt{\frac{r}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} \right) \cos \frac{f' + g'}{2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin g' \sin \frac{F' - G'}{2}.$$

On a

$$\sqrt{\frac{r}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} = \sqrt{\frac{r}{a}} \left(\sqrt{\frac{r}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} \right),$$

$$= \sqrt{\frac{r}{a}} [\tan(45^\circ + \omega') - \cot(45^\circ + \omega')],$$

$$\sqrt{\frac{r}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}} = 2 \sqrt{\frac{r}{a^2}} \tan 2\omega'.$$

L'équation (20) peut donc être mise sous la forme

$$(20') \quad \sqrt{\frac{r}{a^2}} \tan 2\omega' \cos \frac{f' + g'}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} \sin g' \sin \frac{F' - G'}{2}.$$

En multipliant respectivement les équations (19) par les facteurs suivants :

$$(19) \quad \begin{aligned} & + \cos \frac{F' + g'}{2}, & - \sin \frac{F' + g'}{2}, & - \cos \frac{F' - g'}{2}, & + \sin \frac{F' - g'}{2}, \\ & + \sin \frac{F' - g'}{2}, & + \cos \frac{F' - g'}{2}, & + \sin \frac{F' + g'}{2}, & + \cos \frac{F' + g'}{2}, \\ & + \cos \frac{F' - g'}{2}, & - \sin \frac{F' - g'}{2}, & - \cos \frac{F' + g'}{2}, & + \sin \frac{F' + g'}{2}, \end{aligned}$$

$$(D) \quad \begin{cases} h = \frac{m}{5} + \lambda, & h' = \frac{m'}{5} + \lambda', & h'' = \frac{m''}{5} + \lambda'', \\ \text{Tables IX donnent } \eta^2, & \text{Tables IX donnent } \eta'^2, & \text{Tables IX donnent } \eta''^2, \\ x = \frac{m}{\eta^2} - \lambda, & x' = \frac{m'}{\eta'^2} - \lambda', & x'' = \frac{m''}{\eta''^2} - \lambda'', \\ \text{Tables X donnent } \xi, & \text{Tables X donnent } \xi', & \text{Tables X donnent } \xi'', \\ h = \frac{m}{5} + \lambda + \xi, & h' = \frac{m'}{5} + \lambda' + \xi', & h'' = \frac{m''}{5} + \lambda'' + \xi'', \\ \text{Tables IX donnent } \eta^2, & \text{Tables IX donnent } \eta'^2, & \text{Tables IX donnent } \eta''^2, \\ \eta - 1 = \frac{h}{\eta^2} \left(\eta + \frac{1}{9} \right), & \eta' - 1 = \frac{h'}{\eta'^2} \left(\eta' + \frac{1}{9} \right), & \eta'' - 1 = \frac{h''}{\eta''^2} \left(\eta'' + \frac{1}{9} \right). \end{cases}$$

On détermine ensuite des valeurs plus exactes de Y, Y', Q, M et z par les formules

$$(E) \quad \begin{cases} Y = \frac{(\eta' - 1) - (\eta'' - 1)}{\eta^2} r^2, & Y' = \frac{(\eta' - 1) - (\eta - 1)}{\eta} r^2, \\ Q = \frac{AY^2 + PB^2}{A + B^2}, & M = \frac{Q}{2(R' \sin \delta) \Omega}, \\ M \sin^2 z = \sin(z + \omega_1). \end{cases}$$

Les valeurs de Ω et ω_1 , qui entrent dans (E) sont données par (A).

On en déduit, en deuxième approximation, les valeurs de r', p', ρ' par les formules (B).

Enfin, on détermine de nouveau $r'', b', b'', l', l'', f', f'', f''$ par les formules C. En général, deux approximations suffisent.

17. Calcul des éléments. — On a déjà déterminé des valeurs approchées de a et p par les formules (17) et (18). On pose ensuite

$$e = \sin \varphi.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + e} &= \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}, & \sqrt{1 - e} &= \cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}, \\ \sqrt{r} \sin \frac{w}{2} &= \sqrt{a} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{E}{2}, & \sqrt{r'} \sin \frac{w'}{2} &= \sqrt{a'} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{E'}{2}, \\ \sqrt{r} \cos \frac{w}{2} &= \sqrt{a} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{E}{2}, & \sqrt{r'} \cos \frac{w'}{2} &= \sqrt{a'} \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{E'}{2}. \end{aligned}$$

on trouve trois équations analogues à (20'). On a donc

$$(21) \quad \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{a^2}{r r'}} \sin g' \right) \cos \frac{1}{2} \varphi \sin \frac{F' - G'}{2} = \cos \frac{f' + g'}{2} \tan g' \omega', \\ \left(\sqrt{\frac{a^2}{r r'}} \sin g' \right) \cos \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{F' - G'}{2} = \sin \frac{f' + g'}{2} \sec g' \omega', \\ \left(\sqrt{\frac{a^2}{r r'}} \sin g' \right) \sin \frac{1}{2} \varphi \sin \frac{F' + G'}{2} = \cos \frac{f' - g'}{2} \tan g' \omega', \\ \left(\sqrt{\frac{a^2}{r r'}} \sin g' \right) \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{F' + G'}{2} = \sin \frac{f' - g'}{2} \sec g' \omega'. \end{cases}$$

Ces équations déterminent sans ambiguïté $F' - G'$, $F' + G'$, φ , $\sqrt{\frac{a^2}{r r'}}$; et, par suite, F' , G' , $\sin \varphi$, a .

On peut vérifier les calculs par la formule suivante

$$\sin g' \sqrt{\frac{a^2}{r r'}} = \frac{\sqrt{2 m' \cos f'}}{\eta'}.$$

Pour la démontrer, il suffit d'y remplacer a par sa valeur,

$$a = \frac{\theta'}{4 r r'^2 \eta'^2 \sin^2 g' \cos^2 f'}.$$

On trouve, après simplification,

$$m' = \frac{\theta'}{(2 \cos f')^2 (r r')^2}.$$

et c'est précisément de cette façon qu'on a défini m' .

Les anomalies vraies w , w' et les anomalies excentriques E , E' se déduisent de F' , G' , f' . On a

$$\begin{aligned} w^2 &= F' + f', & E^2 &= G' + g', \\ w &= F' - f', & E &= G' - g'. \end{aligned}$$

D'autre part, on trouve aisément les formules suivantes pour vérifier les valeurs obtenues,

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} w &= \tan \frac{1}{2} E \tan \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right), \\ \tan \frac{1}{2} w' &= \tan \frac{1}{2} E' \tan \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Pour déterminer p , on se sert de la formule

$$\eta' = \frac{\theta' \sqrt{p}}{r r' \sin g' f'}.$$

On en tire

$$p = \frac{(\eta' r r' \sin g' f')^2}{\theta'^2}.$$

On a ensuite, pour déterminer a et le moyen mouvement μ , les deux formules

$$a = p \sec^2 \varphi, \quad \mu = \frac{K}{a^{\frac{3}{2}}}, \quad \log K = 3,550066.$$

On a ainsi μ'' en secondes d'arc avec le jour solaire moyen pour unité de temps.

L'excentricité $(e)''$ et les anomalies M et M' sont données en secondes d'arc par les relations

$$\begin{aligned} (e)'' &= \frac{\sin \varphi}{\sin 1''}, & \log \frac{1}{\sin 1''} &= 5,3144251, \\ M &= E - (e)'' \sin E, \\ M' &= E' - (e)'' \sin E'. \end{aligned}$$

On vérifie les résultats avec les formules

$$\mu = \frac{M' - M}{t' - t},$$

$$w' = w + 2f', \quad w' = w' - 2f'.$$

On détermine ensuite l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne pour l'époque t' de l'observation intermédiaire,

$$\tan \frac{1}{2} E' = \tan \frac{1}{2} w' \tan \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$M' = E' - (e)'' \sin E'.$$

On peut encore se servir, comme vérification finale, des formules

$$\begin{aligned} M' &= M + (t' - t) \mu, \\ M' &= M - (t' - t') \mu, \\ \log r &= \log a + \log (1 - \sin \varphi \cos E), \\ \log r' &= \log a + \log (1 - \sin \varphi \cos E'), \\ \log r'' &= \log a + \log (1 - \sin \varphi \cos E''). \end{aligned}$$

On doit retrouver les valeurs de r , r' , r'' qui ont servi à déterminer les éléments.

La position du plan de l'orbite est donnée par Ω et i ,

$$\begin{cases} \tan i \sin(l - \Omega) = \tan b, \\ \tan i \cos(l - \Omega) = \frac{\tan b \cos(l' - l)}{\sin(l' - l)}. \end{cases}$$

Enfin les arguments de la latitude se déduisent des quantités précédentes par les équations

$$\tan u = \frac{\tan \tau(l - \Omega)}{\cos i};$$

u doit être pris dans le même quadrant que $l - \Omega$,

$$\tan u' = \frac{\tan \tau(l' - \Omega)}{\cos i};$$

u' doit être pris dans le même quadrant que $l' - \Omega$, et l'on a

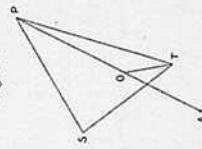
$$\varpi = \Omega + u - v,$$

$$\varpi = \Omega + u' - v'.$$

18. Sur les corrections de parallaxe et d'aberration. — Les observations étant faites à la surface de la Terre, il faut tenir compte de la parallaxe et de l'aberration pour les réduire au centre de la Terre. On ne peut le faire que si l'on connaît des valeurs approchées des distances de l'astre à la Terre.

Dans les premières déterminations d'orbite on peut corriger de la parallaxe en effectuant la réduction en un point déterminé que Gauss a appelé *lieu fictif*. Soient S le Soleil, supposé fixe; T le centre de la Terre; O l'observateur; P la

Fig. 13.



planète. Le lieu fictif est le point A de rencontre de OP avec le plan de l'écliptique. On voit l'astre dans la même direction en A qu'au lieu de l'observation.

Désignons par R, la distance de la Terre au Soleil; par L_1 et R_1 sa longitude et sa latitude héliocentriques; par R, L, O les coordonnées inconnues de A; par α

et β la longitude et la latitude géocentriques de OP; par l_1 et b_1 les coordonnées du zénith du lieu O de l'observation; par r , la distance OT.

En écrivant les équations de la droite OP et en déterminant son point de rencontre avec le plan de l'écliptique, on trouve

$$R \cos L = R_1 \cos L_1 - r_1 \cos b_1 \cos l_1 - \cot \beta \cos \alpha (R_1 \sin b_1 - r_1 \sin b_1),$$

$$R \sin L = R_1 \sin L_1 - r_1 \cos b_1 \sin l_1 - \cot \beta \sin \alpha (R_1 \sin b_1 - r_1 \sin b_1),$$

d'où

$$R \sin(L - L_1) = r_1 \cos b_1 \sin(L_1 - l_1) + \cot \beta \sin(L_1 - \alpha)(R_1 \sin b_1 - r_1 \sin b_1).$$

La distance OT étant très petite relativement à ST, les coordonnées de A seront généralement peu différentes de celles de T. On a donc une approximation suffisante en remplaçant dans la formule précédente R par R_1 et $\sin(L - L_1)$ par $L - L_1$. Il vient ainsi

$$L = L_1 + \cot \beta \sin(L_1 - \alpha) \left(\sin b_1 - \frac{r_1}{R_1} \sin b_1 \right) + \frac{r_1}{R_1} \cos b_1 \sin(L - l_1).$$

Soient π la parallaxe horizontale moyenne du Soleil, h_1 la valeur de r_1 en fonction du rayon équatorial terrestre a_1 . On a

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_1}{a_1} \frac{a_1}{r_1} \frac{1}{R_1}, \quad \frac{r_1}{R_1} = h_1 \sin \pi \frac{1}{R_1}.$$

La valeur de L est donc donnée par l'équation

$$(1) \quad L = L_1 + \cot \beta \sin(L_1 - \alpha) \left(B_1 - \frac{h_1 \pi}{R_1} \sin b_1 \right) + \frac{h_1 \pi}{R_1} \cos b_1 \sin(L - l_1),$$

On trouve de même

$$R = R_1 \left[1 - \cot \beta \cos(L_1 - \alpha) \left(\sin b_1 - \frac{r_1}{R_1} \sin b_1 \right) - \frac{r_1}{R_1} \cos b_1 \cos(L_1 - l_1) \right];$$

on peut écrire

$$R = R_1(1 - \varepsilon_1).$$

En prenant les logarithmes népériens,

$$(2) \quad \begin{cases} \log R = \log R_1 + \log e \left[-\frac{\varepsilon_1}{1} - \frac{\varepsilon_1^2}{1} + \dots \right], \\ \log R = \log R_1 - \log e \sin^2 \left[\cot \beta \cos(L_1 - \alpha) \left(B_1 - \frac{h_1 \pi}{R_1} \sin b_1 \right) + \frac{h_1 \pi}{R_1} \cos b_1 \cos(L_1 - l_1) \right], \\ \log R = \log R_1 - (0,32335g) \left[\cot \beta \cos(L_1 - \alpha) \left(B_1 - \frac{h_1 \pi}{R_1} \sin b_1 \right) + \frac{h_1 \pi}{R_1} \cos b_1 \cos(L_1 - l_1) \right]. \end{cases}$$

T. — P.

Les formules (1) et (2) permettent de faire la réduction au lieu fictif. Il faut d'abord calculer la longitude l , et la latitude b , du zénith du lieu de l'observation. Or, l'ascension droite du méridien d'un lieu à un instant donné est la même que celle d'un astre qui s'y trouve à l'instant considéré; l'ascension droite du zénith Θ , est donc le temps sidéral local de l'observation; il est égal au temps correspondant Θ de Paris augmenté de la longitude est du lieu

$$(3) \quad \Theta_1 = \Theta + \text{longitude est du lieu.}$$

D'autre part, soit φ la latitude géocentrique du lieu. On déduit de la figure de la Terre les formules

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi' = \varphi - 11',5 \sin 2\varphi, \\ \log h_1 = 9,99927 + 0,00075 \cos 2\varphi \end{cases}$$

(traduction française de la seconde édition du *Traité des orbites d'Oppolzer*, p. 31 et 32).

La longitude l , et la latitude b , du zénith se déduisent de son ascension droite Θ_1 et de sa déclinaison φ' par les formules ordinaires

$$(5) \quad \begin{cases} \cos b_1 \cos l_1 = \cos \varphi' \sin \Theta_1, \\ \cos b_1 \sin l_1 = \cos \varphi' \sin \Theta_1 \cos \varepsilon + \sin \varphi' \cos \varepsilon, \\ \sin b_1 = -\cos \varphi' \sin \Theta_1 \sin \varepsilon + \sin \varphi' \cos \varepsilon, \end{cases}$$

où ε désigne l'obliquité de l'écliptique.

Les formules (1), (2), (3), (4) et (5) donnent donc la réduction au lieu fictif de Gauss.

Il faut encore tenir compte du temps que met la lumière à parcourir la distance OA. On trouve aisément

$$OA = \frac{R_1}{\sin \beta} \sin \nu' \left(-B_1 + \frac{h_1 \pi}{R_1} \sin b_1 \right).$$

La correction à faire aux temps des observations est donc, en secondes de temps moyen,

$$dt = \frac{R_1}{\sin \beta} 497,8 \times \sin \nu' \left(-B_1 + \frac{h_1 \pi}{R_1} \sin b_1 \right).$$

On exprime, en général, les temps en jours et fractions décimales de jour, en prenant pour unité la cinquième décimale du jour.

1 seconde de temps est la $\frac{1}{86400}$ partie du jour et la nouvelle unité décimale est la $\frac{1}{105}$ partie du jour. Il faut donc multiplier la correction précédente par 105

et la diviser par 86400. On trouve ainsi

$$dt = (3,44612) \frac{R_1}{\sin \beta} \left(\frac{h_1 \sin b_1}{R_1} - B_1 \right),$$

(3,44612) représente un logarithme. Cette correction est en général négligeable.

Pour tenir compte de l'aberration, on détermine d'abord des valeurs approchées ρ , ρ' , ρ'' des distances de la planète à la Terre, en employant les temps des observations t_0 , t'_0 , t''_0 .

Les corrections de l'aberration sont

$$(S = 497,8), \quad \rho s, \quad \rho' s, \quad \rho'' s.$$

On recommence donc les calculs avec les valeurs suivantes pour les temps des observations

$$t = t_0 - \rho s, \quad t' = t'_0 - \rho' s, \quad t'' = t''_0 - \rho'' s.$$

Les nouveaux intervalles de temps sont

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + K s (\rho' - \rho'), \\ \theta' &= \theta'_0 + K s (\rho - \rho'), \\ \theta'' &= \theta''_0 + K s (\rho - \rho'). \end{aligned}$$

Quand l'intervalle des observations extrêmes est assez petit, moindre que deux mois, les différences $\rho' - \rho''$, $\rho - \rho''$, $\rho - \rho'$ sont très petites. On peut négliger les deuxièmes termes dans les seconds membres des égalités précédentes; les valeurs de Y_0 , Y'_0 , M_0 ainsi obtenues sont peu différentes de Y , Y' , M .

Il en est généralement ainsi dans les premières déterminations d'orbite, et l'on peut encore négliger la réduction au lieu fictif.

On obtient donc les éléments, en première approximation, par les formules suivantes :

19. **Résumé des formules pour obtenir, en première approximation, les éléments d'une orbite elliptique.**

PREMIÈRE PARTIE. — *Préparation des observations.* — On calcule à six décimales.

(I). On convertit les temps des observations en temps moyens de Paris (voir à ce sujet les indications de la *Connaissance des Temps*) et, de chacun d'eux, on retranche dix minutes comme première correction de l'aberration.

(II). On exprime les mois, les heures, les minutes et les secondes en jours moyens et fractions décimales de jour moyen. On néglige la sixième décimale (Tables XIV de la *Connaissance des Temps*).

(III). On convertit les ascensions droites en degrés, minutes et secondes (Tables VII de la *Connaissance des Temps*).

(IV). On rapporte les ascensions droites λ et les déclinaisons δ à l'équinoxe moyen de janvier 0 de l'année. Les corrections sont données, en secondes d'arc, par les formules suivantes :

$$\text{Pour les } \lambda \dots \dots \dots - [f + g \sin (G + \lambda) \tan \delta],$$

$$\text{Pour les } \delta \dots \dots \dots - [g \cos (G + \lambda)].$$

On trouve les valeurs des coefficients f , g dans la *Connaissance des Temps*.

(V). On transforme les ascensions droites λ , λ' , λ'' et les déclinaisons corrigées δ , δ' , δ'' en longitudes α , α' , α'' et latitudes β , β' , β'' par les formules

$$\left. \begin{aligned} \tan N &= \frac{\tan \delta}{\sin \lambda}, \\ \tan \alpha &= \frac{\cos (N - \varepsilon)}{\cos N} \tan \lambda, & \cos \alpha \cos \lambda > 0, \\ \tan \beta &= \tan (N - \varepsilon) \sin \alpha. \end{aligned} \right\}$$

ε est l'obliquité moyenne de l'écliptique à janvier 0 de l'année.

On peut vérifier ces dernières transformations avec la formule

$$\frac{\cos (N - \varepsilon)}{\cos N} = \frac{\cos \beta \sin \alpha}{\cos \delta \sin \lambda}.$$

Il est préférable de calculer encore les α et β par les formules

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \cos \lambda \sin \delta, \\ \sin \alpha \cos \beta &= \cos \delta \sin \lambda \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon, \\ \sin \beta &= \cos \delta \sin \lambda \sin \varepsilon + \sin \delta \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\}$$

On cherche dans la *Connaissance des Temps* les longitudes L , L' , L'' et les distances R , R' , R'' du Soleil à la Terre, pour les temps des trois observations.

DEUXIÈME PARTIE. — *Détermination des valeurs approchées des distances de la planète à la Terre.*

$$\left. \begin{aligned} \text{Données} \dots \dots \dots & \left\{ \begin{array}{l} t, \quad \alpha, \quad \beta, \quad L, \quad \log R, \\ t', \quad \alpha', \quad \beta', \quad L', \quad \log R', \\ t'', \quad \alpha'', \quad \beta'', \quad L'', \quad \log R''. \end{array} \right. \\ (1) \quad \frac{R' \sin (L' - L)}{R \sin (L' - L)} = N', & \quad \frac{R' \sin (L'' - L')}{R \sin (L'' - L')} = N. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \Delta' \sin \omega &= \sin (\alpha' - \alpha) \cos \beta \\ \sin \Delta' \cos \omega &= \sin \beta \cos \beta' - \cos \beta \sin \beta' \cos (\alpha' - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad \sin \Delta' > 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \Delta \sin \omega_0 &= \sin (\alpha' - \alpha') \cos \beta' \\ \sin \Delta \cos \omega_0 &= \sin \beta' \cos \beta'' - \cos \beta' \sin \beta'' \cos (\alpha' - \alpha') \end{aligned} \right\} \quad \sin \Delta > 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \Delta' \sin \omega' &= \sin (\alpha' - \alpha) \cos \beta', \\ \sin \Delta' \cos \omega' &= \sin \beta' \cos \beta - \cos \beta' \sin \beta \cos (\alpha' - \alpha), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \Delta' \sin \omega_0' &= \sin (\alpha' - \alpha) \cos \beta', \\ \sin \Delta' \cos \omega_0' &= \sin \beta' \cos \beta - \cos \beta' \sin \beta \cos (\alpha' - \alpha); \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega \sin \beta'' &= f_1 \sin F, & \cos \omega' \sin \beta &= f_1' \sin F', & f_1 > 0, \\ -\sin \omega &= f_1 \cos F, & -\sin \omega' &= f_1' \cos F', & f_1' > 0; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{R f_1}{\sin \Delta} \sin (\alpha' - L + F), \\ b_0 &= \frac{R' f_1'}{\sin \Delta'} \sin (\alpha' - L' + F'), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{\sin \Delta}{\sin \Delta'} \cos (\omega_0 - \omega); \\ a_0' &= \frac{R f_1'}{\sin \Delta'} \sin (\alpha - L + F''), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} b_0' &= \frac{R' f_1''}{\sin \Delta''} \sin (\alpha - L'' + F''), \\ c_0' &= \frac{\sin \Delta'}{\sin \Delta''} \cos (\omega_0' - \omega''); \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} R_s &= R + R' \sin (\alpha - L), \\ R_c &= -R \cos (\alpha - L), \\ R_s' &= R' + R'' \sin (\alpha' - L'), \\ R_c' &= -R'' \cos (\alpha' - L'); \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A &= R [\tan \beta' \sin (\alpha - L) - \tan \beta \sin (\alpha' - L)], \\ B &= R' [\tan \beta'' \sin (\alpha - L') - \tan \beta \sin (\alpha' - L')], \\ C &= R'' [\tan \beta'' \sin (\alpha - L') - \tan \beta \sin (\alpha' - L')], \\ D &= R' [\tan \beta \cos (\alpha' - L') - \tan \beta' \cos (\alpha - L')]; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta \sin \psi &= \sin \beta', \\ \sin \delta \cos \psi &= \cos \beta' \sin (\alpha' - L'), & 0 < \delta < 180^\circ, \\ \cos \delta &= -\cos \beta' \cos (\alpha' - L'); \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} T \sin \tau &= D \\ T \cos \tau &= R' \sin (\alpha' - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad T > 0,$$

$$\left. \begin{aligned} S \sin (\delta + \sigma) &= C \sin \delta \\ S \cos (\delta + \sigma) &= T \sin (\tau + \psi) \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{signe de } S \text{ tel que } \Delta + \sigma \\ \text{diffère peu de } \Delta. \end{array} \right\}$$

$$\sin \tau = \frac{1}{2} (R' \sin \delta)^2.$$

(Les calculs précédents doivent être faits avec grand soin, car il n'y a pas de vérifications.)

$$(X) \quad \begin{cases} \theta_0 = K(t'_0 - t_0) \\ \theta'_0 = K(t'_0 - t_0) \\ \theta''_0 = K(t'_0 - t_0) \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_0 = \theta_0 + \theta'_0 \\ \log R = \bar{3}, 35581 \end{cases}$$

$$(XI) \quad \begin{cases} P_0 = \frac{\theta'_0}{\theta_0} \\ \frac{P_0 + 1}{A + P_0 B} S = d_0 \\ \Omega_0 \sin \omega_0 = d_0 \sin \sigma, \\ \Omega_0 \cos \omega_0 = d_0 \cos \sigma - 1, \\ M_0 = \frac{3\Omega_0}{\Omega_0} \end{cases}$$

$$(XII) \quad \begin{cases} Y_0 = \frac{1}{3}(\theta_0^2 - \theta_0^2), \\ Y'_0 = \frac{1}{3}(\theta_0^2 - \theta_0^2), \\ Q_0 = \frac{AY_0 + PY_0}{A + P_0 B}, \\ M_0 = 2\Omega_0 Q_0; \end{cases}$$

$$(XIII) \quad \text{Résolution de l'équation } 2\Omega_0 \sin^2 z = \sin(z + \omega_0^2).$$

$$(XIV) \quad \begin{cases} \rho' = \frac{R'}{\sin \omega_0} \sin \delta - z_0, \\ r' = \frac{R'}{\sin \omega_0} \sin \delta; \end{cases}$$

$$(XV) \quad \begin{cases} n = \frac{\theta_0}{\theta'_0} \left(1 + \frac{Y_0}{2r'^2} \right), \\ n' = \frac{\theta'_0}{\theta_0} \left(1 + \frac{Y_0}{2r'^2} \right); \end{cases}$$

$$(XVI) \quad \begin{cases} \rho = \frac{1}{n} [(N - n)a_0 + (N' - n')b_0 + c_0 \rho'], \\ \rho' = \frac{1}{n'} [(N - n)a_0 + (N' - n')b_0 + c_0 \rho']. \end{cases}$$

$$\text{Vérification : } \rho' \sin \beta' = n \rho \sin \beta + n' \rho' \sin \beta'.$$

(Cette formule ne donne pas de bons résultats avec de faibles latitudes.)
On corrige les temps de l'aberration :

$$(XVII) \quad \begin{cases} t = t_0 - (\rho s - 10^m), \\ t' = t'_0 - (\rho' s - 10^m), \\ t'' = t''_0 - (\rho'' s - 10^m), \\ s = 7,76036. \end{cases} \quad \theta' = \theta'_0 - (\rho' - \rho)s,$$

DÉTERMINATION DE L'ORBITTE D'UNE PLANÈTE AVEC TROIS OBSERVATIONS. 79
On détermine, avec la *Connaissance des Temps*, les coordonnées L, L', L'' , $\log R, \log R', \log R''$ du Soleil pour les temps ainsi corrigés et on les substitue, dans la suite des calculs, aux coordonnées primitives.

TROISIÈME PARTIE. — Calcul des lieux héliocentriques extrêmes.

$$(XVIII) \quad \begin{cases} r \cos b \cos(l - \alpha) = \rho \cos \beta - R e, \\ r \cos b \sin(l - \alpha) = R s, \\ r \sin b = \rho \sin \beta, \\ r^2 \cos b' \cos(l' - \alpha') = \rho^2 \cos \beta' - R' e, \\ r^2 \cos b' \sin(l' - \alpha') = R' s, \\ r^2 \sin b' = \rho^2 \sin \beta'; \end{cases}$$

$$(XIX) \quad \begin{cases} \sin 2f' = \cos b \cos b' \sin^2 \left(\frac{l' - l}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{b' - b}{2} \right), \\ \sin 2f = \frac{r}{r'} n \sin 2f', \\ \sin 2f'' = \frac{r''}{r'} n^2 \sin 2f'. \end{cases}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} 2f' &= 2f + 2f', \\ m' &= \frac{\theta'^2}{(2\sqrt{r''} \cos f')^2}, \\ \tan(45^\circ + \omega') &= \sqrt{\frac{r''}{r}}, \\ \lambda' &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f' + \tan^2 2\omega'}{\cos f'}, \\ h' &= \frac{m'}{5 + \lambda'}, \end{aligned}$$

(XX) $\log \eta'^2$, avec argument h' ; Tables VIII d'Oppolzer.

$$\begin{aligned} x' &= \frac{m'}{\eta'^2} - \lambda', \\ \xi', \text{ avec argument } x'; \text{ Tables IX d'Oppolzer.} \end{aligned}$$

$$h' = \frac{m'}{5 + \lambda' + \xi'}.$$

$\log \eta'^2$, avec argument h' ; Tables VIII d'Oppolzer;

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne les mêmes valeurs de h avec deux approximations successives. En général, la valeur de ξ' est très petite et la première valeur de η'^2 est suffisante.

QUATRIÈME PARTIE. — Calcul des éléments.

$$(1) \quad \sin^2 \frac{1}{2} \varphi' = \frac{m'}{\eta^2} - \lambda'.$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma \cos \frac{1}{2} \varphi \sin \frac{1}{2} (F' - G') = \cos \frac{1}{2} (f' + g') \tan 2\omega', \\ \sigma \cos \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} (F' - G') = \sin \frac{1}{2} (f' + g') \sec 2\omega', \\ \sigma \sin \frac{1}{2} \varphi \sin \frac{1}{2} (F' + G') = \cos \frac{1}{2} (f' - g') \tan 2\omega', \\ \sigma \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} (F' + G') = \sin \frac{1}{2} (f' - g') \sec 2\omega'. \end{cases}$$

Vérification :

$$\sigma = \frac{\sqrt{2m' \cos f'}}{\eta'}.$$

$$(3) \quad \begin{cases} w'' = F' + f', & E'' = G' + g', \\ w' = F' - f', & E = G' - g'. \end{cases}$$

$$\tan \frac{1}{2} w = \tan \frac{1}{2} E \tan \left(45 + \frac{1}{2} \varphi \right), \quad \tan \frac{1}{2} w'' = \tan \frac{1}{2} E' \tan \left(45 + \frac{1}{2} \varphi' \right).$$

$$(4) \quad \begin{cases} p = \left(\frac{\eta' r' r'' \sin 2 f'}{\theta'} \right)^2, \\ a = p \sec^2 \varphi, \\ \mu = \frac{K_1}{a^2}, \quad \log K_1 = 3,550066; \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} e'' = \frac{\sin \varphi}{\sin \frac{1}{2} \varphi}, \\ M = E - e'' \sin E, \\ M' = E' - e'' \sin E'. \end{cases}$$

Vérification :

$$\frac{M' - M}{f' - f} = \mu, \quad w' = w + 2f' = w'' - 2f.$$

$$(5') \quad \begin{cases} \tan \frac{1}{2} E' = \frac{\tan \frac{1}{2} w'}{\tan \left(45 + \frac{1}{2} \varphi' \right)}, \\ M' = E' - e'' \sin E', \\ M'' = M + (f' - f)\mu = M' - (f'' - f')\mu, \\ \log r' = \log a + \log (1 - \sin \varphi \cos E), \\ \log r'' = \log a + \log (1 - \sin \varphi' \cos E'), \\ \log r''' = \log a + \log (1 - \sin \varphi \cos E'). \end{cases}$$

Calcul de i , Ω , π :

$$(6) \quad \begin{cases} \tan i \sin (l - \Omega) = \tan b, & \tan i > 0, \\ \tan i \cos (l - \Omega) = \frac{\tan b' - \tan b \cos (l' - l)}{\sin (l' - l)}, \end{cases}$$

d'où i et Ω rapportées à l'équinoxe moyen de janvier 0 de l'année.

$$(7) \quad \begin{cases} \tan u = \frac{\tan (l - \Omega)}{\cos i}, \\ \tan u' = \frac{\tan (l' - \Omega)}{\cos i}. \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} w = u + \Omega - w', \\ w'' = u'' + \Omega - w''. \end{cases}$$

On publie généralement la longitude moyenne L_0 pour une époque ronde intermédiaire

$$L_0 = M_0 + w.$$

Vérification finale. — On détermine, avec les éléments trouvés, les positions équatoriales de la planète aux temps des trois observations. A cet effet, on calcule d'abord les constantes de Gauss dont on a d'ailleurs besoin pour la construction d'une éphéméride. On les obtient par les formules suivantes

$$(9) \quad \begin{cases} \tan N = \frac{\tan i}{\cos \Omega}, \\ \cot A = -\tan \Omega \cos i, \\ \cot B = \frac{\cos i \cos (N + \varepsilon)}{\tan \Omega \cos N \cos \varepsilon}, \\ \cot C = \frac{\cos i \sin (N + \varepsilon)}{\tan \Omega \cos N \sin \varepsilon}, \\ \sin a = \frac{\cos \Omega}{\sin A}, \quad \sin b = \frac{\sin \Omega \cos \varepsilon}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\sin \Omega \sin \varepsilon}{\sin C}. \end{cases}$$

N n'est déterminé qu'à un multiple près de π ; A, B, C sont choisis de façon que $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ soient positifs. Enfin, ε représente l'obliquité moyenne de l'écliptique à janvier 0.

On vérifie ces calculs par la formule

$$(10) \quad \tan i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}.$$

Les coordonnées héliocentriques de la planète sont, aux époques des observations,

vations

$$(11) \quad \begin{cases} x = r \sin a \sin(u + A), & x' = r' \sin(a' + A) \sin a, & x'' = r'' \sin a \sin(u'' + A), \\ y = r \sin b \sin(u + B), & y' = r' \sin b \sin(u' + B), & y'' = r'' \sin b \sin(u'' + B), \\ z = r \sin c \sin(u + C), & z' = r' \sin c \sin(u' + C), & z'' = r'' \sin c \sin(u'' + C); \end{cases}$$

r, r', r'' ont été calculés précédemment par les formules (5); u, u' par les formules (7) et

$$u'' = u' + \pi - \Omega.$$

On cherche dans la *Connaissance des Temps* les coordonnées rectilignes du $\odot$, rapportées à l'équinoxe moyen de janvier 0 de l'année, pour les temps des observations corrigés de l'aberration.

Soient $X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z''$ ces coordonnées.

Les coordonnées géocentriques sont données par les formules

$$(12) \quad \begin{cases} \rho \cos \Omega_2 \cos \Delta_2 = x + X, & \rho' \cos \Omega_2' \cos \Delta_2' = x' + X', & \rho'' \cos \Omega_2'' \cos \Delta_2'' = x'' + X'', \\ \rho \cos \Omega_2 \sin \Delta_2 = y + Y, & \rho' \cos \Omega_2' \sin \Delta_2' = y' + Y', & \rho'' \cos \Omega_2'' \sin \Delta_2'' = y'' + Y'', \\ \rho \sin \Omega_2 = z + Z, & \rho' \sin \Omega_2' = z' + Z', & \rho'' \sin \Omega_2'' = z'' + Z''. \end{cases}$$

Les valeurs de $\Omega_2, \Omega_2'; \Delta_2, \Delta_2'$ ainsi obtenues sont les coordonnées géocentriques rapportées à l'équinoxe de janvier 0. Elles ne sont pas directement comparables aux coordonnées elles-mêmes, qui sont rapportées à l'équinoxe vrai du jour; mais, en négligeant la parallaxe et l'aberration des fixes, les valeurs de $\Omega_2, \Omega_2'; \Delta_2, \Delta_2'$ doivent coïncider avec celles que l'on a obtenues, au commencement des calculs, en rapportant les coordonnées observées à l'équinoxe moyen de janvier 0.

20. *Première détermination des éléments d'une orbite elliptique, avec trois observations, quand l'intervalle des observations extrêmes est au moins égal à deux mois.*

PREMIÈRE PARTIE. — *Préparation des observations.* — Transformations, de (1) à (IV) inclusivement, du cas ordinaire.

(IV). Quand les observations sont réparties sur deux années différentes, on réduit les observations de chaque année à l'équinoxe de janvier 0 correspondant; on passe ensuite d'un équinoxe à l'autre en corrigeant de la précession, qui est donnée par les formules suivantes :

Pour les $\mathcal{A}$

$$m + n \tan g D, \sin \mathcal{A};$$

Pour les D

$$n \cos \mathcal{A}.$$

On obtient ainsi les ascensions droites et les déclinaisons corrigées.

(V). On obtient les longitudes et les latitudes, comme dans le cas ordinaire.

DEUXIÈME PARTIE. — *Détermination des premières valeurs approchées des distances de la planète à la Terre.* — Mêmes formules que dans le cas précédent.

On corrige ensuite les temps de l'aberration.

$$\begin{aligned} t_1 &= t - \rho s, & \theta_1 &= K(t'_1 - t'_1), & P_1 &= \frac{\rho'_1}{\theta'_1}, \\ t'_1 &= t' - \rho' s, & \theta'_1 &= K(t'_1 - t'_1), & \frac{P_1 + i}{A + P_1 B} s &= d_1, \\ t''_1 &= t'' - \rho'' s, & \theta''_1 &= K(t'_1 - t'_1), & \Omega_1 \sin \omega_1 &= d_1 \sin \sigma_1, \\ \log s &= 7,7656, & \log K &= 8,235581, & \Omega_1 \cos \omega_1 &= d_1 \cos \sigma_1 - i, & 180 > \Omega_1 > 0. \end{aligned}$$

Les calculs indiqués par les formules, de (X) à (XVI), étaient provisoires; on les recommence avec les valeurs des temps corrigés de l'aberration.

On obtient ainsi des valeurs plus approchées des distances de la planète à la Terre.

TROISIÈME PARTIE. — *Calcul des lieux héliocentriques extrêmes.* — Mêmes formules que dans le cas ordinaire.

QUATRIÈME PARTIE. — *Calcul des éléments.* — Mêmes formules que dans le cas ordinaire.

21. *Deuxième détermination des éléments d'une orbite elliptique, avec trois nouvelles observations.*

PREMIÈRE PARTIE. — *Préparation des observations.* — On calcule à 7 décimales et l'on se sert, pour simplifier les différents calculs des Tables que nous avons indiquées dans la détermination d'une première orbite.

(I). On convertit les temps des observations en temps moyens de Paris.

(II). On calcule, avec les éléments approchés, les distances ρ, ρ', ρ'' de la planète à la Terre aux temps des trois observations.

S'il y a une éphéméride on emploie, à cet effet, les constantes de Gauss A, B, C, a, b, c ; et l'on obtient ρ, ρ', ρ'' par les formules (9), (11) et (12) du n° 19. Dans le cas contraire on calcule directement avec les premières valeurs approchées des éléments, la valeur de ρ pour chaque temps d'observation. Soit M_0 l'anomalie moyenne, publiée pour le temps t_0 ; on a, pour le temps t , avec les

mêmes notations que plus haut

$$M = M_0 + (t - t_0)^2,$$

$$E = M + \frac{e}{\sin i} \sin E,$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2a} \cos \left(45 + \frac{\theta}{2} \right) \cos \frac{E}{2},$$

$$\sqrt{r} \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{2a} \sin \left(45 + \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{E}{2},$$

$$u = v + \pi - \Omega,$$

$$\rho^2 = r^2 + R^2 + 2Rr[\cos(\theta - \Omega) \cos u + \sin(\theta - \Omega) \sin u \cos i].$$

On corrige les temps de l'aberration, c'est-à-dire des quantités ρs , $\rho' s$, $\rho'' s$, ($\log s = 2,69708$). On obtient ainsi

$$t = t_0 - \rho s, \quad t' = t'_0 - \rho' s, \quad t'' = t''_0 - \rho'' s.$$

On tient compte de la parallaxe en ajoutant aux ascensions droites et aux déclinaisons les corrections $\delta' A$, et $\delta' \Omega$ données par les formules

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \tan \gamma_1 &= \frac{\tan \rho'}{\cos(\theta - \Omega)}, \\ \delta' A &= \pi h \frac{\cos \rho'}{\rho} \frac{\sin(\theta - \Lambda)}{\cos \Omega}, \\ \delta' \Omega &= \pi h \frac{\sin \rho'}{\rho} \frac{\sin(\gamma - \Omega)}{\sin \gamma}; \end{aligned} \right.$$

$\delta' A$ et $\delta' \Omega$ ont respectivement des signes contraires des δA et $\delta \Omega$, données au n° 19, pour passer des coordonnées calculées et rapportées au centre de la Terre aux coordonnées observées.

Enfin, on rapporte les observations à l'équinoxe moyen de janvier 0 de l'année en ajoutant aux corrections observées, les quantités

$$\begin{aligned} \delta^2 A &= -[f + g \sin(G + \Lambda) \tan \Omega], \\ \delta^2 \Omega &= -g \cos(G + \Lambda). \end{aligned}$$

Tous les coefficients qui entrent dans les formules précédentes sont donnés dans la *Connaissance des Temps* par les Tables que nous avons déjà indiquées.

On transforme les ascensions droites et les déclinaisons ainsi corrigées en longitudes et latitudes par les formules déjà citées.

On cherche dans la *Connaissance des Temps* les coordonnées écliptiques du Soleil aux époques t , t' , t'' et, pour ne pas avoir à tenir compte de ses latitudes B , B' , B'' , on fait subir à celles de la planète une correction que nous allons déterminer.

Soient : S le centre de gravité du Soleil, T celui de la Terre, T_1 la projection de T sur le plan de l'écliptique fixe, choisi comme plan fondamental; P la planète, α et β la longitude et la latitude de TP . Pour tenir compte de la latitude du Soleil, il suffit de substituer T_1 à T , la longitude ne change pas et la latitude β devient β_1 . On a, dans le triangle PTT_1 ,

$$\frac{\sin P}{TT_1} = \frac{\sin(90 - \beta)}{T_1 P},$$

P est très petit : on peut donc remplacer la formule précédente par

$$P = \frac{\cos \beta}{\rho} TT_1,$$

$$P = -\frac{BR \cos \beta}{\rho},$$

$$\beta_1 = \beta - \frac{R \cos \beta}{\rho}.$$

On peut donc tenir compte de la latitude du Soleil en ajoutant respectivement à celles de la planète les corrections

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{B \cos \beta}{\rho}, & \quad -\frac{B' \cos \beta'}{\rho'}, & \quad -\frac{B'' \cos \beta''}{\rho''}. \end{aligned} \right.$$

DEUXIÈME PARTIE. — Détermination des distances de la planète à la Terre. — Formules, de (I) à (IX) inclusivement, du cas général.

$$(X) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta &= K(t'' - t'), \\ \theta' &= K(t'' - t), \\ \theta'' &= K(t' - t), \end{aligned} \right. \quad \log K = 8,3555814;$$

$$(XI) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{\theta''}{\theta}, \\ \frac{P + 1}{A + BP} S &= d, \\ \Omega \sin \omega_1 &= d \sin \alpha, \\ \Omega \cos \omega_1 &= d \cos \alpha - 1, \\ \Omega \omega' &= \frac{2\pi \omega'}{\Omega}. \end{aligned} \right. \quad \Omega > 0.$$

On calcule ensuite, avec les valeurs données des éléments, des valeurs approchées des rayons vecteurs et des longitudes de la planète. En employant les mêmes notations que plus haut, on a

$$(XII)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} - e^s \sin \mathbf{E} = \mathbf{M}, \\ \sqrt{r} \sin \frac{v}{2} = \sqrt{2a} \sin \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{\mathbf{E}}{2}, \\ \sqrt{r} \cos \frac{v}{2} = \sqrt{2a} \cos \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\mathbf{E}}{2}, \end{array} \right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{ \begin{array}{l} r \sin v = a \cos \varphi \sin \mathbf{E}, \\ r \cos v = a (\cos \mathbf{E} - \sin \varphi). \end{array} \right.$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mu(t - t_0),$$

Mêmes formules pour les temps t' et t''

$$(XIII)' \quad \left\{ \begin{array}{l} 2f = v'' - v', \quad 2f' = v' - v, \quad 2f'' = v'' - v'; \\ m = \frac{\theta^2}{(2\sqrt{r''} \cos f'')^2}, \quad m' = \frac{\theta^2}{(2\sqrt{r'} \cos f')^2}, \quad m'' = \frac{\theta^2}{(2\sqrt{r''} \cos f'')^2}; \\ \tan g(45 + \omega) = \sqrt{\frac{r''}{r}}, \quad \tan g(45 + \omega') = \sqrt{\frac{r'}{r}}, \quad \tan g(45 + \omega'') = \sqrt{\frac{r''}{r}}; \\ \lambda = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f + \tan g^2 2\omega}{\cos f}, \quad \lambda' = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f' + \tan g^2 2\omega'}{\cos f'}, \quad \lambda'' = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f'' + \tan g^2 2\omega''}{\cos f''}; \\ h = \frac{m}{\frac{5}{6} + \lambda}, \quad h' = \frac{m'}{\frac{5}{6} + \lambda'}, \quad h'' = \frac{m''}{\frac{5}{6} + \lambda''}; \end{array} \right.$$

Avec les Tables VIII d'Oppolzer, on calcule

$$\left\{ \begin{array}{l} \log n^2, \quad \log n'^2, \quad \log n''^2, \\ x = \frac{m}{\eta^2} - \lambda, \quad x' = \frac{m'}{\eta'^2} - \lambda', \quad x'' = \frac{m''}{\eta''^2} - \lambda'', \end{array} \right.$$

Avec les Tables IX d'Oppolzer, on détermine

$$\xi, \xi', \xi''.$$

On calcule de nouveau

$$h = \frac{m}{\frac{5}{6} + \lambda + \xi}, \quad h' = \frac{m'}{\frac{5}{6} + \lambda' + \xi'}, \quad h'' = \frac{m''}{\frac{5}{6} + \lambda'' + \xi''}.$$

Avec les Tables d'Oppolzer on détermine de nouvelles valeurs des ξ , puis des h et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne les mêmes valeurs des h avec deux

approximations successives. En général, la première approximation suffit. On a ensuite

$$\eta - 1 = \frac{h}{\eta^2} \left(\eta + \frac{1}{9} \right), \quad \eta' - 1 = \frac{h'}{\eta'^2} \left(\eta' + \frac{1}{9} \right), \quad \eta'' - 1 = \frac{h''}{\eta''^2} \left(\eta'' + \frac{1}{9} \right);$$

$$Y = \frac{(\eta' - 1) - (\eta'' - 1)}{\eta'' - \eta} \frac{1}{2} r'^2,$$

$$Y' = \frac{(\eta' - 1) - (\eta - 1)}{\eta - \eta'} \frac{1}{2} r'^2;$$

$$Q = \frac{AY'' + BPY}{A + BP},$$

$$2\Omega = 2\Omega'' \Omega,$$

$$2\Omega \sin^2 z = \sin(z + \omega_1),$$

$$\rho' = \frac{R'}{\sin z} \sin(\delta - z),$$

$$r' = \frac{R'}{\sin z} \sin \delta;$$

$$n'' = \frac{\theta''}{\theta'} \left(1 + \frac{Y}{2r'^2} \right),$$

$$n = \frac{\theta}{\theta'} \left(1 + \frac{Y'}{2r'^2} \right),$$

$$\rho = \frac{(N - n)a_0 + (N'' - n'')b_0 + c_0 \rho'}{n},$$

$$\rho'' = \frac{(N - n)a_0'' + (N'' - n'')b_0'' + c_0'' \rho'}{n''};$$

$$r \cos \delta \cos(l - \alpha) = \rho \cos \beta - R,$$

$$r \cos \delta \sin(l - \alpha) = R,$$

$$r \sin \delta = \rho \sin \beta,$$

$$r'' \cos \delta'' \cos(l' - \alpha') = \rho'' \cos \beta'' - R'',$$

$$r'' \cos \delta'' \sin(l' - \alpha') = R'',$$

$$r'' \sin \delta'' = \rho'' \sin \beta'';$$

$$\sin^2 f' = \cos \delta \cos \delta' \sin^2 \frac{l' - l}{2} + \sin^2 \frac{\delta' - \delta}{2},$$

$$\sin 2f = \frac{r'}{r} n \sin 2f',$$

$$\sin 2f'' = \frac{r''}{r} n'' \sin 2f'.$$

Vérification :

$$2f' = 2f + 2f''.$$

TROISIÈME PARTIE. — *Calcul des éléments.* — Mêmes formules que pour une première orbite.

QUATRIÈME PARTIE. — *Calcul des éléments.* — Même formule que dans la première détermination, comme on l'a fait dans la détermination d'une première orbite (Troisième partie).

22. *Calcul de l'éphéméride d'une petite planète.* — On détermine, avec les éléments, les ascensions droites et les déclinaisons de la planète, à des intervalles de temps égaux, généralement de quatre en quatre jours et pour minuit, temps moyen de Paris.

Nous indiquons les calculs à effectuer pour chaque date, exprimée en jours et fractions décimales de jour.

On commence à déterminer l'anomalie moyenne

$$M = M_0 + \mu(t - T_0).$$

On en déduit l'anomalie excentrique par l'équation

$$E - e^2 \sin E = M.$$

On résout cette équation par approximations successives

$$E_0 = M, \quad E_1 = M + e^2 \sin E_0, \quad E_2 = M + e^2 \sin E_1, \quad \dots$$

Avec trois approximations on a déjà une valeur très approchée E' . On pose

$$E = E' + x, \quad \sin E = \sin E' + x \cos E' + \dots$$

et l'on substitue dans l'équation de Képler. On a ainsi

$$x + E' = e^2 (\sin E' + x \cos E') + M,$$

$$x = \frac{M - E' + e^2 \sin E'}{1 - e^2 \cos E'},$$

$$E = E' + \frac{M - E' + e^2 \sin E'}{1 - e^2 \cos E'};$$

dans cette formule e et e' représentent l'excentricité; mais e est un nombre abstrait tandis que e'' est exprimé en secondes d'arc.

On a ensuite r et v par les équations

$$\sqrt{r} \sin \frac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2} = \sqrt{2a} \sin \left(45 + \frac{e}{2} \right) \sin \frac{E}{2},$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2} = \sqrt{2a} \cos \left(45 + \frac{e}{2} \right) \cos \frac{E}{2}.$$

On introduit les constantes de Gauss, $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ qui ont été calculées pour la vérification du lieu moyen. On pose

$$A' = A + \omega - \Omega,$$

$$B' = B + \omega - \Omega,$$

$$C' = C + \omega - \Omega.$$

La première est plus simple, mais, si r est voisin de 45° , l'erreur est plus grande.

Les coordonnées héliocentriques de la planète sont

$$\begin{cases} x = \alpha r \sin(v + A'), \\ y = \beta r \sin(v + B'), \\ z = \gamma r \sin(v + C'). \end{cases}$$

On cherche dans la *Connaissance des Temps* les coordonnées X, Y, Z du Soleil; elles y sont données pour minuit moyen. On obtient, la distance ρ de la planète à la Terre, son ascension droite et sa déclinaison par les formules

$$\begin{cases} \rho \cos \Omega \cos A = x + X, \\ \rho \cos \Omega \sin A = y + Y, \\ \rho \sin \Omega = z + Z. \end{cases}$$

On passe à l'équinoxe vrai du jour en ajoutant les corrections

$$\delta' A = f + g \sin(G + A) \tan \Omega,$$

$$\delta' \Omega = g \cos(G + A);$$

les coefficients f, g, G sont donnés dans la *Connaissance des Temps*, comme nous l'avons indiqué plus haut. On calcule habituellement les valeurs de $\delta' A, \delta' \Omega$ de huit en huit jours et l'on interpole.

On convertit les ascensions droites corrigées en heures, minutes et secondes avec les Tables VIII de la *Connaissance des Temps*.

Pour comparer les positions calculées aux positions observées il faut retrancher des temps des observations les temps de l'aberration, comme nous l'avons indiqué plus haut.

Remarque. — Pour faciliter aux astronomes la recherche d'une petite planète, on ajoute généralement à l'éphéméride certaines quantités qui font connaître la date de l'opposition, l'éclat du corps céleste et l'intensité de la lumière qu'il envoie.

Nous reproduisons à ce sujet quelques-unes des indications données dans le T. — P.

Traité de la détermination des orbites d'Oppolzer (Traduction française de la deuxième édition, p. 269).

1° On obtient la date de l'opposition en déterminant l'époque à laquelle la longitude géocentrique de la planète est égale à la longitude héliocentrique de la Terre. On se sert, à cet effet, de la formule

$$\tan g(l - \Omega) = \tan g a \cos i.$$

On compare, dans le voisinage de l'opposition, les longitudes héliocentriques de la planète et de la Terre, à des intervalles de temps de vingt jours. En tenant compte des différences successives ainsi trouvées, on obtient par interpolation le moment de l'opposition à une heure près, et cela suffit pour l'observation.

2° On exprime l'intensité lumineuse d'une petite planète à différentes distances de la Terre et du Soleil en prenant comme unité l'intensité qu'aurait la planète si sa distance héliocentrique était égale au demi-grand axe de son orbite a , et sa distance géocentrique à $a - 1$.

En désignant par J l'intensité à l'époque où ces distances sont respectivement ρ , r , on a

$$J = \frac{a^2(a-1)^2}{r^2 \rho^2}.$$

Pour fixer l'éclat apparent, c'est-à-dire la classe ou la grandeur d'une petite planète, on admet que le rapport h des intensités de lumière de deux classes consécutives d'étoiles est à peu près constant. L'expérience conduit à prendre pour h la valeur moyenne

$$h = 0,40.$$

La grandeur d'une planète dans les circonstances où son intensité est égale à 1 est appelée sa *grandeur moyenne* m_0 . En désignant par M et J la grandeur apparente et l'intensité à l'époque où les distances au Soleil et à la Terre sont respectivement r et ρ , on a

$$J = h^{m_0 - M},$$

$$M = m_0 - \frac{\log J}{\log h}.$$

Après avoir remplacé h et J par leurs valeurs, il vient à très peu près

$$M = m_0 + \rho \log(\rho r) - \rho \log(a^2 - a),$$

et, en posant

$$g = m_0 - \rho \log(a^2 - a),$$

on a

$$M = g + \rho \log(\rho r).$$

La valeur de g se déduit d'une valeur de M donnée par l'observation et la formule précédente donne la valeur de M à l'époque de l'opposition.

23. Calcul de l'orbite elliptique d'une planète à l'aide des observations de toute une opposition. *Méthode d'Oppolzer.* — On calcule une orbite elliptique ou circulaire avec trois observations distantes les unes des autres d'un intervalle de quinze jours, au moins.

On compare les coordonnées ainsi calculées aux coordonnées observées et l'on forme une première série de lieux normaux, en faisant les calculs avec sept décimales.

On réunit toutes les observations qui paraissent acceptables et avec trois d'entre elles on calcule de nouveaux éléments, en profitant de la première éphéméride.

On forme ensuite des lieux normaux équidistants et plus exacts que les premiers.

On considère, comme étant exactes, les ascensions droites et les déclinaisons géocentriques des lieux extrêmes, et l'on se propose de déterminer les distances correspondantes de la planète à la Terre, de façon à représenter aussi bien que possible les lieux intermédiaires.

Soient aux lieux extrêmes :

λ_0, Ω, ρ ; $\lambda_1, \Omega_1, \rho_1$ les coordonnées équatoriales géocentriques;
 α, β, r ; α_1, β_1, r_1 les coordonnées équatoriales héliocentriques;
 t et t_1 les temps.

On calcule ρ et ρ_1 avec l'éphéméride et l'on corrige les temps de l'aberration

$$T = t - \rho s, \quad T_1 = t_1 - \rho_1 s, \quad \log s = 7,76556.$$

On détermine aux temps T et T_1 les coordonnées X, Y, Z ; X_1, Y_1, Z_1 du Soleil. Les coordonnées héliocentriques sont données par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} r \cos \beta \cos \alpha = \rho \cos \Omega \cos \lambda - X, & \left\{ \begin{array}{l} r_1 \cos \beta_1 \cos \alpha_1 = \rho_1 \cos \Omega_1 \cos \lambda_1 - X_1, \\ r \cos \beta \sin \alpha = \rho \cos \Omega \sin \lambda - Y, & \dots\dots\dots \\ r \sin \beta = \rho \sin \Omega = -Z, & \dots\dots\dots \end{array} \right. \end{cases}$$

On en déduit $2f'$

$$(2) \quad \sin^2 f' = \cos \beta \cos \beta_1 \sin^2 \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta_1 - \beta}{2}.$$

On obtient η' et g' par les mêmes calculs que dans la détermination d'une

première orbite :

$$\begin{aligned} \theta' &= K(T_1 - T), \\ m' &= \frac{\theta'^2}{(2\sqrt{r_1} \cos f')^2}, \\ \tan(45^\circ + \omega') &= \sqrt{\frac{r_1}{r}}, \\ \lambda' &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} f' + \tan^2 2\omega'}{\cos f'}, \\ h' &= \frac{m'}{5 + \lambda'}, \\ \log \eta^{1/2}, & \text{ avec les Tables IX d'Oppolzer,} \\ x' &= \frac{m'}{\eta^{1/2} - \lambda'}, \\ \xi', & \text{ avec les Tables X d'Oppolzer,} \\ h' &= \frac{m'}{5 + \lambda' + \xi'}, \\ \log \eta^{1/2} & \text{ (Tables IX d'Oppolzer),} \\ x' &= \frac{m'}{\eta^{1/2} - \lambda'}, \\ & \dots \dots \dots, \\ \sin^2 \frac{1}{2} \theta' &= \frac{m'}{\eta^{1/2} - \lambda'}. \end{aligned}$$

(3)

On calcule les éléments par les formules de (1) à (8) du cas général; toutefois, on doit y remplacer les longitudes héliocentriques L, L' par les ascensions droites α, α' ; les latitudes b et b' par les déclinaisons β, β' . Le plan fondamental est l'équateur moyen du 1^{er} janvier de l'année.

On calcule les coordonnées de la planète pour l'époque de chaque lieu normal intermédiaire, corrigée de l'aberration. Soit T_1 un temps ainsi corrigé. On a, en employant les notations habituelles,

$$M_1 = M + (T_1 - T)\mu = M_1 - (T_1 - T_1)\mu,$$

$$E_1 = e' \sin E_1 = M_1,$$

$$r_1 \sin \frac{U_1}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E_1}{2},$$

$$r_1 \cos \frac{U_1}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E_1}{2}.$$

Soient N' le nœud équatorial, i' l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'équateur,

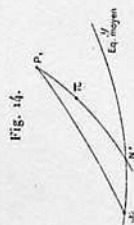


Fig. 14.

ω' la longitude $xN' + N'\pi$ du périhélie, u' l'argument $N'P$, de la déclinaison

$$u' = v_1 + \omega' - \Omega'.$$

Les coordonnées équatoriales héliocentriques sont

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 (\cos \Omega' \cos u'_1 - \sin \Omega' \sin u'_1 \cos i'), \\ y_1 &= r_1 (\sin \Omega' \cos u'_1 + \cos \Omega' \sin u'_1 \cos i'), \\ z_1 &= r_1 \sin u'_1 \sin i'. \end{aligned}$$

On met ces formules sous la forme donnée par Gauss, en posant

$$\begin{aligned} \cos \Omega' &= \alpha_1 \sin A_1, & \alpha_1 > 0, \\ -\sin \Omega' \cos i' &= \alpha_1 \cos A_1, \\ \sin \Omega' &= \beta_1 \sin B_1, & \beta_1 > 0, \\ \cos \Omega' \cos i' &= \beta_1 \cos B_1, \end{aligned}$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 r_1 \sin(u'_1 + A_1), \\ y_1 &= \beta_1 r_1 \sin(u'_1 + B_1), \\ z_1 &= r_1 \sin i' \sin u'_1. \end{aligned}$$

On pose ensuite

$$\begin{aligned} A_1 + \omega' - \Omega' &= A'_1, \\ B_1 + \omega' - \Omega' &= B'_1, \\ \omega' - \Omega' &= C'_1, \end{aligned}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 r_1 \sin(v_1 + A'_1), \\ y_1 &= \beta_1 r_1 \sin(v_1 + B'_1), \\ z_1 &= r_1 \sin(v_1 + C'_1). \end{aligned}$$

On calcule les coordonnées géocentriques par les équations

$$\begin{aligned} \rho_1 \cos \Theta_1 \cos \Delta_1 &= x_1 + X_1, \\ \rho_1 \cos \Theta_1 \sin \Delta_1 &= y_1 + Y_1, \\ \rho_1 \sin \Theta_1 &= z_1 + Z_1. \end{aligned}$$

Les valeurs ainsi trouvées correspondent à des valeurs approchées de ρ et ρ_i ou de $\log \rho$ et $\log \rho_i$. Imaginons qu'on recommence plusieurs fois les calculs précédents en donnant successivement à $\log \rho$ et $\log \rho_i$ les accroissements positifs ou négatifs q et q_i . Pour un même lieu normal intermédiaire, on trouvera ainsi différentes valeurs pour les ascensions droites et les déclinaisons géocentriques :

1° Aux valeurs $\log \rho$ et $\log \rho_i$ correspondront les coordonnées géocentriques Δ_i^I et ω_i^I ;

2° Aux valeurs $\log \rho + q$ et $\log \rho_i + q_i$ correspondront les coordonnées géocentriques Δ_i^I et ω_i^I ;

3° Aux valeurs $\log \rho$ et $\log \rho_i + q_i$ correspondront les coordonnées géocentriques Δ_i^I et ω_i^I ;

4° Aux valeurs $\log \rho + q$ et $\log \rho_i + q_i$ correspondront les coordonnées géocentriques Δ_i^I et ω_i^I .

Enfin, soient Δ_i et ω_i les coordonnées qui correspondent aux valeurs définitives $\log \rho + q'$ et $\log \rho_i + q'_i$.

Les valeurs $\log \rho$ et $\log \rho_i$ étant suffisamment approchées et, par suite, les accroissements q_i et q'_i étant petits, on a

$$\Delta_i^I = \Delta_i^I + \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho)} q + \dots,$$

$$\Delta_i^I = \Delta_i^I + \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho_i)} q_i + \dots,$$

$$\Delta_i^I = \Delta_i^I + \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho)} q + \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho_i)} q_i + \dots,$$

$$\omega_i^I = \omega_i^I + \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho)} q + \dots,$$

$$\omega_i^I = \omega_i^I + \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho_i)} q_i + \dots,$$

$$\omega_i^I = \omega_i^I + \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho)} q + \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho_i)} q_i + \dots,$$

et, très sensiblement,

$$\Delta_i^I - \Delta_i^I = (\Delta_i^I - \Delta_i^I) + (\Delta_i^I - \Delta_i^I),$$

$$\omega_i^I - \omega_i^I = (\omega_i^I - \omega_i^I) + (\omega_i^I - \omega_i^I).$$

Le calcul des éléments avec $\log \rho + q$ et $\log \rho_i + q_i$ fournit donc une vérification des calculs précédents.

Les formules précédentes conduisent à la détermination des valeurs exactes de $\log \rho$ et de $\log \rho_i$. On en tire, en effet,

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho)} = \frac{\Delta_i^I - \Delta_i^I}{q}, & \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho)} = \frac{(\omega_i^I - \omega_i^I)}{q}, \\ \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho_i)} = \frac{\Delta_i^I - \Delta_i^I}{q_i}, & \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho_i)} = \frac{(\omega_i^I - \omega_i^I)}{q_i}, \end{cases}$$

d'autre part,

$$\begin{cases} \Delta_i = \Delta_i^I + \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho)} q' + \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho_i)} q'_i, \\ \omega_i = \omega_i^I + \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho)} q' + \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho_i)} q'_i. \end{cases}$$

Les accroissements définitifs q' et q'_i doivent être déterminés de façon que les coordonnées ainsi calculées, pour chaque lieu normal, diffèrent le moins possible des coordonnées (Δ_i) , (ω_i) que l'on déduit directement des observations. Chaque lieu normal intermédiaire fournit donc deux équations en q' et q'_i :

$$\begin{cases} q' \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho)} + q'_i \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho_i)} - \Delta_i^I + \Delta_i^I = (\Delta_i), \\ q' \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho)} + q'_i \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho_i)} - \omega_i^I + \omega_i^I = (\omega_i), \\ q' \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho)} + q'_i \frac{\partial \Delta_i^I}{\partial (\log \rho_i)} - \Delta_i^I + \Delta_i^I = (\Delta_i), \\ q' \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho)} + q'_i \frac{\partial \omega_i^I}{\partial (\log \rho_i)} - \omega_i^I + \omega_i^I = (\omega_i), \end{cases}$$

Ces équations sont de la forme

$$\mu_1 q' + \nu_1 q'_i = x_1,$$

$$\mu_2 q' + \nu_2 q'_i = x_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

Elles sont linéaires en q' et q'_i ; on les résout par la méthode des moindres carrés. Avec ces valeurs $\log \rho + q'$ et $\log \rho_i + q'_i$, on détermine, par la méthode qui a été indiquée au début de ce paragraphe, des valeurs très approchées des éléments.

On obtient encore une vérification en cherchant, avec les derniers éléments calculés, les résidus qui correspondent aux lieux normaux intermédiaires; ils doivent être sensiblement égaux à ceux que laissent les équations correspondantes dans la détermination de q' et q'_i .

Dans les calculs précédents, le plan de l'équateur moyen du 1^{er} janvier a été choisi comme plan fondamental. Il nous reste à indiquer les transformations que l'on doit faire pour rapporter les éléments à l'écliptique moyen de la même époque.

Soient :

xy' le plan de l'équateur;

xy le plan de l'écliptique;

Fig. 15.



$NN\pi$ le plan de l'orbite;

i son inclinaison sur l'écliptique;

i' " sur l'équateur

$$xN = \Omega, \quad xN' = \Omega', \quad NN' = w.$$

En appliquant les formules de Delambre au triangle xNN' , on a

$$\begin{cases} \sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\Omega + w) = \sin \frac{1}{2} \Omega' \sin \frac{1}{2} (i' + \epsilon), \\ \sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\Omega + w) = \cos \frac{1}{2} \Omega' \sin \frac{1}{2} (i' - \epsilon), \\ \cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\Omega - w) = \sin \frac{1}{2} \Omega' \cos \frac{1}{2} (i' + \epsilon), \\ \cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\Omega - w) = \cos \frac{1}{2} \Omega' \cos \frac{1}{2} (i' - \epsilon). \end{cases}$$

On en déduit i, Ω, w .

Soient ϖ la longitude du périhélie comptée sur l'écliptique et ϖ' la même longitude comptée sur l'équateur. On a

$$\Omega + N\pi = \varpi,$$

$$\Omega' + w + N\pi = \varpi',$$

d'où

$$\varpi = \varpi' + \Omega - \Omega' - w.$$

On obtient ainsi les éléments définis.

24. **Calcul d'une orbite circulaire.** — Dans la détermination d'une orbite circulaire il n'y a que quatre inconnues : l'inclinaison i , la longitude du nœud ascendant Ω , le rayon de l'orbite a et l'argument α de la latitude à un instant donné. L'ascension droite et la déclinaison sont des fonctions de ces quatre in-

connues et du temps. Chaque observation fournit donc deux équations et, par suite, il suffit de deux observations. La considération des formules montre que, pour obtenir de bons résultats, il faut que l'intervalle des deux observations soit au moins de huit jours et au plus de vingt-cinq jours.

Dans les déterminations de ce genre, il est inutile de faire les calculs avec une très grande approximation : il suffit de 5 décimales. On néglige les changements de correction de précession, de nutation et d'aberration qu'il y aurait lieu de faire, pour deux observations différentes, dans des déterminations plus précises.

Soient :

t', t'' les temps des observations;

A', A'' les ascensions droites géocentriques de la planète;

ω', ω'' ses déclinaisons;

L', L'' les longitudes du Soleil;

R', R'' ses distances de la Terre.

Nous supposons toutes ces quantités préalablement corrigées de l'aberration des fixes.

On calcule les longitudes géocentriques α', α'' et les latitudes β', β'' . Dans les formules qui ont été indiquées plus haut, à cet effet, on prend pour ϵ l'obliquité moyenne de l'écliptique à l'époque $\frac{t' + t''}{2}$. Les éléments que l'on calcule sont rapportés à l'équinoxe correspondant. Les données sont ainsi :

$$t', \alpha', \beta', L', \log R',$$

$$t'', \alpha'', \beta'', L'', \log R''.$$

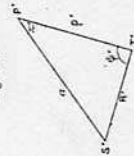
Soient :

$S', T', P', S'', T'', P''$ les positions respectives du Soleil, de la Terre et de la planète aux temps t' et t'' ;

ρ', ρ'' les distances de la planète à la Terre;

a sa distance au Soleil.

Fig. 16.



Considérons le triangle $ST'P'$ et la figure géocentrique correspondante, xy étant l'écliptique. Posons

$$\widehat{S'T'P'} = \psi', \quad \widehat{yS'P'} = \omega'.$$

T. — P.

Dans le triangle sphérique $S'N'P'$, on a

$$N'P'_1 = \beta', \quad N'S'_1 = \alpha' - L'.$$

Les observations étant généralement faites dans le voisinage de l'opposition, ψ'

Fig. 17.



est voisin de 180° . On le détermine donc par son sinus. On se sert des formules

$$(a') \quad \begin{cases} \sin w' \sin \psi' = \sin \beta', \\ \cos w' \sin \psi' = \cos \beta' \sin (\alpha' - L'), \\ \cos \psi' = \cos \beta' \cos (\alpha' - L'). \end{cases}$$

Au temps t'' , on trouverait de même

$$(a'') \quad \begin{cases} \sin w'' \sin \psi'' = \sin \beta'', \\ \cos w'' \sin \psi'' = \cos \beta'' \sin (\alpha'' - L''), \\ \cos \psi'' = \cos \beta'' \cos (\alpha'' - L''). \end{cases}$$

D'autre part, dans le triangle $ST'P'$, on a

$$\frac{\rho'}{\sin (\alpha' + \psi')} = \frac{R'}{\sin \alpha'} = \frac{a}{\sin \psi'};$$

et, dans le triangle $ST''P''$, on aurait de même

$$\frac{\rho''}{\sin (\alpha'' + \psi'')} = \frac{R''}{\sin \alpha''} = \frac{a}{\sin \psi''};$$

d'où

$$(b') \quad \sin \alpha' = \frac{R'}{a} \sin \psi',$$

$$(b'') \quad \sin \alpha'' = \frac{R''}{a} \sin \psi'',$$

$$(c') \quad \rho' = R' \frac{\sin (\alpha' + \psi')}{\sin \alpha'},$$

$$(c'') \quad \rho'' = R'' \frac{\sin (\alpha'' + \psi'')}{\sin \alpha''},$$

On est donc conduit à déterminer a .

A cet effet, on introduit les coordonnées héliocentriques. Soient l', b', r' ; l'', b'', r'' les longitudes et les latitudes de la planète aux temps t' et t'' ; projetons le contour $ST'P'$ sur les axes de coordonnées, nous aurons

$$\begin{cases} a \cos b' \cos l' = \rho' \cos \beta' \cos \alpha' - R' \cos L', \\ a \cos b' \sin l' = \rho' \cos \beta' \sin \alpha' - R' \sin L', \\ a \sin b' = \rho' \sin \beta'. \end{cases}$$

On simplifie ces formules en retranchant L' de toutes les longitudes; il vient

$$(d') \quad \begin{cases} a \cos b' \cos (l' - L') = \rho' \cos \beta' \cos (\alpha' - L') - R', \\ a \cos b' \sin (l' - L') = \rho' \cos \beta' \sin (\alpha' - L'), \\ a \sin b' = \rho' \sin \beta'; \end{cases}$$

d'où

$$\tan (l' - L') = \frac{\rho' \cos \beta' \sin (\alpha' - L')}{\rho' \cos \beta' \cos (\alpha' - L') - R'}, \quad \frac{\sin (l' - L')}{\sin (\alpha' - L')} > 0, \quad \sin b' = \frac{\rho'}{a} \sin \beta'.$$

l' et b' sont ainsi déterminés sans ambiguïté.

On obtient l'' et b'' par des formules analogues.

On calcule ensuite l'arc héliocentrique f correspondant aux deux positions de la planète.

Dans le triangle sphérique ayant pour sommet le pôle de l'écliptique et les points P', P'' , on a

$$\cos f = \sin b' \sin b'' + \cos b' \cos b'' \cos (l'' - l'),$$

f est petit, car les observations sont faites à des époques peu éloignées l'une de l'autre, on le calcule par son sinus. On trouve aisément, en partant de la formule précédente,

$$(h') \quad \sin^2 \frac{f}{2} = \sin^2 \frac{b' - b''}{2} + \cos b' \cos b'' \sin^2 \frac{l'' - l'}{2}.$$

La troisième loi de Képler donne, avec les notations habituelles,

$$\frac{r'^2}{dt} = K \sqrt{p},$$

et, en supposant l'orbite circulaire, p et r sont égaux à a . Donc, en intégrant

$$v'' - v' = \frac{K}{a^2} (t'' - t')$$

ou

$$(l') \quad \frac{1}{3} f = \frac{K_1}{a^2} (t'' - t') \quad \left(K_1 = \frac{K}{2} \right),$$

t' , t'' sont exprimés en jours solaires moyens, f en secondes d'arc, et l'on a

$$\log K_1 = 3,2489766.$$

Au moyen de quelques essais et d'une simple interpolation, on arrive rapidement à la valeur de α . On sait que les demi-grands axes des petites planètes sont compris entre 2,2 et 3,5. On fait d'abord $\alpha_0 = 2,5$, on calcule f par les formules (b') , (b'') , (c') , (c'') , (d') , (d'') et (h') d'une part, et par la formule (l') de l'autre. Si la valeur prise pour α était exacte, les deux valeurs trouvées pour f seraient égales; s'il n'en est pas ainsi, on fait plusieurs essais jusqu'à ce que deux substitutions successives donnent, pour les deux valeurs de f , des différences de signe contraire. On achève la détermination de α par interpolation.

On calcule ensuite i , Ω et les arguments de latitude par les mêmes formules que dans la méthode d'Olbers :

$$\left\{ \begin{aligned} \tan i \sin(l' - \Omega) &= \tan i', \\ \tan i \cos(l' - \Omega) &= \frac{\tan l' - \tan l' \cos(l' - l'')}{\sin(l' - l'')}, \\ \tan \alpha' &= \frac{\tan(l' - \Omega)}{\cos i}, \\ \tan \alpha'' &= \frac{\tan(l' - \Omega)}{\cos i'}. \end{aligned} \right.$$

On vérifie les résultats par les formules

$$\begin{aligned} u'' - u' &= v'' - v' = f, \\ \frac{u'' - u'}{l'' - l'} &= \frac{K}{a^2} = \mu. \end{aligned}$$

MODÈLE DE CALCUL D'ORBITE.

Planète 1897. — D. J. (Grandeur 12,5). — Orbite provisoire.

		h^m	s^s	Ascension droite apparente.	Déclinaison apparente.
Nice.....	1897	Sept. 2 à 9.35.0	22.22.12.53		— 4.37.43.0
Vienne.....	1897	" 27 à 11.38.54	22. 6.22.81		— 5.52.36.2
Vienne.....	1897	Oct. 19 à 8.46.12	22. 3.36.20		— 6.17.50.6

PREMIÈRE PARTIE.

Préparation des Observations.

	Première observation.	Deuxième observation.	Troisième observation.
Temps du lieu.....	sept. 2-9 ^h 35 ^m 0	sept. 27-11 ^h 38 ^m 54 ^s	oct. 19-8 ^h 46 ^m 12 ^s
Longit. du lieu + 10 ^m aberr.....	—29.51,2	1. 6.05	1. 6.05
Temps de Paris.....	9 ^h 3 ^m 8 ^s ,8	10 ^h 32 ^m 53 ^s ,5	7 ^h 40 ^m 11 ^s ,5
Temps de Paris.....	2,378574	27,439508	19,314908

Réduction à l'équinoxe de 1897,0.

	Sept..... 2,38	Sept..... 27,44	Oct..... 19,32
δ	— 4.37,7	— 5.52,5	— 6.17,8
δ_A	335,33	331,36	330,54
G	343,45	344,43	346,18
$\delta_A + G$	319,18	316,19	317,12
$\log \tan \delta$	8,9083	— 9,0124	— 9,0427
$\log \sin(\delta_A + G)$	9,8143	— 9,8393	— 9,8322
G	1,3046	1,3256	1,3494
$\cos(\delta_A + G)$	9,8798	9,8592	9,8655
$\log(t)$	0,0272	0,1773	0,2173
$\log(z)$	1,1844	1,1848	1,2079
f	44,53	46,94	49,16
(t)	1,06	1,50	1,65
$f + (t) = R_A$	45,59	48,44	50,81
δ_A	335,33. 7,94	331,35. 42,14	330,54. 2,96
$\delta_A - R_A$	335,32. 22,35	331,34. 53,70	330,53. 12,15
(2)	15,3	15,3	16,1
δ	— 4.37.43,0	— 5.52.36,2	— 6.17.50,6
$\delta - R\delta$	— 4.37.58,3	— 5.52.45,5	— 6.18. 6,7

Coordonnées du $\odot$.

	Première observation.	Deuxième observation.	Troisième observation.
L	160.13.30.95	181.36.49.32	206.21.34.71
ΔL	+58.10.31	+58.58.78	+59.42.48
$\log \Delta L$	3.542864	3.548854	3.551814
$\log \Delta t$	9.578146	9.612969	9.564380
$\log \Delta L \Delta t$	3.112.10.10	3.161.82.3	3.088.76.4
$\Delta L \Delta t$	22.1.34	25.25.32	19.4.88
L	160.35.32.29	185.2.44.64	206.40.39.59
$\log R$	0.0035215	0.0007066	9.997676
$\Delta(\log R)$	-1100	-1251	-1180
$\log \Delta$	+6.041393 _a	6.09726 _a	6.07188
$\log \Delta \Delta t$	5.61954 _a	5.74023 _a	5.56651 _a
$\Delta(\log R) \Delta t$	-415	-549	-377
$\log R$	0.0035800	0.0005517	9.9979999

Transformation des Δ et $\odot$ en longitudes et latitudes β .

Δ	335.32.22.35	331.31.53.70	330.53.12.15
β	-4.37.58.3	-5.52.45.4	-6.18.6.7
$\log \tan \delta$	8.908675	9.012731 _a	+9.043102 _a
$\log \sin \Delta$	9.617069	9.677522 _a	9.687117 _a
$\log \tan N$	9.291606	9.335009	9.355985
N	11.4.23.37	12.12.33.14	12.47.17.63
$N - \epsilon$	23.27.9.46	23.27.9.46	23.27.9.46
$N - \tau$	-12.22.45.89	-11.14.36.38	-10.39.51.83
$\log \cos(N - \tau)$	9.899783	9.991583	9.992433
$\log \tan \Delta$	9.657909 _a	9.733288 _a	9.745771 _a
$\log \sec N$	8161	9036	10909
$\log(t) = \tan \alpha$	9.655853 _a	9.734807 _a	9.749116 _a
α	335.38.29.82	331.29.51.67	330.41.56.2
$\log \tan(N - \tau)$	9.341410 _a	9.208401 _a	9.274870 _a
$\log \sin \alpha$	9.615364 _a	9.67866 _a	9.68666 _a
$\log(x) = \tan \beta$	8.956774	8.977097	8.964532
β	+5.10.21.60	+5.25.8.53	+5.15.55.37
$\log \cos \Delta$	9.959159	9.944233	9.911342
$\log \cos \delta$	9.908578	9.997710	9.997368
$\log \sin \Delta$	9.617069 _a	9.677522 _a	9.687117 _a
$\log \cos \alpha$	9.962553	9.969553	9.969553
$\log \sin \alpha$	8.907253 _a	9.010411 _a	9.040470 _a
$\log \sin \tau$	9.599873	9.599873	9.599873
$\log \cos \delta \sin \Delta$	9.615647	9.65532	9.68485

DEUXIÈME PARTIE.

Calcul des valeurs approchées des distances de la planète de la Terre.

L'	206.40.39.59	N'	0.578250
L''	185.2.44.64	N''	0.508999
L'''	160.35.32.29	β'	+5.15.55.38
$L'' - L'$	21.37.51.95	β''	+5.25.8.51
$L' - L''$	46.5.7.30	β	+5.10.21.65
$L' - L'''$	24.27.12.35	α'	330.41.56.10
$\log \sin(L' - L'')$	9.616652	α''	331.29.51.52
$\log R'$	0.000554	α	335.38.29.73
$\log \sin(L'' - L''')$	9.566605	$\alpha' - \alpha''$	0.47.55.42
$\log R''$	9.997930	$\alpha' - \alpha$	4.56.33.63
$\log \sin(L' - L''')$	9.857558	$\alpha' - \alpha'$	4.8.38.21
$\log R$	0.003580	$\log \cos \beta'$	9.998164
$\log(t)$	9.617061	$\log \sin(\alpha' - \alpha)$	8.935301
$\log(3)$	9.855188	$\log \cos \beta$	9.998228
$\log(x)$	9.567257	$\log \sin(\alpha' - \alpha')$	8.144622 _a
$\log(4)$	9.861138	$\log \cos \beta'$	9.998054
$\log N' = (1) - (3)$	9.762116	$\log \sin(\alpha' - \alpha)$	8.858913 _a
$\log N = (2) - (4)$	9.706119		

$\log \sin \beta' \mid (5) \dots$	8,96366	$\log \sin \Delta' \sin \omega' = (4) \dots$	8,85667 _n	$\alpha' - L' \dots$	170. 1.41,89	$\alpha - L' \dots$	128.57.50,14
$\log \cos \beta' \mid (6) \dots$	9,998228	$\log \sin \Delta' \cos \omega' = (6) \mid (14) \dots$	7,656182	$\log \sin \Delta' \dots$	9,238451	$F' \dots$	— 0. 7. 2,88+180°
$\log \sin \beta' \mid (7) \dots$	8,975151	$\log \cot \omega' \dots$	8,173002	$\log \sin \Delta' \dots$	8,933577	$\alpha - L' + F' \dots$	308.50.47,26
$\log \cos \beta' \mid (8) \dots$	9,998164	$\alpha' \dots$	269. 8.48,19	$\log \frac{\sin(\alpha' - L' + F')}{\sin \Delta'} \mid (1) \dots$		$\alpha - L' + F' \dots$	51. 9.12,71
$\log \sin \beta' \mid (9) \dots$	8,955003	$\log \sin \omega' \dots$	9,99955 _n	$\log R' \dots$	0,304874	$\log \sin(\alpha - L' + F') \dots$	9,89143 _n
$\log \cos \beta' \mid (10) \dots$	9,998654	$\log \cos \omega' \dots$	8,173954 _n	$\log f_1 \dots$	0,003580	$\log \sin \Delta' \dots$	8,933577
$\log \sin \beta' \mid (11) \dots$	8,963666	$\log \sin \Delta' \dots$	8,933577	$\log \alpha_0 = (1) \dots$	9,999952	$I = \frac{\sin(\Delta - L' + F')}{\sin \Delta'} \dots$	0,957866 _n
$\log (5) \dots$	8,960924	$\log \cot \omega' \dots$	9,287598 _n	$\alpha' \dots$	0,308406	$f' \dots$	9,999889
$\log \cos \beta' \mid (12) \dots$	9,998382	$\alpha' \dots$	— 79. 1.33,67	$L' \dots$	330.41.56,10	$R' \dots$	9,997930
$\log (8) \dots$	8,963167	$\log \cos \omega' \dots$	9,279583	$\alpha' - L' \dots$	206.40.39,59	$\log \phi_0 \dots$	0,956685 _n
$\log \sin \beta' \mid (13) \dots$	8,999958	$\log \sin \omega' \dots$	9,991981 _n	$F' \dots$	124. 1.16,51	$\alpha' \dots$	— 86.23.37,26
$\log \cos \beta' \mid (14) \dots$	8,923057	$\log \sin \Delta' \dots$	8,156332	$\alpha' - L' + F' \dots$	— 0. 4.41,92	$\alpha' - \omega' \dots$	— 88.41.50,33
$\log (10) \dots$	9,998863	$\log \cot \omega' \dots$	8,356792 _n	$\log \sin(\alpha' - L' + F') \dots$	123.56.34,59	$\log \cos(\omega' - \omega') \dots$	+ 2.18.13,97
$\log (8) \dots$	8,953167	$\alpha' \dots$	— 88.41.50,33	$\log \sin \Delta' \dots$	9,918866	$\log \sin \Delta' \dots$	9,999649
$\log (11) \dots$	8,959366	$\log \cos \omega' \dots$	9,999888 _n	$\log \sin \Delta' \dots$	8,356680	$\log \sin \Delta' \dots$	8,857828
$\log (7) \dots$	8,973315	$\log \sin \Delta' \dots$	8,933577	$\log \frac{\sin(\alpha' - L' + F')}{\sin \Delta'} \mid (1) \dots$	8,933577	$\log \cos \omega' = \frac{\cos(\omega' - \omega') \sin \Delta'}{\sin \Delta'} \dots$	8,933577
$\log (13) \dots$	8,960708	$\log \cot \omega' \dots$	8,799515 _n	$\log R' \dots$	0,985289	$\alpha - L' \dots$	9,923900
$\log (5) \dots$	8,960924	$\alpha' \dots$	— 86.23.37,26	$\log f' \dots$	9,997930	$\log \sin(\alpha - L) \dots$	175. 2.57,44
$\log (12) \dots$	8,951519	$\log \sin \omega' \dots$	8,798654	$\log \phi_0 = (1) \dots$	9,999952	$\log R' \dots$	8,936004
$\log (6) \dots$	8,973379	$\log \sin \Delta' \dots$	9,999139 _n	$\alpha' \dots$	0,983171	$\log R' \dots$	0,003580
$\log (14) \dots$	8,951920	$\log \cos \omega' \dots$	8,857828	$\omega' \dots$	— 79. 1.33,67	$\log R' \dots$	8,939580
$(8) \dots$	0,089777	$\log \sin \beta' \dots$	8,173954 _n	$\alpha' - \omega' \dots$	269. 8.48,19	$\log \cos(\alpha - L) \dots$	9,998576 _n
$(11) \dots$	0,091055	$\log f_1 \sin F = \cos \omega' \sin \beta' \dots$	8,964696	$\log \cos(\omega' - \omega') \dots$	— 348.10.21,86	$\log R' \dots$	0,003580
$(7) \dots$	0,091041	$\log f_1 \cos F = -\sin \omega' \dots$	7,135650 _n	$\log \sin \Delta' \dots$	9,990681	$\log R' \dots$	— 0,001956
$(13) \dots$	0,091350	$\log \tan F \dots$	9,999952	$\log \sin \Delta' \dots$	8,156332	$\alpha' - L' \dots$	124. 1.16,51
$(5) \dots$	0,091395	$F' \dots$	7,135698 _n	$\log \cos \omega' = \frac{\cos(\omega' - \omega') \sin \Delta'}{\sin \Delta'} \dots$	8,933577	$\log \sin(\alpha' - L') \dots$	9,918166
$(12) \dots$	0,089444	$\log \sin F \dots$	— 0. 4.41,92	$\alpha' \dots$	9,207436	$\log R' \dots$	9,997930
$(6) \dots$	0,094054	$\log f_1 \dots$	7,131794	$L' \dots$	335.38.29,73	$\log R' \dots$	9,916396
$(14) \dots$	0,089520	$\log \cos \omega' \dots$	9,999952	$\alpha - L' \dots$	160.35.32,29	$\log \cos(\alpha' - L') \dots$	9,747800 _n
$(8) \mid (11) \dots$	— 0,001278	$\log \sin \beta' \dots$	8,356680	$F' \dots$	175. 2.57,44	$\log R' \dots$	9,745730
$(7) \mid (13) \dots$	0,002691	$\log f_1 \sin F = \cos \omega' \sin \beta' \dots$	8,955003	$\alpha - L' + F' \dots$	— 0. 7. 2,88+180°	$\alpha' \dots$	330.41.56,10
$(5) \mid (12) \dots$	0,001951	$\log f_1 \cos F = \sin \omega' \dots$	7,1311683	$\alpha - L' + F' \dots$	354.55.51,56	$L' \dots$	160.35.32,29
$(6) \mid (14) \dots$	0,004534	$\log \tan F' \dots$	9,999888 _n	$\alpha - L' + F' \dots$	5. 4. 5,44	$\alpha' - L' \dots$	170. 6.23,81
$\log \sin \Delta' \sin \omega' = (2) \dots$	8,933599 _n	$\log \sin \Delta' \dots$	— 0. 7. 2,88+180°	$\log \sin(\alpha - L' + F') \dots$	8,933577	$L' \dots$	185. 2.44,61
$\log \sin \Delta' \cos \omega' = (8) \mid (11) \dots$	7,106531 _n	$F' \dots$	7,311795	$\log \sin \Delta' \dots$	0,012586 _n	$\alpha' - L' \dots$	145.39.11,46
$\log \sin \Delta' \sin \omega' = (3) \dots$	8,142316 _n	$\log \sin F' \dots$	— 0. 7. 2,88+180°	$\log I = \frac{\sin(\alpha - L' + F')}{\sin \Delta'} \dots$	9,999889	$\alpha' \dots$	335.38.29,73
$\log \sin \Delta' \cos \omega' = (7) \mid (13) \dots$	7,429914	$\log f_1 \dots$	7,311794	$\log f' \dots$	9,999889	$L' \dots$	206.40.39,59
$\log \sin \Delta' \sin \omega' = (1) \dots$	8,933465 _n	$\alpha' \dots$	330.41.56,10	$\log R' \dots$	0,003580	$\alpha - L' \dots$	128.57.50,14
$\log \sin \Delta' \cos \omega' = (5) \mid (12) \dots$	7,290257	$F' \dots$	160.35.32,29	$\log \alpha_0 \dots$	0,016055 _n	$\alpha - L' \dots$	150.35.45,09
				$\alpha' - L' \dots$	335.38.29,73	$\log \sin(\alpha - L) \dots$	8,936004
				$L' \dots$	206.40.39,59	$\log R' \dots$	0,003580
						$\log \sin(\alpha' - L) \dots$	9,235062

T. — P.

$\log \sin(\alpha - L')$	9,890724	$\log \sin(\alpha' - L')$	9,742450	$\log(t_0' - t_0)$	1,3400187	θ_0'	0,1416642
$\log R'$	9,997300	$\log \cos \beta'$	9,998654	$\log(t_0'' - t_0)$	1,6715523	θ_0''	0,6502886
$\log \sin(\alpha'' - L')$	9,890724	$\log \cos(\alpha' - L)$	9,990865 _n	$\log(t_0''' - t_0)$	1,3089972	θ_0'''	0,1858475
$\log \sin(\alpha - L)$	9,691032	$\log \sin \beta'$	8,975151	$\log k$	8,235581	$\theta_0' - \theta_0''$	0,5103644
$\log R'$	0,000652	(1).....	9,740494	$\log \theta_0 = k(t_0' - t_0)$	9,575630	$\theta_0'' - \theta_0'''$	0,466811
$\log \sin(\alpha' - L')$	9,751433	$\log \tan \psi = \sin \beta' - (1)$	9,23657	$\log \theta_0'' = k(t_0'' - t_0)$	9,907134	$\log(9\theta_0'' - \theta_0''^2)$	9,790881
$\log \cos(\alpha' - L')$	9,916789 _n	$\log \cos \delta = -(2)$	9,918919	$\log \theta_0''' = k(t_0''' - t_0)$	9,631578	$\log 3$	0,477121
$\log R'$	0,000652	ψ	9,442468	$\log P_0 = \frac{\theta_0'}{\theta_0''}$	0,058948	$\log(9\theta_0''' - \theta_0'''^2)$	9,668555
$\log \cos(\alpha - L)$	9,940107 _n	δ	33,55,57,14	P_0	1,1453789	$\log \left[Y_0 = \frac{\theta_0'^2 - \theta_0''^2}{3} \right]$	9,230760
$\log R \sin(\alpha - L)$	8,939780	$\log R'$	0,000652	$P_0 + 1$	2,1453789	$\log \left[Y_0 = \frac{\theta_0'^2 - \theta_0''^2}{3} \right]$	0,19434
$\log R \sin(\alpha' - L)$	9,238642	$\log \sin(\alpha' - \alpha)$	8,935301 _n	$\log(P_0 + 1)$	0,331504	$\log \Lambda$	7,88438 _n
$\log R' \sin(\alpha - L')$	9,888654	$\log T \sin \tau = D$	7,744673	$\log S$	7,781563 _n	$\log BP_0$	7,585094 _n
$\log R' \sin(\alpha' - L')$	9,916396	$\log T \cos \tau = R' \sin(\alpha' - \alpha)$	8,935953 _n	$\log B$	7,526145 _n	$\log AY_0$	7,115168 _n
$\log R' \sin(\alpha - L)$	9,691704	$\log \tan \tau$	8,808520 _n	$\log P_0$	0,058949	$\log BP_0 Y_0$	6,656538 _n
$\log R' \sin(\alpha' - L)$	9,750085	ψ	3,40,54,00+180°	$\log BP_0$	7,585094 _n	AY_0	-0,00130377
$\log R' \cos(\alpha' - L')$	9,917444 _n	$\tau + \psi$	9,44,21,68	BP_0	-0,0038468	$BP_0 Y_0$	-0,00059761
$\log R' \cos(\alpha - L)$	9,940759 _n	$\log \sin \tau$	8,807623	A	-0,0076637	$AY_0 + BP_0 Y_0$	0,00190138
$\log R \sin(\alpha - L) \tan \beta' = (1)$	7,904116	$\log T = D - \log \sin \tau$	8,936850	$A + BP_0$	-0,0115105	$\log(AY_0 + BP_0 Y_0)$	7,279069 _n
$\log R \sin(\alpha' - L) \tan \beta' = (2)$	8,195417	$\log T$	8,936850	$\log(A + BP_0)$	8,051094 _n	$\log \Lambda + BP_0$	8,061092 _n
$\log R' \sin(\alpha - L) \tan \beta' = (3)$	8,853186	$\log \sin(\tau + \psi)$	9,033435 _n	$\log(P_0 + 1)S$	8,113067 _n	$\log Q_0$	9,217077
$\log R' \sin(\alpha' - L) \tan \beta' = (4)$	8,83371	$\log C$	9,76612 _n	$\log \cos \sigma$	9,999883	$\log 3L_0$	1,343371
$\log R' \sin(\alpha - L) \tan \beta' = (5)$	8,65636	$\log S \sin(\delta + \sigma) = C \sin \delta$	7,513015 _n	$\log d_0 = \frac{(P_0 + 1)S}{A + BP_0}$	0,051973	$\log 3L_0$	0,563348
$\log R' \sin(\alpha' - L) \tan \beta' = (6)$	8,708860	$\log S \cos(\delta + \sigma) = (1)$	7,707088 _n	$\log d_0 \cos \sigma$	0,051836	$3L_0$	3,650467
$\log R' \sin(\alpha - L) \tan \beta' = (7)$	8,874216 _n	$\log \tan(\delta + \sigma)$	9,805927	$d_0 \cos \sigma - 1$	0,1208237	u_0'	-1°38'43".11
$\log R' \cos(\alpha - L) \tan \beta' = (8)$	8,905591 _n	$\delta + \sigma$	32,36,14,78	$\log \sin \alpha$	8,365295 _n	<i>Résolution de l'équation $M_0 \sin^2 z = \sin(z + u_0')$.</i>	
(1).....	0,0080189	δ	33,55,37,14	$\log d_0 \sin \alpha = (1)$	8,47268 _n		
(2).....	0,0150826	$\log \sin(\delta + \sigma)$	9,731453	$\log(d_0 \cos \sigma - 1) = (II)$	9,103201		
(1)-(2) = A	-0,0070637	$\log \cos(\delta + \sigma)$	9,925525	$\log \tan u_0' = (I) - (II)$	9,316067 _n		
$\log A$	7,884138 _n	$\log S$	7,781563 _n	u_0'	-11,38,43,11		
(3).....	0,0713158	$\log R'$	0,000652	$\log \sin u_0'$	9,305034 _n		
(4).....	0,0746743	$\log R' \sin \delta$	9,768603	$\log \cos u_0'$	9,990907		
(3)-(4) = B	-0,0033585	$\log R' \sin \delta$	9,747455	$\log \Omega_0 = (I) - \log \sin u_0'$	9,112334		
$\log B$	7,506145 _n	$\log(R' \sin \delta)^2$	9,24365	$\log 3L_0'$	0,456005		
(5).....	0,0453144	$\log \alpha(R' \sin \delta)^2$	0,301030	$\log \frac{3L_0'}{\Omega_0}$	1,344371		
(6).....	0,0511517	$\log 3L_0'$	0,456005	$\log \frac{\Omega_0}{3L_0'}$	9,151260	$\log \sin(z_0 + i') - \log \sin z_0 = a$ $\left\{ \begin{array}{l} \log \sin(z_0 + u_0' + i') \\ - \log \sin(z_0 + u_0') \end{array} \right\} = b$	
(5)-(6) = C	-0,0058373	$\log \Omega_0$	2,378574	$\log \theta_0'$	9,151260		
$\log C$	7,76612 _n	$\log \Omega_0'$	27,430508	$\log \theta_0''$	9,814967		
(7).....	-0,0748542	$\log \Omega_0'$	49,319578	$\log \theta_0'''$	9,269157		
(8).....	-0,0804665	$\log \Omega_0' - \log \Omega_0$	21,880070			$\log(b \times 10^7)$	
(7)-(8) = D	0,005523	$\log \Omega_0' - \log \Omega_0$	46,941004				
$\log D$	7,744473		25,060934				

$\log(b-4a)10^7$	3,455454	$\log \sin(\delta-z)$	9,571555	$\log(N-n')$	8,655336
$\log \frac{h}{b-4a} = \varepsilon$	1,935004	$\log R'$	0,000652	$\log b_0$	0,983171
ε	+ 86', 10	$\log R' \sin(\delta-z)$	9,572177	$\log b_0(N-n')$	9,608607
$z_0 + \varepsilon = z_1$	23, 26, 10	$\log \sin z$	9,319356	$\log c_0$	9,207436
$z_1 + \alpha^0$	23, 42, 99	$\log \left[\frac{r}{r'} = \frac{R' \sin(\delta-z)}{\sin z} \right]$	0,252821	$\log p'$	0,252821
$\log \sin z_1$	9,319323	$\log \sin \delta$	9,746803	$\log c_0 p'$	9,460257
$\log \sin^2 z_1$	7,277292	$\log R' \sin \delta$	9,747455	$(N-n)\alpha_0$	0,081614
$\log 2R_0$	0,562348	$\log \left[\frac{r}{r'} = \frac{R' \sin \delta}{\sin z} \right]$	0,428099	$(N-n')b_0$	0,406075
$\log 2R_0 \sin^2 z_1$	7,839610	$\log r'^2$	1,284297	$c_0 p'$	0,288574
$\log \sin(z_1 + \alpha^0)$	7,838773	$\log z$	0,301030	I	0,776263
H'	0,000867	$\log Y_0$	9,230760	$\log I$	9,800009
$a' \times 10^7$	99	$\log 2r'^2$	1,583227	$\log n$	0,670412
$b' \times 10^7$	3650	$\log \frac{Y_0}{2r'^2}$	7,645433	$\log p$	0,219597
$(b'-4a')10^7$	2654	$1 + \frac{Y_0}{2r'^2}$	1,004420	$\log(N-n)$	8,603361
$\log H' \times 10^7$	3,938819	$\log \left(1 + \frac{Y_0}{2r'^2} \right)$	0,001916	$\log a_0$	0,016055
$\log(b'-4a')10^7$	3,423091	$\log \theta_0 \left(1 + \frac{Y_0}{2r'^2} \right)$	9,575630		
$\log \varepsilon'$	0,514118	$\log \theta_0 \left(1 + \frac{Y_0}{2r'^2} \right)$	9,577546		
ε'	3', 27	$\log \theta_0'$	9,907134		
$z_1 + \alpha^0 = z'$	23, 46, 26	$\log n$	9,670412		
$\log \sin z_1$	9,319356	$\log Y_0$	9,194434		
$\log \sin^2 z_1$	7,277292	$\log 2r'^2$	1,285327		
$\log 2R_0 \sin^2 z_1$	7,839772	$1 + \frac{Y_0}{2r'^2}$	1,004037		
$\log \sin(z_1 + \alpha^0)$	7,839770				
H'	0,000002				
$(b'-4a')10^7$	2644				
$\log H' \times 10^7$	3,938819				
$\log(b'-4a')10^7$	3,423091				
$\log \varepsilon'$	0,514118				
ε'	3', 27				
$z = z_1 + \varepsilon'$	23, 46, 27				
$z + \alpha^0$	23, 46, 27				
$\log \sin z$	9,319356				
$\log \sin^2 z$	7,277292				
$2R_0$	0,562348				
$\log 2R_0 \sin^2 z$	7,839772				
$\log \sin(z + \alpha^0)$	7,839773				
z	23, 46, 27				
δ	33, 55, 57, 14				
$\delta - z$	21, 53, 27, 76				

TROISIÈME PARTIE.

Calcul des lieux extrêmes.

Correction de l'aberration pour les coordonnées du $\odot$.

	Première observation.	Troisième observation.
L	160.35.23,18	306.40.22,89
α	335.38.29,73	330.41.56,10
$\alpha - L$	175. 3. 6,55	124. 1.33,21
$\log \sin(\alpha - L)$	8,935783	9,918442
$\log R$	0,003580	9,997930
$\log \cos(\alpha - L)$	9,998378	9,767852
$\log [R \sin(\alpha - L) = R_s]$	8,939363	9,916372
$\log [R \cos(\alpha - L) = R_c]$	0,001958	9,745782
$\log \sin \beta$	8,955003	8,962696
$\log p$	0,219597	0,303970
$\log \cos \beta$	9,998228	9,998161
$\log p \cos \beta$	0,217825	0,302140
$\log p \sin \beta$	9,175600	9,996672
$-R_c$	+1,004519	+0,556906
$p \cos \beta$	+1,611966	+2,005118
$p \cos \beta - R_c$	2,616485	2,562024
$\log(p \cos \beta - R_c) = (1)$	0,424198	0,408583
$\log [r \cos / \sin(l-n) = R_s]$	8,939363	9,916372

$\log \Sigma$	9,489046	μ	2,840825
$\log \tan \frac{1}{2} w$	9,489046	w	34.16.28,10
$\log \tan \frac{E'}{2}$	9,567782	$2f$	5.55.31,48
$\log \tan \left(45 + \frac{p}{2}\right) \Sigma$	0,656885	w'	45.18.12,14
$\log \Sigma$	9,620467	$2f$	5. 6.11,91
$\log \tan \frac{1}{2} w'$	9,620467	$w + 2f$	40.11.50,58
$\log \frac{1}{2} w'$	0,002458	$w' - 2f$	40.12. 0,23
$\log r' r'$	0,856137	w'	40.11.50, 9
$\log \sin 2f$	9,281755	$\frac{1}{2} w'$	20. 6. 0, 0
$\log \Sigma$	0,140300	$\log \tan \frac{1}{2} w'$	9,503419
$\log \Sigma^2$	0,280640	$\log \tan (45 + \frac{1}{2} \varphi)$	0,052685
$\log \varphi^2$	9,814228	$\log \tan \frac{E'}{2}$	9,510734
$\log \varphi$	0,466412	E'	17.57.34, 7
$\log \sec^2 \varphi$	0,00376	E'	35.55. 9, 4
$\log \sec \varphi$	0,00188	$\log \sin E'$	9,768375
$\log (a = p \sec^2 \varphi)$	0,472788	$\log e'$	4,366210
$\log a^2$	1,418364	$\log e' \sin E'$	4,164585
$\log a^{\frac{1}{2}}$	0,709182	$\log e' \sin^2 E'$	4. 3.27, 8
$\log K_1$	3,550007	$M = E' - e' \sin E'$	31.51.41, 6
$\log K_1$	3,550007	t	2,375964
$\log \left(\mu = \frac{K_1}{a}\right)$	2,840825	t'	27,436128
$\log \sin \varphi$	9,081785	t''	49,34908
$\log \frac{1}{\sin^2 \varphi}$	5,314425	$t' - t$	25,06064
$\log E'$	9,813191	$t' - t'$	21,878780
$\log \left[e' = \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \varphi}\right]$	4,366210	$\log (t' - t)$	1,398984
$\log \sin E$	9,706145	$\log (t' - t) \mu$	2,840825
$\log e' \sin E$	4,102355	$\log (t' - t) \mu^2$	1,340023
$\log e' \sin^2 E$	4,209401	$\log (t' - t) \mu^3$	4,239809
E	30.33. 9,32	M	4,180848
$e' \sin E$	3,30.57,70	$(t' - t) \mu$	27. 2.11,62
E'	40.34.22,48	M'	4,49.30,36
$e' \sin E'$	4.20.55,74	$(t' - t) \mu^2$	36. 4.26,74
M'	36. 4.26,74	$M + (t' - t) \mu$	4.12.45,21
M	27. 2.11,62	$M - (t' - t) \mu$	31.51.41,08
$M' - M$	9. 2.15,12	φ	31.51.41,53
$\log (M' - M)$	4,523553	$\log \sin \varphi$	6.56. 1,48
$\log (t' - t)$	1,671533	$\log \cos E$	9,081785
$\log \frac{M' - M}{t' - t}$	2,840820	$\log \cos E'$	9,935085
		$\log \cos E''$	9,908402
		$\log \cos E'''$	9,886573

T. — P.

$\log \sin \varphi \cos E$	9,016870	$\log [\tan i \sin (l - \Omega) = \tan b]$	8,750169
$\log \sin \varphi \cos E'$	8,990187	$\log \tan (l - \Omega)$	9,903520
$\log \sin \varphi \cos E''$	8,962358	$l - \Omega$	38.41.14,88
$\sin \varphi \cos E$	0,103961	$\log \sin (l - \Omega)$	9,795930
$\sin \varphi \cos E'$	0,097666	$\log \cos (l - \Omega)$	9,894411
$\sin \varphi \cos E''$	0,091698	$\log \tan i$	8,954339
$1 - \sin \varphi \cos E$	0,896039	$\log \tan i'$	8,954338
$1 - \sin \varphi \cos E'$	0,902334	i	5° 33', 8
$1 - \sin \varphi \cos E''$	0,908302	l	337.31. 1,78
$\log (1 - \sin \varphi \cos E)$	9,953227	$l - \Omega$	38.41.14,88
$\log (1 - \sin \varphi \cos E')$	9,955319	Ω	298.49.46,90
$\log (1 - \sin \varphi \cos E'')$	9,958330	l''	318.32.41,66
$\log a$	0,472788	$l' - \Omega$	49.42.54,76
$\log a + \log (1 - \sin \varphi \cos E)$	0,425115	$\log \tan (l - \Omega)$	9,903520
$\log a + \log (1 - \sin \varphi \cos E')$	0,428107	$\log \cos i$	9,998248
$\log a + \log (1 - \sin \varphi \cos E'')$	0,431018	$\log \tan (l' - \Omega)$	0,071807
$\log r$	0,425117	$\log \tan a$	9,905272
$\log r'$	0,438099	$\log \tan a'$	0,073559
$\log r''$	0,431020	u	38.48. 1,16
		u'	49.40.45,34
$\log \tan b$	8,750169	Ω	298.49.46,90
$\log \cos (l' - l)$	9,991906	$2f$	11. 1.44,04
$\log \tan b \cos (l' - l)$	8,750075	$u' - u$	11. 1.44,08
$\log \tan b'$	8,836673	$u + \Omega$	337.37.48,06
$-\tan b \cos (l' - l) \Sigma$	-0,0552173	$u' + \Omega$	34.16.28,10
$\tan b'$	0,0686551	$u'' + \Omega$	348.30.32,14
Σ	0,0134478	u''	45.18.12,14
$\log \Sigma$	8,128329	w	303.21.19,96
$\log \sin (l' - l)$	9,281680	w'	303.21.20,00
$\log \left[\tan i \cos (l - \Omega) = \frac{\Sigma}{\sin (l' - l)} \right]$	8,846649		

VÉRIFICATION FINALE.

Détermination des constantes de Gauss.

$\log \tan g i$	8,95238	$\log \sin b = (7) - \log \sin B$	9,951206
$\log \cos \Omega$	9,68334	$\log \sin c = (8) - \log \sin C$	9,646459
$\log \left[\tan g i = \frac{\tan g f}{\cos \Omega} \right]$	9,271004	C.....	308. 5.55, 0
N.....	10.31.19, 3	B.....	296.44.24, 62
ε	23.27. 9, 5	C - B.....	11.21.30, 4
N + ε	34. 1.28, 8	$\log \sin (C - B)$	9,29348
$\log \cos N$	9,952564	$\log \sin b$	9,951206
$\log \tan g \Omega$	0,252988 ^a	$\log \sin c$	9,646459
$\log \cos i$	9,998248	$\log \sin a$	9,998657
$\log \cos (N + \varepsilon)$	9,918448	$\log \cos A$	9,941123
$\log \cos i$	9,998248	(9).....	9,998657
$\log \sin (N + \varepsilon)$	9,747858	(10).....	9,941123
$\log \cos \varepsilon$	9,96553	$\log \sin a$	9,998657
$\log (1)$	0,251862 ^a	(9)-(10).....	8,892013
$\log \sin \varepsilon$	9,599874	$\log \tan g i$	9,940780
$\log (3)$	9,916696	π	303.21.19,98
$\log (5)$	0,21415 ^a	Ω	298.49.46,90
$\log (4)$	9,746886	$\pi - \Omega$	4.31.33,08
$\log (6)$	9,851736 ^a	μ'	40.11.59,91
$\log [-\cot A] = (2)$	-0,257546	μ	44.43.39,99
$\log \cot B = (3)-(5)$	-9,702081	t	2,375961
$\log \cot C = (4)-(6)$	-9,894350	T_0	31,000000
A.....	28.55.38,80	$T_0 - t$	49.314916
B.....	296.44.24,62	$T_0 - T_0$	28.624039
C.....	308. 5.55,00	$\log (T_0 - t)$	18.314916
$\log \cos \varepsilon$	9,962553	$\log \mu$	1,456731
$\log \sin \Omega$	9,94232 ^a	$\log (T_0 - T_0)$	2,840855
$\log \sin \varepsilon$	9,511874	$\log (T_0 - T_0)$	1,202805
$\log \sin A$	9,683234	$\log \mu (T_0 - t)$	4,297556
$\log (7)$	9,684577	$\log \mu (T_0 - T_0)$	4,103630
$\log \sin B$	9,995085 ^a	M.....	27. 2.11,62
$\log \sin C$	9,950879 ^a	$\mu (T_0 - t)$	5.30.40,64
$\log (8)$	9,542406 ^a	M'.....	36. 4.26,74
$\log \sin C$	9,895947 ^a	$-\mu (T_0 - T_0)$	- 3.31.34,91
$\log \left[\sin a = \frac{\cos \Omega}{\sin A} \right]$	9,998657	$M_0 = (I)$	32.32.52,26
		$M_0 = (II)$	32.32.51,83
		w	303.21.19,98
		$L_0 = M_0 + w$	333.54.12,03

Longitude moyenne de la planète pour 1897 octobre 1.

Coordonnées rectilignes de la planète.

	Première observation.	Deuxième observation.	Troisième observation.
u	38.48. 1,2	44.43.33,0	49.49.44,2
$u + A$	67.43.40,0	73.39.11,8	78.45.24,0
$u + B$	335.32.25,8	341.27.57,6	348.34. 9,8
$u + C$	346.53.56,2	352.49.28,0	357.55.40,2
$\log \sin (u + A)$	9,966326	9,982079	9,991584
$\log r$	0,425117	0,428099	0,431020
$\log \sin a$	9,998657	9,998657	9,998657
$\log \sin (u + B)$	+ 9,617053 ^a	9,502416 ^a	9,365989 ^a
$\log \sin b$	9,951206	9,951206	9,951206
$\log r$	0,425117	0,428099	0,431020
$\log \sin (u + C)$	9,355393 ^a	9,096587 ^a	8,558207 ^a
$\log r$	0,425117	0,428099	0,431020
$\log \sin c$	9,646459	9,646459	9,646459
$\log x = (1)$	0,390100	0,408835	0,421261
$\log y = (12)$	9,996576 ^a	9,884551 ^a	9,751215 ^a
$\log z = (13)$	9,426969 ^a	9,171145 ^a	8,635686 ^a
x	2,455272	2,563512	2,637918
y	- 0,991690	- 0,766568	- 0,563917
z	- 0,267282	- 0,148301	- 0,043220

Coordonnées rectilignes du $\odot$.

Temps corrigés	sept. 2,375961	sept. 27,436135	oct. 19,314916
$2X$ fract. de jour = δt	0,1751922	0,822270	0,699832
$\Delta_1 X$	-27319	+ 8712	+39917
$\Delta_2 X$	+ 690	+ 738	+ 667
$\Delta_1 Y$	-7442	-78813	-70324
$\Delta_2 Y$	+ 215	- 66	+ 310
$\Delta_1 Z$	-32163	-34018	-30512
$\Delta_2 Z$	- 93	- 29	+ 135
$\log \delta t$	9,876173	9,940651	9,799224
$\log \Delta_1 X$	4,436465	3,940118	4,601158
$\log \Delta_1 Y$	4,870064	4,804388	4,871004
$\log \Delta_1 Z$	4,507357	4,531709	4,484471
$\log \Delta_2 X$	4,316338	3,880769	4,400382
$\log \Delta_2 Y$	4,716937	4,835639	4,616328
$\log \Delta_2 Z$	4,383530	4,472360	4,283695
$\frac{\delta t}{\delta t - 1}$	- 0,093	- 0,056	- 0,117
X	- 0,9489100	- 0,9983826	- 0,8918415
$\Delta_1 X$	- 20542	+ 7600	+ 25141
$\Delta_2 X$	- 64	- 3	- 36
Y	+ 0,3109740	- 0,0739117	- 0,4051235

TABLE I (Table VIII d'Oppolzer).

λ	$\log \gamma$	Diff.	λ	$\log \gamma$	Diff.	λ	$\log \gamma$	Diff.
0,0000	0,00000000	+965	0,0060	0,0057298	+975	0,0120	0,0113417	+985
0,0001	0,0000955	+965	0,0061	0,0058253	+975	0,0121	0,0114351	+985
0,0002	0,0001910	+964	0,0062	0,0059197	+974	0,0122	0,0115285	+985
0,0003	0,0002865	+964	0,0063	0,0060141	+974	0,0123	0,0116219	+985
0,0004	0,0003820	+963	0,0064	0,0061085	+974	0,0124	0,0117153	+985
0,0005	0,0004775	+963	0,0065	0,0062029	+973	0,0125	0,0118087	+984
0,0006	0,0005730	+963	0,0066	0,0062973	+973	0,0126	0,0119021	+984
0,0007	0,0006685	+962	0,0067	0,0063917	+972	0,0127	0,0119955	+984
0,0008	0,0007640	+962	0,0068	0,0064861	+972	0,0128	0,0120889	+983
0,0009	0,0008595	+962	0,0069	0,0065805	+971	0,0129	0,0121823	+983
0,0010	0,0009550	+961	0,0070	0,0066749	+971	0,0130	0,0122757	+983
0,0011	0,0010505	+961	0,0071	0,0067693	+971	0,0131	0,0123691	+982
0,0012	0,0011460	+961	0,0072	0,0068637	+971	0,0132	0,0124625	+982
0,0013	0,0012415	+961	0,0073	0,0069581	+970	0,0133	0,0125559	+982
0,0014	0,0013370	+960	0,0074	0,0070525	+970	0,0134	0,0126493	+981
0,0015	0,0014325	+960	0,0075	0,0071469	+970	0,0135	0,0127427	+981
0,0016	0,0015280	+959	0,0076	0,0072413	+970	0,0136	0,0128361	+981
0,0017	0,0016235	+959	0,0077	0,0073357	+969	0,0137	0,0129295	+981
0,0018	0,0017190	+959	0,0078	0,0074301	+969	0,0138	0,0130229	+980
0,0019	0,0018145	+959	0,0079	0,0075245	+969	0,0139	0,0131163	+980
0,0020	0,0019100	+958	0,0080	0,0076189	+968	0,0140	0,0132097	+980
0,0021	0,0020055	+958	0,0081	0,0077133	+968	0,0141	0,0133031	+979
0,0022	0,0021010	+957	0,0082	0,0078077	+968	0,0142	0,0133965	+979
0,0023	0,0021965	+957	0,0083	0,0079021	+967	0,0143	0,0134899	+979
0,0024	0,0022920	+957	0,0084	0,0079965	+967	0,0144	0,0135833	+978
0,0025	0,0023875	+956	0,0085	0,0080909	+967	0,0145	0,0136767	+978
0,0026	0,0024830	+956	0,0086	0,0081853	+966	0,0146	0,0137701	+978
0,0027	0,0025785	+956	0,0087	0,0082797	+966	0,0147	0,0138635	+977
0,0028	0,0026740	+955	0,0088	0,0083741	+966	0,0148	0,0139569	+977
0,0029	0,0027695	+955	0,0089	0,0084685	+965	0,0149	0,0140503	+977
0,0030	0,0028650	+955	0,0090	0,0085629	+965	0,0150	0,0141437	+976
0,0031	0,0029605	+954	0,0091	0,0086573	+965	0,0151	0,0142371	+976
0,0032	0,0030560	+954	0,0092	0,0087517	+964	0,0152	0,0143305	+976
0,0033	0,0031515	+954	0,0093	0,0088461	+964	0,0153	0,0144239	+975
0,0034	0,0032470	+953	0,0094	0,0089405	+964	0,0154	0,0145173	+975
0,0035	0,0033425	+953	0,0095	0,0090349	+963	0,0155	0,0146107	+975
0,0036	0,0034380	+953	0,0096	0,0091293	+963	0,0156	0,0147041	+974
0,0037	0,0035335	+953	0,0097	0,0092237	+963	0,0157	0,0147975	+974
0,0038	0,0036290	+952	0,0098	0,0093181	+962	0,0158	0,0148909	+974
0,0039	0,0037245	+952	0,0099	0,0094125	+962	0,0159	0,0149843	+973
0,0040	0,0038200	+952	0,0100	0,0095069	+962	0,0160	0,0150777	+973
0,0041	0,0039155	+951	0,0101	0,0096013	+961	0,0161	0,0151711	+973
0,0042	0,0040110	+951	0,0102	0,0096957	+961	0,0162	0,0152645	+973
0,0043	0,0041065	+950	0,0103	0,0097901	+961	0,0163	0,0153579	+972
0,0044	0,0042020	+950	0,0104	0,0098845	+960	0,0164	0,0154513	+972
0,0045	0,0042975	+950	0,0105	0,0099789	+960	0,0165	0,0155447	+972
0,0046	0,0043930	+950	0,0106	0,0100733	+959	0,0166	0,0156381	+971
0,0047	0,0044885	+949	0,0107	0,0101677	+959	0,0167	0,0157315	+971
0,0048	0,0045840	+949	0,0108	0,0102621	+959	0,0168	0,0158249	+971
0,0049	0,0046795	+949	0,0109	0,0103565	+959	0,0169	0,0159183	+970
0,0050	0,0047750	+948	0,0110	0,0104509	+958	0,0170	0,0160117	+970
0,0051	0,0048705	+948	0,0111	0,0105453	+958	0,0171	0,0161051	+970
0,0052	0,0049660	+947	0,0112	0,0106397	+958	0,0172	0,0161985	+970
0,0053	0,0050615	+947	0,0113	0,0107341	+957	0,0173	0,0162919	+969
0,0054	0,0051570	+947	0,0114	0,0108285	+957	0,0174	0,0163853	+969
0,0055	0,0052525	+946	0,0115	0,0109229	+956	0,0175	0,0164787	+969
0,0056	0,0053480	+946	0,0116	0,0110173	+956	0,0176	0,0165721	+968
0,0057	0,0054435	+945	0,0117	0,0111117	+955	0,0177	0,0166655	+968
0,0058	0,0055390	+945	0,0118	0,0112061	+955	0,0178	0,0167589	+968
0,0059	0,0056345	+945	0,0119	0,0113005	+954	0,0179	0,0168523	+967
0,0060	0,0057300	+944	0,0120	0,0113949	+954	0,0180	0,0169457	+967

Première observation.	Deuxième observation.	Troisième observation.
— 55°49	— 68°37	— 44°32
— 20	— 3	— 36
— 0,1357744	— 0,0320571	— 0,158830
— 24°184	— 29°73	— 19°17
— 9	— 2	— 16
— 0,50971	— 0,097697	— 0,889335
— 2,455272	— 2,563512	— 2,63918
— 0,307401	— 0,080752	— 0,408856
— 0,991690	— 0,766568	— 0,563917
— 0,133357	— 0,035035	— 0,177806
— 0,267282	— 0,148301	— 0,613220
— 1,501301	— 1,565885	— 1,718583
— 0,684289	— 0,847320	— 0,972773
— 0,133925	— 0,183336	— 0,221036
— 0,177334	— 0,197600	— 0,246886
— 0,832392	— 0,928647	— 0,988457
— 0,679052	— 0,733287	— 0,757712
— 24,27,36,91	— 28,25,6,00	— 20,6,47,11
— 335,32,23,09	— 331,34,54,00	— 336,53,12,86
— 335,32,22,35	— 331,34,53,70	— 336,53,12,15
— 0,617066	— 0,677521	— 0,687114
— 0,959160	— 0,914343	— 0,941343
— 0,218174	— 0,250596	— 0,303413
— 0,218173	— 0,250596	— 0,303413
— 0,126862	— 0,263248	— 0,344412
— 8,908689	— 9,012722	— 9,043100
— 4,37,38,83	— 5,52,45,0	— 6,18,6,6
— 4,37,38,3	— 5,52,45,0	— 6,18,6,7
— 0°,7	— 0°,3	— 0°,5
— 0°,7	— 0°,3	— 0°,5

Éléments de la planète 1897 D. J.

Époque..... 1897.	Octobre..... 1,0.	Temps civil de Paris.
L_0	335.54.12,03	6°56'1",48
π	363.21.19,98	
Ω	298.49.46,90	69°15
i	5°33',8	0,472788

TABLE I (Table VIII d'Oppolzer, suite).

λ	log γ	Diff.	λ	log γ	Diff.	λ	log γ	Diff.
0,0180	0,016 8412	+907	0,0240	0,022 2330	+890	0,0300	0,027 5213	+873
0,0181	0,016 9319	+907	0,0241	0,022 3220	+889	0,0301	0,027 6091	+873
0,0182	0,017 0235	+907	0,0242	0,022 4098	+889	0,0302	0,027 6964	+873
0,0183	0,017 1151	+907	0,0243	0,022 4998	+889	0,0303	0,027 7836	+872
0,0184	0,017 2069	+906	0,0244	0,022 5887	+889	0,0304	0,027 8708	+872
0,0185	0,017 2945	+906	0,0245	0,023 6766	+888	0,0305	0,027 9580	+872
0,0186	0,017 3851	+906	0,0246	0,023 7654	+888	0,0306	0,028 0452	+872
0,0187	0,017 4757	+905	0,0247	0,023 8542	+888	0,0307	0,028 1323	+871
0,0188	0,017 5677	+905	0,0248	0,023 9440	+888	0,0308	0,028 2191	+871
0,0189	0,017 6597	+904	0,0249	0,024 0338	+887	0,0309	0,028 3065	+871
0,0190	0,017 7521	+904	0,0250	0,024 1236	+887	0,0310	0,028 3936	+870
0,0191	0,017 8450	+904	0,0251	0,024 2155	+886	0,0311	0,028 4806	+870
0,0192	0,017 9383	+903	0,0252	0,024 3085	+886	0,0312	0,028 5676	+870
0,0193	0,018 0321	+903	0,0253	0,024 3985	+886	0,0313	0,028 6546	+869
0,0194	0,018 1267	+903	0,0254	0,024 4906	+886	0,0314	0,028 7415	+869
0,0195	0,018 2209	+903	0,0255	0,024 5836	+885	0,0315	0,028 8284	+869
0,0196	0,018 3150	+903	0,0256	0,024 6767	+885	0,0316	0,028 9153	+869
0,0197	0,018 4098	+903	0,0257	0,024 7707	+885	0,0317	0,029 0022	+868
0,0198	0,018 5048	+902	0,0258	0,024 8637	+885	0,0318	0,029 0890	+868
0,0199	0,018 5990	+901	0,0259	0,024 9567	+884	0,0319	0,029 1758	+868
0,0200	0,018 6931	+901	0,0260	0,025 0497	+884	0,0320	0,029 2626	+868
0,0201	0,018 7874	+901	0,0261	0,025 1427	+883	0,0321	0,029 3491	+867
0,0202	0,018 8816	+901	0,0262	0,025 2357	+883	0,0322	0,029 4361	+867
0,0203	0,018 9759	+900	0,0263	0,025 3287	+883	0,0323	0,029 5238	+867
0,0204	0,019 0705	+900	0,0264	0,025 4217	+883	0,0324	0,029 6095	+866
0,0205	0,019 1645	+900	0,0265	0,025 5147	+883	0,0325	0,029 6951	+866
0,0206	0,019 2585	+900	0,0266	0,025 6077	+883	0,0326	0,029 7807	+866
0,0207	0,019 3525	+899	0,0267	0,025 6997	+882	0,0327	0,029 8663	+865
0,0208	0,019 4465	+899	0,0268	0,025 7917	+882	0,0328	0,029 9519	+865
0,0209	0,019 5405	+899	0,0269	0,025 8837	+882	0,0329	0,030 0375	+865
0,0210	0,019 6345	+899	0,0270	0,025 9757	+881	0,0330	0,030 1230	+865
0,0211	0,019 7285	+898	0,0271	0,026 0677	+881	0,0331	0,030 2154	+865
0,0212	0,019 8225	+898	0,0272	0,026 1597	+881	0,0332	0,030 3019	+864
0,0213	0,019 9165	+898	0,0273	0,026 2517	+881	0,0333	0,030 3883	+864
0,0214	0,020 0105	+898	0,0274	0,026 3437	+880	0,0334	0,030 4747	+864
0,0215	0,020 1045	+897	0,0275	0,026 4357	+880	0,0335	0,030 5611	+864
0,0216	0,020 1985	+897	0,0276	0,026 5277	+880	0,0336	0,030 6475	+863
0,0217	0,020 2925	+897	0,0277	0,026 6197	+880	0,0337	0,030 7338	+863
0,0218	0,020 3865	+896	0,0278	0,026 7117	+879	0,0338	0,030 8201	+863
0,0219	0,020 4805	+896	0,0279	0,026 8037	+879	0,0339	0,030 9064	+862
0,0220	0,020 5745	+895	0,0280	0,026 8957	+879	0,0340	0,031 0006	+862
0,0221	0,020 6685	+895	0,0281	0,026 9877	+878	0,0341	0,031 0926	+862
0,0222	0,020 7625	+895	0,0282	0,027 0797	+878	0,0342	0,031 1846	+862
0,0223	0,020 8565	+895	0,0283	0,027 1717	+878	0,0343	0,031 2766	+861
0,0224	0,020 9505	+894	0,0284	0,027 2637	+877	0,0344	0,031 3686	+861
0,0225	0,021 0445	+894	0,0285	0,027 3557	+877	0,0345	0,031 4606	+861
0,0226	0,021 1385	+894	0,0286	0,027 4477	+877	0,0346	0,031 5526	+861
0,0227	0,021 2325	+894	0,0287	0,027 5397	+877	0,0347	0,031 6446	+860
0,0228	0,021 3265	+893	0,0288	0,027 6317	+877	0,0348	0,031 7366	+860
0,0229	0,021 4205	+893	0,0289	0,027 7237	+876	0,0349	0,031 8286	+860
0,0230	0,021 5145	+893	0,0290	0,027 8157	+876	0,0350	0,031 9206	+859
0,0231	0,021 6085	+893	0,0291	0,027 9077	+875	0,0351	0,032 0126	+859
0,0232	0,021 7025	+893	0,0292	0,028 0007	+875	0,0352	0,032 1046	+859
0,0233	0,021 7965	+892	0,0293	0,028 0927	+875	0,0353	0,032 1966	+859
0,0234	0,021 8905	+892	0,0294	0,028 1847	+875	0,0354	0,032 2886	+858
0,0235	0,021 9845	+892	0,0295	0,028 2767	+874	0,0355	0,032 3806	+858
0,0236	0,022 0785	+892	0,0296	0,028 3687	+874	0,0356	0,032 4726	+858
0,0237	0,022 1725	+891	0,0297	0,028 4607	+874	0,0357	0,032 5646	+858
0,0238	0,022 2665	+891	0,0298	0,028 5527	+874	0,0358	0,032 6566	+857
0,0239	0,022 3605	+890	0,0299	0,028 6447	+873	0,0359	0,032 7486	+857
0,0240	0,022 4545	+890	0,0300	0,028 7367	+873	0,0360	0,032 8406	+857

TABLE I (Table VIII d'Oppolzer, suite).

λ	log γ	Diff.	λ	log γ	Diff.	λ	log γ	Diff.
0,036	0,032 7120	+8557	0,096	0,079 0617	+7251	0,156	0,120 5735	+6318
0,037	0,032 8040	+8557	0,097	0,080 0000	+7253	0,157	0,121 2053	+6304
0,038	0,032 8960	+8505	0,098	0,081 0000	+7215	0,158	0,121 8371	+6290
0,039	0,032 9880	+8579	0,099	0,082 0000	+7215	0,159	0,122 4689	+6276
0,040	0,033 0800	+8434	0,100	0,083 0000	+7186	0,160	0,123 0997	+6262
0,041	0,033 1720	+8439	0,101	0,084 0000	+7161	0,161	0,123 7315	+6248
0,042	0,033 2640	+8403	0,102	0,085 0000	+7145	0,162	0,124 3633	+6234
0,043	0,033 3560	+8478	0,103	0,086 0000	+7116	0,163	0,125 0000	+6220
0,044	0,033 4480	+8438	0,104	0,087 0000	+7116	0,164	0,125 6367	+6206
0,045	0,033 5400	+8430	0,105	0,088 0000	+7110	0,165	0,126 2734	+6192
0,046	0,033 6320	+8364	0,106	0,089 0000	+7092	0,166	0,126 9101	+6178
0,047	0,033 7240	+8340	0,107	0,090 0000	+7077	0,167	0,127 5468	+6164
0,048	0,033 8160	+8386	0,108	0,091 0000	+7058	0,168	0,128 1835	+6150
0,049	0,033 9080	+8333	0,109	0,092 0000	+7041	0,169	0,128 8202	+6136
0,050	0,034 0000	+8307	0,110	0,093 0000	+7007	0,170	0,129 4569	+6122
0,051	0,034 0920	+8344	0,111	0,094 0000	+6990	0,171	0,130 0936	+6108
0,052	0,034 1840	+8184	0,112	0,095 0000	+6971	0,172	0,130 7303	+6094
0,053	0,034 2760	+8133	0,113	0,096 0000	+6971	0,173	0,131 3670	+6080
0,054	0,034 3680	+8113	0,114	0,097 0000	+6960	0,174	0,132 0037	+6066
0,055	0,034 4600	+8089	0,115	0,098 0000	+6941	0,175	0,132 6404	+6052
0,056	0,034 5520	+8067	0,116	0,099 0000	+6931	0,176	0,133 2771	+6038
0,057	0,034 6440	+8041	0,117	0,100 0000	+6908	0,177	0,133 9138	+6024
0,058	0,034 7360	+8041	0,118	0,101 0000	+6890	0,178	0,134 5505	+6010
0,059	0,034 8280	+7998	0,119	0,102 0000	+6876	0,179	0,135 1872	+5996
0,060	0,034 9200	+7976	0,120	0,103 0000	+6850	0,180	0,135 8239	+5982
0,061	0,035 0120	+7951	0,121	0,104 0000	+6838	0,181	0,136 4606	+5968
0,062	0,035 1040	+7931	0,122	0,105 0000	+6811	0,182	0,136 8881	+5954
0,063	0,035 1960	+7912	0,123	0,106 0000	+6796	0,183	0,137 3811	+5940
0,064	0,035 2880	+7909	0,124	0,107 0000	+6790	0,184	0,137 8486	+5926
0,065	0,035 3800	+7888	0,125	0,108 0000	+6768	0,185	0,138 2759	+5912
0,066	0,035 4720	+7885	0,126	0,109 0000	+6765	0,186	0,138 6703	+5898
0,067	0,035 5640	+7841	0,127	0,110 0000	+6740	0,187	0,139 0710	+5884
0,068	0,035 6560	+7823	0,128	0,111 0000	+6719	0,188	0,139 5000	+5870
0,069	0,035 7480	+7801	0,129	0,112 0000	+6703	0,189	0,140 0000	+5856
0,070	0,035 8400	+7780	0,130	0,113 0000	+6688	0,190	0,140 5172	+5842
0,071	0,035 9320	+7759	0,131	0,114 0000	+6668	0,191	0,141 0409	+5828
0,072	0,036 0240	+7738	0,132	0,115 0000	+6662	0,192	0,141 5809	+5814
0,073	0,036 1160	+7717	0,133	0,116 0000	+6658	0,193	0,142 1368	+5800
0,074	0,036 2080	+7696	0,134	0,117 0000	+6643	0,194	0,142 6981	+5786
0,075	0,036 3000	+7675	0,135	0,118 0000	+6631	0,195	0,143 2752	+5772
0,076	0,036 3920	+7655	0,136	0,119 0000	+6613	0,196	0,143 8684	+5758
0,077	0,036 4840	+7635	0,137	0,120 0000	+6598	0,197	0,144 4694	+5744
0,078	0,036 5760	+7614	0,138	0,121 0000	+6581	0,198	0,145 0785	+5730
0,079	0,036 6680	+7593	0,139	0,122 0000	+6564	0,199	0,145 6968	+5716
0,080	0,036 7600	+7572	0,140	0,123 0000	+6549	0,200	0,146 3341	+5702
0,081	0,036 8520	+7553	0,141	0,124 0000	+6530	0,201	0,146 9896	+5688
0,082	0,036 9440	+7531	0,142	0,125 0000	+6516	0,202	0,147 6533	+5674
0,083	0,037 0360	+7511	0,143	0,126 0000	+6506	0,203	0,148 3347	+5660
0,084	0,037 1280	+7490	0,144	0,127 0000	+6497	0,204	0,149 0340	+5646
0,085	0,037 2200	+7476	0,145	0,128 0000	+6483	0,205	0,149 7501	+5632
0,086	0,037 3120	+7457	0,146	0,129 0000	+6466	0,206	0,150 4831	+5618
0,087	0,037 4040	+7437	0,147	0,130 0000	+6455	0,207	0,151 2330	+5604
0,088	0,037 4960	+7418	0,148	0,131 0000	+6440	0,208	0,151 9999	+5590
0,089	0,037 5880	+7400	0,149	0,132 0000	+6427	0,209	0,152 7838	+5576
0,090	0,037 6800	+7380	0,150	0,133 0000	+6413	0,210	0,153 5845	+5562
0,091	0,037 7720	+7363	0,151	0,134 0000	+6399	0,211	0,154 3922	+5548
0,092	0,037 8640	+7343	0,152	0,135 0000	+6386	0,212	0,155 2169	+5534
0,093	0,037 9560	+7321	0,153	0,136 0000	+6372	0,213	0,156 0585	+5520
0,094	0,038 0480	+7301	0,154	0,137 0000	+6358	0,214	0,156 9169	+5506
0,095	0,038 1400	+7288	0,155	0,138 0000	+6345	0,215	0,157 7922	+5492
0,096	0,038 2320	+7269	0,156	0,139 0000	+6331	0,216	0,158 6845	+5478

TABLE I (Table VIII d'Oppolzer, suite).

h	$\log \gamma$	Diff.	h	$\log \gamma$	Diff.	h	$\log \gamma$	Diff.
0,216	0,156 3123	+56,4	0,276	0,188 3024	+56,1	0,336	0,217 3085	+46,8
0,217	156 8337	+56,3	0,277	188 8085	+56,5	0,337	217 7700	+46,8
0,218	157 4440	+56,3	0,278	189 3128	+56,5	0,338	218 2608	+46,8
0,219	157 9933	+56,3	0,279	189 8183	+56,5	0,339	218 6910	+46,8
0,220	158 5856	+56,3	0,280	190 3220	+56,5	0,340	219 1363	+46,8
0,221	0,159 1689	+56,3	0,281	0,190 8249	+56,5	0,341	0,219 6993	+46,8
0,222	159 6837	+56,3	0,282	191 3269	+56,5	0,342	220 0955	+46,8
0,223	160 2204	+56,3	0,283	191 8281	+56,5	0,343	220 5350	+46,8
0,224	160 7747	+56,3	0,284	192 3286	+56,5	0,344	221 0188	+46,8
0,225	161 3579	+56,3	0,285	192 8286	+56,5	0,345	221 4886	+46,8
0,226	0,161 8882	+56,3	0,286	0,193 3271	+56,5	0,346	0,221 8235	+46,8
0,227	162 4315	+56,3	0,287	193 8251	+56,5	0,347	222 2835	+46,8
0,228	162 9817	+56,3	0,288	194 3221	+56,5	0,348	222 7285	+46,8
0,229	163 5310	+56,3	0,289	194 8181	+56,5	0,349	223 1690	+46,8
0,230	164 0793	+56,3	0,290	195 3145	+56,5	0,350	223 5990	+46,8
0,231	0,164 6167	+56,3	0,291	0,195 8064	+56,5	0,351	0,224 0163	+46,8
0,232	165 1736	+56,3	0,292	196 3035	+56,5	0,352	224 4330	+46,8
0,233	165 7184	+56,3	0,293	196 7988	+56,5	0,353	224 8413	+46,8
0,234	166 2638	+56,3	0,294	197 2894	+56,5	0,354	225 2365	+46,8
0,235	166 8063	+56,3	0,295	197 7811	+56,5	0,355	225 6210	+46,8
0,236	0,167 3488	+56,3	0,296	0,198 2721	+56,5	0,356	0,226 0131	+46,8
0,237	167 8903	+56,3	0,297	198 7654	+56,5	0,357	226 3945	+46,8
0,238	168 4269	+56,3	0,298	199 2568	+56,5	0,358	226 7730	+46,8
0,239	168 9703	+56,3	0,299	199 7465	+56,5	0,359	227 1485	+46,8
0,240	169 5092	+56,3	0,300	200 2385	+56,5	0,360	227 5210	+46,8
0,241	0,170 0470	+56,3	0,301	0,200 7157	+56,5	0,361	0,228 0160	+46,8
0,242	170 5838	+56,3	0,302	201 2021	+56,5	0,362	228 3945	+46,8
0,243	171 1197	+56,3	0,303	201 6878	+56,5	0,363	228 7680	+46,8
0,244	171 6547	+56,3	0,304	202 1767	+56,5	0,364	229 1385	+46,8
0,245	172 1887	+56,3	0,305	202 6689	+56,5	0,365	229 5060	+46,8
0,246	0,172 7218	+56,3	0,306	0,203 1603	+56,5	0,366	0,230 0136	+46,8
0,247	173 2540	+56,3	0,307	203 6520	+56,5	0,367	230 3810	+46,8
0,248	173 7853	+56,3	0,308	204 1408	+56,5	0,368	230 7485	+46,8
0,249	174 3151	+56,3	0,309	204 6289	+56,5	0,369	231 1130	+46,8
0,250	174 8434	+56,3	0,310	205 1167	+56,5	0,370	231 4755	+46,8
0,251	0,175 3756	+56,3	0,311	0,205 5964	+56,5	0,371	0,232 0171	+46,8
0,252	175 9073	+56,3	0,312	206 0834	+56,5	0,372	232 8335	+46,8
0,253	176 4388	+56,3	0,313	206 5683	+56,5	0,373	233 1960	+46,8
0,254	176 9688	+56,3	0,314	207 0513	+56,5	0,374	233 5565	+46,8
0,255	177 4988	+56,3	0,315	207 5334	+56,5	0,375	233 9150	+46,8
0,256	0,178 0299	+56,3	0,316	0,207 0157	+56,5	0,376	0,234 0197	+46,8
0,257	178 5581	+56,3	0,317	207 4974	+56,5	0,377	234 3770	+46,8
0,258	179 0841	+56,3	0,318	207 9781	+56,5	0,378	234 7325	+46,8
0,259	179 6088	+56,3	0,319	208 4578	+56,5	0,379	235 0860	+46,8
0,260	180 1323	+56,3	0,320	208 9365	+56,5	0,380	235 4385	+46,8
0,261	0,180 6580	+56,3	0,321	0,209 4157	+56,5	0,381	0,235 0209	+46,8
0,262	181 1866	+56,3	0,322	210 8940	+56,5	0,382	235 3725	+46,8
0,263	181 7131	+56,3	0,323	211 3710	+56,5	0,383	235 7140	+46,8
0,264	182 2388	+56,3	0,324	211 8474	+56,5	0,384	236 0535	+46,8
0,265	182 7636	+56,3	0,325	212 3231	+56,5	0,385	236 3910	+46,8
0,266	0,183 2893	+56,3	0,326	0,212 7999	+56,5	0,386	0,236 0593	+46,8
0,267	183 8153	+56,3	0,327	213 2765	+56,5	0,387	236 3960	+46,8
0,268	184 3418	+56,3	0,328	213 7525	+56,5	0,388	236 7315	+46,8
0,269	184 8683	+56,3	0,329	214 2281	+56,5	0,389	237 0660	+46,8
0,270	185 3943	+56,3	0,330	214 7031	+56,5	0,390	237 4005	+46,8
0,271	0,185 9209	+56,3	0,331	0,215 1799	+56,5	0,391	0,237 0711	+46,8
0,272	186 4469	+56,3	0,332	215 6558	+56,5	0,392	237 4050	+46,8
0,273	186 9729	+56,3	0,333	216 1318	+56,5	0,393	237 7385	+46,8
0,274	187 4989	+56,3	0,334	216 6078	+56,5	0,394	238 0710	+46,8
0,275	188 0249	+56,3	0,335	217 0838	+56,5	0,395	238 4035	+46,8
0,276	0,188 5504	+56,3	0,336	0,217 5604	+56,5	0,396	0,238 4711	+46,8

T. — P.

TABLE I (Table VIII d'Oppolzer, suite et fin).

h .	$\log \gamma$.	Diff.	h .	$\log \gamma$.	Diff.	h .	$\log \gamma$.	Diff.
0,396	0,243 8566	+42,6	0,456	0,268 4111	+3,35	0,516	0,291 2209	+35,0
0,397	244 2812	+42,6	0,457	268 8016	+3,35	0,517	291 5879	+35,0
0,398	244 7052	+42,6	0,458	269 1977	+3,35	0,518	291 9545	+35,0
0,399	245 1487	+42,6	0,459	269 5963	+3,35	0,519	292 3207	+35,0
0,400	245 5746	+42,6	0,460	269 9954	+3,35	0,520	292 6864	+35,0
0,401	0,245 9946	+42,6	0,461	0,270 3951	+3,35	0,521	0,293 0518	+35,0
0,402	246 4188	+42,6	0,462	270 7952	+3,35	0,522	293 4168	+35,0
0,403	246 8431	+42,6	0,463	271 1959	+3,35	0,523	293 7813	+35,0
0,404	247 2678	+42,6	0,464	271 5966	+3,35	0,524	294 1455	+35,0
0,405	247 6779	+42,6	0,465	271 9973	+3,35	0,525	294 5099	+35,0
0,406	0,248 0000	+42,6	0,466	0,272 3980	+3,35	0,526	0,294 8746	+35,0
0,407	248 5166	+42,6	0,467	272 7987	+3,35	0,527	295 2388	+35,0
0,408	248 9351	+42,6	0,468	273 1994	+3,35	0,528	295 6030	+35,0
0,409	249 3531	+42,6	0,469	273 6001	+3,35	0,529	295 9672	+35,0
0,410	249 7705	+42,6	0,470	273 9998	+3,35	0,530	296 3314	+35,0
0,411	0,250 1874	+42,6	0,471	0,274 4005	+3,35	0,531	0,296 6956	+35,0
0,412	250 6038	+42,6	0,472	274 8012	+3,35	0,532	297 0598	+35,0
0,413	251 0196	+42,6	0,473	275 2019	+3,35	0,533	297 4240	+35,0
0,414	251 4346	+42,6	0,474	275 6026	+3,35	0,534	297 7882	+35,0
0,415	251 8490	+42,6	0,475	276 0033	+3,35	0,535	298 1524	+35,0
0,416	0,252 2638	+42,6	0,476	0,276 4040	+3,35	0,536	0,298 5166	+35,0
0,417	252 6775	+42,6	0,477	276 8047	+3,35	0,537	298 8808	+35,0
0,418	253 0906	+42,6	0,478	277 2054	+3,35	0,538	299 2450	+35,0
0,419	253 5036	+42,6	0,479	277 6061	+3,35	0,539	299 6092	+35,0
0,420	253 9163	+42,6	0,480	278 0068	+3,35	0,540	300 0000	+35,0
0,421	0,254 3269	+42,6	0,481	0,278 4075	+3,35	0,541	0,300 3642	+35,0
0,422	254 7399	+42,6	0,482	278 8082	+3,35	0,542	300 7284	+35,0
0,423	255 1528	+42,6	0,483	279 2089	+3,35	0,543	301 0926	+35,0
0,424	255 5581	+42,6	0,484	279 6096	+3,35	0,544	301 4568	+35,0
0,425	0,256 9679	+42,6	0,485	0,279 4110	+3,35	0,545	0,301 8210	+35,0
0,426	257 3768	+42,6	0,486	280 0117	+3,35	0,546	302 1852	+35,0
0,427	257 7853	+42,6	0,487	280 4124	+3,35	0,547	302 5494	+35,0
0,428	258 1932	+42,6	0,488	280 8131	+3,35	0,548	302 9136	+35,0
0,429	258 6006	+42,6	0,489	281 2138	+3,35	0,549	303 2778	+35,0
0,430	258 9975	+42,6	0,490	281 6145	+3,35	0,550	303 6420	+35,0
0,431	0,258 3130	+42,6	0,491	0,281 4145	+3,35	0,551	0,304 0062	+35,0
0,432	258 7198	+42,6	0,492	281 8152	+3,35	0,552	304 3704	+35,0
0,433	259 1252	+42,6	0,493	282 2159	+3,35	0,553	304 7346	+35,0
0,434	259 5300	+42,6	0,494	282 6166	+3,35	0,554	305 0988	+35,0
0,435	259 9340	+42,6	0,495	283 0173	+3,35	0,555	305 4630	+35,0
0,436	0,260 3382	+42,6	0,496	0,283 4180	+3,35	0,556	0,305 8272	+35,0
0,437	260 7445	+42,6	0,497	283 8187	+3,35	0,557	306 1914	+35,0
0,438	261 1511	+42,6	0,498	284 2194	+3,35	0,558	306 5556	+35,0
0,439	261 5577	+42,6	0,499	284 6201	+3,35	0,559	306 9198	+35,0
0,440	261 9646	+42,6	0,500	285 0208	+3,35	0,560	307 2840	+35,0
0,441	0,262 3709	+42,6	0,501	0,285 4215	+3,35	0,561	0,307 6482	+35,0
0,442	262 7807	+42,6	0,502	285 8222	+3,35	0,562	308 0124	+35,0
0,443	263 1851	+42,6	0,503	286 2229	+3,35	0,563	308 3766	+35,0
0,444	263 5911	+42,6	0,504	286 6236	+3,35	0,564	308 7408	+35,0
0,445	264 0000	+42,6	0,505	287 0243	+3,35	0,565	309 1050	+35,0
0,446	0,264 4092	+42,6	0,506	0,287 4250	+3,35	0,566	0,309 4692	+35,0
0,447	264 8215	+42,6	0,507	287 8257	+3,35	0,567	309 8334	+35,0
0,448	265 2354	+42,6	0,508	288 2264	+3,35	0,568	310 1976	+35,0
0,449	265 6498	+42,6	0,509	288 6271	+3,35	0,569	310 5618	+35,0
0,450	266 0597	+42,6	0,510	289 0278	+3,35	0,570	310 9260	+35,0
0,451	0,265 4709	+42,6	0,511	0,289 4285	+3,35	0,571	0,310 2880	+35,0
0,452	265 8837	+42,6	0,512	289 8292	+3,35	0,572	310 6482	+35,0
0,453	266 2931	+42,6	0,513	290 2300	+3,35	0,573	311 0084	+35,0
0,454	266 7026	+42,6	0,514	290 6307	+3,35	0,574	311 3686	+35,0
0,455	267 1120	+42,6	0,515	291 0315	+3,35	0,575	311 7288	+35,0
0,456	0,268 4111	+3,35	0,516	0,291 2209	+3,35	0,576	0,312 0890	+35,0

TABLE II (Table IX d'Oppolzer).

w	$10^4 \cdot \xi$	w	$10^4 \cdot \xi$	w	$10^4 \cdot \xi$	w	$10^4 \cdot \xi$	w	$10^4 \cdot \xi$	w	$10^4 \cdot \xi$
-0.300	4306	-0.180	1632	-0.120	7658	-0.060	1988	-0.000	0	-0.060	1988
-0.299	4315	-0.179	1634	-0.119	7658	-0.059	1924	-0.059	1	-0.059	1924
-0.298	4324	-0.178	1636	-0.118	7658	-0.058	1860	-0.058	2	-0.058	1860
-0.297	4333	-0.177	1638	-0.117	7658	-0.057	1796	-0.057	3	-0.057	1796
-0.296	4342	-0.176	1640	-0.116	7658	-0.056	1732	-0.056	4	-0.056	1732
-0.295	4351	-0.175	1642	-0.115	7658	-0.055	1668	-0.055	5	-0.055	1668
-0.294	4360	-0.174	1644	-0.114	7658	-0.054	1604	-0.054	6	-0.054	1604
-0.293	4369	-0.173	1646	-0.113	7658	-0.053	1540	-0.053	7	-0.053	1540
-0.292	4378	-0.172	1648	-0.112	7658	-0.052	1476	-0.052	8	-0.052	1476
-0.291	4387	-0.171	1650	-0.111	7658	-0.051	1412	-0.051	9	-0.051	1412
-0.290	4396	-0.170	1652	-0.110	7658	-0.050	1348	-0.050	10	-0.050	1348
-0.289	4405	-0.169	1654	-0.109	7658	-0.049	1284	-0.049	11	-0.049	1284
-0.288	4414	-0.168	1656	-0.108	7658	-0.048	1220	-0.048	12	-0.048	1220
-0.287	4423	-0.167	1658	-0.107	7658	-0.047	1156	-0.047	13	-0.047	1156
-0.286	4432	-0.166	1660	-0.106	7658	-0.046	1092	-0.046	14	-0.046	1092
-0.285	4441	-0.165	1662	-0.105	7658	-0.045	1028	-0.045	15	-0.045	1028
-0.284	4450	-0.164	1664	-0.104	7658	-0.044	964	-0.044	16	-0.044	964
-0.283	4459	-0.163	1666	-0.103	7658	-0.043	900	-0.043	17	-0.043	900
-0.282	4468	-0.162	1668	-0.102	7658	-0.042	836	-0.042	18	-0.042	836
-0.281	4477	-0.161	1670	-0.101	7658	-0.041	772	-0.041	19	-0.041	772
-0.280	4486	-0.160	1672	-0.100	7658	-0.040	708	-0.040	20	-0.040	708
-0.279	4495	-0.159	1674	-0.099	7658	-0.039	644	-0.039	21	-0.039	644
-0.278	4504	-0.158	1676	-0.098	7658	-0.038	580	-0.038	22	-0.038	580
-0.277	4513	-0.157	1678	-0.097	7658	-0.037	516	-0.037	23	-0.037	516
-0.276	4522	-0.156	1680	-0.096	7658	-0.036	452	-0.036	24	-0.036	452
-0.275	4531	-0.155	1682	-0.095	7658	-0.035	388	-0.035	25	-0.035	388
-0.274	4540	-0.154	1684	-0.094	7658	-0.034	324	-0.034	26	-0.034	324
-0.273	4549	-0.153	1686	-0.093	7658	-0.033	260	-0.033	27	-0.033	260
-0.272	4558	-0.152	1688	-0.092	7658	-0.032	196	-0.032	28	-0.032	196
-0.271	4567	-0.151	1690	-0.091	7658	-0.031	132	-0.031	29	-0.031	132
-0.270	4576	-0.150	1692	-0.090	7658	-0.030	68	-0.030	30	-0.030	68
-0.269	4585	-0.149	1694	-0.089	7658	-0.029	4	-0.029	31	-0.029	4
-0.268	4594	-0.148	1696	-0.088	7658	-0.028	-60	-0.028	32	-0.028	-60
-0.267	4603	-0.147	1698	-0.087	7658	-0.027	-124	-0.027	33	-0.027	-124
-0.266	4612	-0.146	1700	-0.086	7658	-0.026	-188	-0.026	34	-0.026	-188
-0.265	4621	-0.145	1702	-0.085	7658	-0.025	-252	-0.025	35	-0.025	-252
-0.264	4630	-0.144	1704	-0.084	7658	-0.024	-316	-0.024	36	-0.024	-316
-0.263	4639	-0.143	1706	-0.083	7658	-0.023	-380	-0.023	37	-0.023	-380
-0.262	4648	-0.142	1708	-0.082	7658	-0.022	-444	-0.022	38	-0.022	-444
-0.261	4657	-0.141	1710	-0.081	7658	-0.021	-508	-0.021	39	-0.021	-508
-0.260	4666	-0.140	1712	-0.080	7658	-0.020	-572	-0.020	40	-0.020	-572
-0.259	4675	-0.139	1714	-0.079	7658	-0.019	-636	-0.019	41	-0.019	-636
-0.258	4684	-0.138	1716	-0.078	7658	-0.018	-700	-0.018	42	-0.018	-700
-0.257	4693	-0.137	1718	-0.077	7658	-0.017	-764	-0.017	43	-0.017	-764
-0.256	4702	-0.136	1720	-0.076	7658	-0.016	-828	-0.016	44	-0.016	-828
-0.255	4711	-0.135	1722	-0.075	7658	-0.015	-892	-0.015	45	-0.015	-892
-0.254	4720	-0.134	1724	-0.074	7658	-0.014	-956	-0.014	46	-0.014	-956
-0.253	4729	-0.133	1726	-0.073	7658	-0.013	-1020	-0.013	47	-0.013	-1020
-0.252	4738	-0.132	1728	-0.072	7658	-0.012	-1084	-0.012	48	-0.012	-1084
-0.251	4747	-0.131	1730	-0.071	7658	-0.011	-1148	-0.011	49	-0.011	-1148
-0.250	4756	-0.130	1732	-0.070	7658	-0.010	-1212	-0.010	50	-0.010	-1212
-0.249	4765	-0.129	1734	-0.069	7658	-0.009	-1276	-0.009	51	-0.009	-1276
-0.248	4774	-0.128	1736	-0.068	7658	-0.008	-1340	-0.008	52	-0.008	-1340
-0.247	4783	-0.127	1738	-0.067	7658	-0.007	-1404	-0.007	53	-0.007	-1404
-0.246	4792	-0.126	1740	-0.066	7658	-0.006	-1468	-0.006	54	-0.006	-1468
-0.245	4801	-0.125	1742	-0.065	7658	-0.005	-1532	-0.005	55	-0.005	-1532
-0.244	4810	-0.124	1744	-0.064	7658	-0.004	-1596	-0.004	56	-0.004	-1596
-0.243	4819	-0.123	1746	-0.063	7658	-0.003	-1660	-0.003	57	-0.003	-1660
-0.242	4828	-0.122	1748	-0.062	7658	-0.002	-1724	-0.002	58	-0.002	-1724
-0.241	4837	-0.121	1750	-0.061	7658	-0.001	-1788	-0.001	59	-0.001	-1788
-0.240	4846	-0.120	1752	-0.060	7658	0.000	-1852	0.000	60	0.000	-1852

TABLE II (Table IX d'Oppolzer, suite et fin).

w	$10^4 \cdot \xi$	w	$10^4 \cdot \xi$	w	$10^4 \cdot \xi$	w	$10^4 \cdot \xi$	w	$10^4 \cdot \xi$	w	$10^4 \cdot \xi$
0.000	0	+0.060	2131	+0.120	8815	+0.180	2685	+0.240	3289	+0.300	3889
+0.001	1	+0.059	2201	+0.119	8815	+0.179	2749	+0.239	3353	+0.299	3953
+0.002	2	+0.058	2271	+0.118	8815	+0.178	2813	+0.238	3417	+0.298	4017
+0.003	3	+0.057	2341	+0.117	8815	+0.177	2877	+0.237	3481	+0.297	4081
+0.004	4	+0.056	2411	+0.116	8815	+0.176	2941	+0.236	3545	+0.296	4145
+0.005	5	+0.055	2481	+0.115	8815	+0.175	3005	+0.235	3609	+0.295	4209
+0.006	6	+0.054	2551	+0.114	8815	+0.174	3069	+0.234	3673	+0.294	4273
+0.007	7	+0.053	2621	+0.113	8815	+0.173	3133	+0.233	3737	+0.293	4337
+0.008	8	+0.052	2691	+0.112	8815	+0.172	3197	+0.232	3801	+0.292	4401
+0.009	9	+0.051	2761	+0.111	8815	+0.171	3261	+0.231	3865	+0.291	4465
+0.010	10	+0.050	2831	+0.110	8815	+0.170	3325	+0.230	3929	+0.290	4529
+0.011	11	+0.049	2901	+0.109	8815	+0.169	3389	+0.229	3993	+0.289	4593
+0.012	12	+0.048	2971	+0.108	8815	+0.168	3453	+0.228	4057	+0.288	4657
+0.013	13	+0.047	3041	+0.107	8815	+0.167	3517	+0.227	4121	+0.287	4721
+0.014	14	+0.046	3111	+0.106	8815	+0.166	3581	+0.226	4185	+0.286	4785
+0.015	15	+0.045	3181	+0.105	8815	+0.165	3645	+0.225	4249	+0.285	4849
+0.016	16	+0.044	3251	+0.104	8815	+0.164	3709	+0.224	4313	+0.284	4913
+0.017	17	+0.043	3321	+0.103	8815	+0.163	3773	+0.223	4377	+0.283	4977
+0.018	18	+0.042	3391	+0.102	8815	+0.162	3837	+0.222	4441	+0.282	5041
+0.019	19	+0.041	3461	+0.101	8815	+0.161	3901	+0.221	4505	+0.281	5105
+0.020	20	+0.040	3531	+0.100	8815	+0.160	3965	+0.220	4569	+0.280	5169
+0.021	21	+0.039	3601	+0.099	8815	+0.159	4029	+0.219	4633	+0.279	5233
+0.022	22	+0.038	3671	+0.098	8815	+0.158	4093	+0.218	4697	+0.278	5297
+0.023	23	+0.037	3741	+0.097	8815	+0.157	4157	+0.217	4761	+0.277	5361
+0.024	24	+0.036	3811	+0.096	8815	+0.156	4221	+0.216	4825	+0.276	5425
+0.025	25	+0.035	3881	+0.095	8815	+0.155	4285	+0.215	4889	+0.275	5489
+0.026	26	+0.034	3951	+0.094	8815	+0.154	4349	+0.214	4953	+0.274	5553
+0.027	27	+0.033	4021	+0.093	8815	+0.153	4413	+0.213	5017	+0.273	5617
+0.028	28	+0.032	4091	+0.092	8815	+0.152	4477	+0.212	5081	+0.272	5681
+0.029	29	+0.031	4161	+0.091	8815	+0.151	4541	+0.211	5145	+0.271	5745
+0.030	30	+0.030	4231	+0.090	8815	+0.150	4605	+0.210	5209	+0.270	5809
+0.031	31	+0.029	4301	+0.089	8815	+0.149	4669	+0.209	5273	+0.269	5873
+0.032	32	+0.028	4371	+0.088	8815	+0.148	4733	+0.208	5337	+0.268	5937
+0.033	33	+0.027	4441	+0.087	8815	+0.147	4797	+0.207	5401	+0.267	6001
+0.034	34	+0.026	4511	+0.086	8815	+0.146	4861	+0.206	5465	+0.266	6065
+0.035	35	+0.025	4581	+0.085	8815	+0.145	4925	+0.205	5529	+0.265	6129
+0.036	36	+0.024	4651	+0.084	8815	+0.144	4989	+0.204	5593	+0.264	6193
+0.037	37	+0.023	4721	+0.083	8815	+0.143	5053	+0.203	5657	+0.263	6257
+0.038	38	+0.022	4791	+0.082	8815	+0.142	5117	+0.202	5721	+0.262	6321
+0.039	39	+0.021	4861	+0.081	8815	+0.141	5181	+0.201	5785	+0.261	6385
+0.040	40	+0.020	4931	+0.080	8815	+0.140	5245	+0.200	5849	+0.260	6449
+0.041	41	+0.019	5001	+0.079	8815	+0.139	5309	+0.199	5913	+0.259	6513
+0.042	42	+0.018	5071	+0.078	8815	+0.138	5373	+0.198	5977	+0.258	6577
+0.043	43	+0.017	5141	+0.077	8815	+0.137	5437	+0.197	6041	+0.257	6641
+0.044	44	+0.016	5211	+0.076	8815	+0.136	5501	+0.196	6105	+0.256	6705
+0.045	45	+0.015	5281	+0.075	8815	+0.135	5565	+0.195	6169	+0.255	6769
+0.046	46	+0.014	5351	+0.074	8815	+0.134	5629	+0.194	6233	+0.254	6833
+0.047	47	+0.013	5421	+0.073	8815	+0.133	5693	+0.193	6297	+0.253	6897
+0.048	48	+0.012	5491	+0.072	8815	+0.132	5757	+0.192	6361	+0.252	6961
+0.049	49	+0.011	5561	+0.071	8815	+0.131	5821	+0.191	6425	+0.251	7025
+0.050	50	+0.010	5631	+0.070	8815	+0.130	5885	+0.190	6489	+0.250	7089
+0.051	51	+0.009	5701	+0.069	8815	+0.129	5949	+0.189	6553	+0.249	7153
+0.052	52	+0.008	5771	+0.068	8815	+0.128	6013	+0.188	6617	+0.248	7217
+0.053	53	+0.007	5841	+0.067	8815	+0.127	6077	+0.187	6681	+0.247	7281
+0.054	54	+0.006	5911	+0.066	8815	+0.126	6141	+0.186	6745	+0.246	7345
+0.055	55	+0.005	5981	+0.065	8815	+0.125	6205	+0.185	6809	+0.245	7409
+0.056	56	+0.004	6051	+0.064	8815	+0.124	6269	+0.184	6873	+0.244	7473
+0.057	57	+0.003	6121	+0.063	8815	+0.123	6333	+0.183	6937	+0.243	7537
+0.058	58	+0.002	6191	+0.062	8815	+0.122	6397	+0.182	7001	+0.242	7601
+0.059	59	+0.001	6261	+0.061	8815	+0.121	6461	+0.181	7065	+0.241	7665
+0.060	60	0	6331	+0.060	8815	+0.120	6525	+0.180	7129	+0.240	7729
+0.061	61	+0.001	6401	+0.059	8815	+0.119	6589	+0.179	7193	+0.239	7793
+0.062	62	+0.002	6471	+0.058	8815	+0.118	6653	+0.178	7257	+0.238	7857
+0.063	63	+0.003	6541	+0.057	8815	+0.117	6717	+0.177	7321	+0.237	7921
+0.064	64	+0.004	6611	+0.056	8815	+0.116	6781	+0.176	7385	+0.236	7985
+0.065	65	+0.005	6681	+0.055	8815	+0.115	6845	+0.175	7449	+0.235	8049
+0.066	66	+0.006	6751	+0.054	8815	+0.114	6909	+0.174	7513	+0.234	8113
+0.067	67	+0.007	6821	+0.053	8815	+0.113	6973	+0.173	7577	+0.233	8177
+0.068	68	+0.008	6891	+0.052	8815	+0.112	7037	+0.172	7641	+0.232	8241
+0.069	69	+0.009	6961	+0.051	8815	+0.111	7101	+0.171	7705	+0.231	8305
+0.070	70	+0.010	7031	+0.050	8815	+0.110	7165	+0.170	7769	+0.230	8369
+0.071	71	+0.011	7101	+0.049	8815	+0.109	7229	+0.169	7833	+0.229	8433
+0.072	72	+0.012	7171	+0.048	8815	+0.108	7293	+0.168	7897	+0.228	8497
+0.073	73	+0.013	7241	+0.047	8815	+0.107	7357	+0.167	7961	+0.227	8561
+0.074	74	+0.014	7311	+0.046	8815	+0.106	7421	+0.166	8025	+0.226	8625
+0.075	75	+0.015	7381	+0.045	8815	+0.105	7485	+0.165	8089	+0.225	8689
+0.076	76	+0.016	7451	+0.044	8815	+0.104	7549	+0.164	8153	+0.224	8753
+0.077	77	+0.017	7521	+0.043	8815	+0.103	7613	+0.163	8217	+0.223	8817
+0.078	78	+0.018	7591	+0.042	8815	+0.102	7677	+0.162	8281	+0.222	8881
+0.079	79	+0.019	7661	+0.041	8815	+0.101	7741	+0.161	8345	+0.221	8945
+0.080	80	+0.020	7731	+0.040	8815	+0.100	7805	+0.160	8409	+0.220	9009
+0.081	81	+0.021	7801	+0.039	8815	+0.099	7869	+0.159	8473	+0.219	9073
+0.082	82	+0.022	7871	+0.038	8815	+0.098	7933	+0.158	8537	+0.218	9137
+0.083	83	+0.023	7941	+0.037	8815	+0.097	7997	+0.157	8601	+0.217	9201
+0.084	84	+0.024	8011	+0.036	8815	+0.096	8061	+0.156	8665	+0.216	9265
+0.085	85	+0.025	8081	+0.035	8815	+0.095	8125	+0.155	8729	+0.215	9329
+0.086	86	+0.026	8151	+0.034	8815	+0.094	8189	+0.154	8793	+0.214	9393
+0.087	87	+0.027	8221	+0.033	8815	+0.093	8253	+0.153	8857	+0.213	9457
+0.088	88	+0.028	8291	+0.032	8815	+0.092	8317	+0.152	8921	+0.212	9521
+0.089	89	+0.029	8361	+0.031	8815	+0.091	8381	+0.151	8985	+0.211	9585
+0.090	90	+0.030	8431	+0.030	8815	+0.090	8445	+0.150	9049	+0.210	9649
+0.091	91	+0.031	8501	+0.029	8815	+0.089	8509	+0.149	9113	+0.209	9713
+0.092	92	+0.032	8571	+0.028	8815	+0.088	8573	+0.148	9177	+0.208	9777
+0.093	93	+0.033	8641	+0.027	8815	+0.087	8637	+0.147	9241	+0.207	9841
+0.094	94	+0.034	8711	+0.026	8815	+0.086	8701	+0.146	9305	+0.206	9905
+0.095	95	+0.035	8781	+0.025	8815	+0.085	8765	+0.145	9369	+0.205	9969
+0.096	96	+0.036	8851	+0.024	8815	+0.084	8829	+0.144	9433	+0.204	10033
+0.097	97	+0.037	8921	+0.023	8815	+0.083	8893	+0.143	9497	+0.203	10097
+0.098	98	+0.038	8991	+0.022	8815	+0.082	8957	+0.142	9561	+0.202	10161
+0.099	99	+0.039	9061	+0.021	8815	+0.081	9021	+0.141	9625	+0.201	10225
+0.100	100	+0.040	9131	+0.020	8815	+0.080	9085	+0.140	9689	+0.200	10289

TABLE DES MATIÈRES.

Préface.....	Page v
CHAPITRE I.	
Méthode d'Olbers pour la détermination de l'orbite d'une comète.....	1
CHAPITRE II.	
Méthode de Gauss pour la détermination de l'orbite d'une planète avec trois observations.....	45
Modèle de calcul d'orbite.....	101
Table I (Table VIII d'Oppolzer).....	117
Table II (Table IX d'Oppolzer).....	122

FIN.