Appunti didattici sulla teoria delle maree

Benedetto Scoppola e Riccardo Mariani

May 19, 2018

1 Introduzione

La teoria delle maree e' un tema molto interessante da presentare nelle classi della scuola secondaria, per vari motivi.
Un primo motivo di interesse e' la grande rilevanza dell'argomento da un punto di vista storico. Le teorie pre-newtoniane delle maree sono state descritte in modo eccellente nel libro di Lucio Russo "Flussi e riflussi" [1]. Nel contesto di queste pagine, una delle idee che vale la pena di sottolineare di quell'opera e' la seguente: l'illusione positivista che l'uomo e la sua cultura siano sempre destinati a progredire non ha nessuna base nella storia della scienza, dove, anzi, si vede in modo molto chiaro che il progresso culturale e' condizionato al fatto che ci sia qualcuno che insegni e qualcuno che voglia imparare. Non appena, nella storia dell'uomo, questo flusso continuo si e' interrotto le conoscenze scientifiche sono regredite con grandissima rapidita'. La teoria delle maree illustra questo fatto con straordinaria chiarezza: solo l'interpretazione da parte di Newton di diverse idee riportate, senza comprenderle fino in fondo, da vari eruditi del basso medioevo e del Rinascimento ha permesso di recuperare gli aspetti essenziali di una teoria che, con grande probabilita', era nota in dettaglio in epoca ellenistica. In un contesto scolastico la necessita' di mantenere vivo questo flusso culturale potrebbe essere un'idea piuttosto interessante. Anche molto interessanti sono le pagine dei "Principia" relative alla teoria delle maree, che sono tuttavia di lettura molto faticosa, e alcuni testi posteriori a Newton. In questo articolo verra' rapidamente discussa la teoria delle maree descritta da Eulero nel suo "Lettere a una principessa tedesca". Sembra di poter dire che a distanza di quasi 80 anni dai "Principia" di Newton anche un grandissimo intellettuale come Eulero trovi una certa difficolta' a spiegare in termini semplici le basi della teoria delle maree.
Un secondo motivo, anche questo evidenziato nel libro di Russo, per cui la teoria delle maree e' interessante a fini didattici e' il fatto che in questo

tema si capisce in modo molto limpido l'idea di modello matematico. Nella teoria, infatti, il modello teorico che viene assunto e' enormemente semplificato rispetto al sistema reale, ma permette di comprendere completamente le periodicita' del fenomeno, e dunque di prevedere con grande precisione le maree reali sulla base delle serie storiche. Emerge chiaramente, dunque, il fatto che la scienza studia *modelli matematici* della realta', e li valuta sulla base della loro capacita' interpretativa e predittiva, e non sulla base della *verita'* delle loro assunzioni. Questa scienza laica, nel senso che le sue affermazioni riguardano modelli concettuali e non sono dunque battezzate dall'idea, assai scivolosa, di verita', e' quella che ha permesso all'uomo i grandi progressi degli ultimi secoli. E' interessante notare che se si considera Newton l'iniziatore di questo processo, si deve accettare il fatto che le premesse della sua opera sono fortemente ancorate all'idea di verita'.
L'ultimo motivo per cui la teoria delle maree puo' essere veramente interessante e' la sua relativa semplicita'. La teoria puo' essere infatti compresa in grande dettaglio anche con strumenti matematici molto elementari, a patto di utilizzare questi strumenti con una certa attenzione. La spiegazione generalmente accettata nei testi scolastici e' piuttosto insoddisfacente, e soprattutto non pone il problema di ricavare quantitativamente il risultato di Newton.
In questo articolo verranno innanzitutto elencati, nella sezione 2, alcuni prerequisiti, necessari per la lettura delle pagine successive. Nella sezione 3 saranno elencati dei fatti, osservabili misurando le oscillazioni del livello degli oceani, che sono quelli che la teoria si propone di descrivere. Apparira' chiaro che le maree sono dovute sia all'azione della Luna che a quella del Sole. Nella sezione 4 si presentera' un primo calcolo, relativo all'ampiezza delle maree solari, che risulta molto semplice perche' si assume che il baricentro del sistema Terra-Sole sia al centro del Sole, e che i raggi solari arrivino paralleli sulla Terra. La prima parte di questo calcolo e' ripresa dall'articolo di Butikov [2]. La valutazione dell'ampiezza dell'oscillazione mareale verra' effettuata attraverso un esperimento ideale, che permette di interpretare le maree alla luce del principio dei vasi comunicanti. Quando la massa del corpo celeste che provoca le maree non e' molto piu' grande di quella della Terra, come nel caso della Luna, il calcolo dell'ampiezza delle oscillazioni mareali, che viene presentato nella sezione 5, e' piu' complesso, ma il risultato, come affermato nei "Principia" e in tutti i testi posteriori, e' perfettamente analogo a quello relativo alle maree solari. Nel testo, poi, si commentera' un fatto che non e' sempre messo in evidenza: l'espressione esplicita dell'ampiezza mareale fa si' che, quando le maree sono dovute a corpi celesti che hanno la stessa grandezza apparente, l'ampiezza della marea dovuta a ciascun corpo

e' direttamente proporzionale alla sua densita'. Essendo questo con ottima approssimazione il caso del Sole e della Luna, si capisce come dalle oscillazioni quindicinali del livello della marea massima sia possibile calcolare il rapporto tra le densita' dei due astri. Infine nella sezione 6 verranno brevemente discusse la trattazione Newtoniana e le pagine di Eulero sui fenomeni mareali, e nella sezione 7 si proporranno esperienze laboratoriali che chiariscono qualitativamente la struttura della teoria.

2 Prerequisiti

Una delle difficolta' da superare per una trattazione elementare della teoria delle maree e' la complessita', sia da un punto di vista tecnico che concettuale, dell'idea di superficie equipotenziale. Questa difficolta' verra superata, come in [2], trattando quantitativamente la teoria delle maree attraverso una descrizione basata sull'idea di forza. Sara' dunque necessario che, oltre alle basi elementari dell'algebra vettoriale (regola del parallelogramma) siano familiari agli studenti:

1) La definizione di baricentro $\mathbf{r}_g$ di un sistema costituito da due corpi sferici di massa m_1 e m_2 e con i centri posti in $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ rispettivamente

$$\mathbf{r}_g = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

2) La definizione newtoniana di forza

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{2}$$

3) L'espressione esplicita dell'attrazione gravitazionale tra due corpi sferici

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{e}_{12}k\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \tag{3}$$

dove $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono le posizioni dei centri dei due corpi, m_1 e m_2 le loro masse, k e' la costante di gravitazione universale e $\mathbf{e}_{12}$ e' il versore del vettore $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, diretto come la congiungente tra i centri dei due corpi.

4) L'espressione esplicita della forza centrifuga

$$\mathbf{F}_c = m\omega^2\mathbf{r} \tag{4}$$

che e' una forza apparente che agisce su un corpo di massa m posto in posizione $\mathbf{r}$ in un sistema di riferimento non inerziale che ruota attorno all'origine con velocita' angolare costante ω.

5) Il principio di Gauss, che afferma che per quanto riguarda le forze gravitazionali si puo' pensare che un corpo attratto da un oggetto esteso e' sottoposto alla stessa forza che agirebbe se tutta la massa dell'oggetto esteso fosse concentrata nel suo centro di massa.

6) Il principio di azione e reazione, che afferma che se il centro di un corpo ruota su un'orbita circolare con velocita' angolare costante, la forza centrifuga e' uguale e contraria alla forza centripeta, rappresentata in questo caso dall'attrazione gravitazionale.

Questi prerequisiti sono in genere presentati in tutti i libri di testo di fisica della scuola secondaria. Devono pero' essere completamente compresi per proseguire nella lettura di questo articolo.

Uno strumento matematico che verra' utilizzato nel seguito e che si presenta qui, dato che in genere non e' contenuto nei testi di scuola secondaria, e' quello della linearizzazione delle funzioni. Data una funzione $f(x)$, si ha che se in un punto x_0 la funzione f e la sua derivata f' sono continue, e' possibile approssimare la funzione con la retta tangente alla funzione stessa in x_0. Si ha cioe' che

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + f'(x_0)\delta + R(\delta) \tag{5}$$

dove il resto $R(\delta)$ e' molto piu' piccolo di δ, ossia e' proporzionale a δ^2, se δ viene scelto opportunamente piccolo. La figura seguente illustra l'idea geometrica della linearizzazione.

Questa idea di approssimare una funzione con la retta tangente era utilizzata anche prima della formalizzazione dell'analisi matematica: per esempio Keplero diceva che se vado a calcolare una quantita' spostandomi di un capello ottengo una differenza di un capello, ma se considero la tangente la differenza diventa un capello di un capello. In questo articolo eseguiremo molti calcoli trascurando il resto, dato che il nostro δ sara' molto piccolo.

3 Fatti

Come discusso nell'introduzione, per trovare un modello teorico efficiente del problema delle maree e' necessario partire dai fatti sperimentali. Il fenomeno che si intende descrivere e' quello del periodico innalzarsi e abbassarsi del

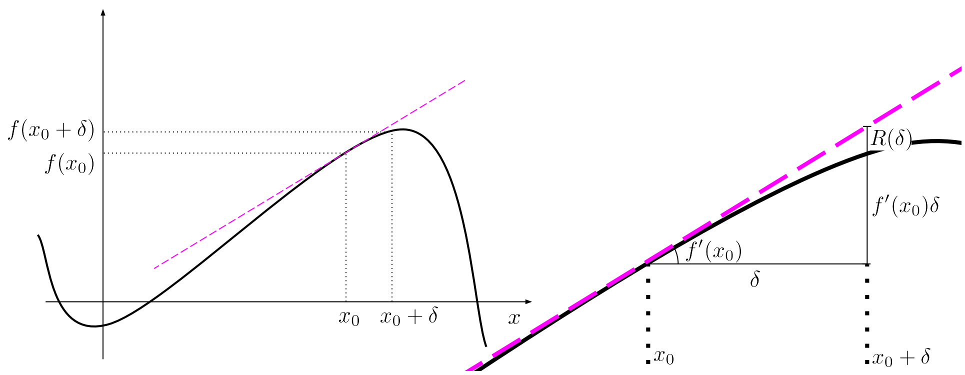

Figure 1: Linearizzazione di una funzione: se la funzione stessa viene sostituita dalla retta tangente in un punto x_0, la differenza tra il valore della funzione e il valore della approssimazione lineare per gli x vicini a x_0 e' piccola. Nell'ingrandimento (a destra) si nota che se si immagina di scegliere un δ piu' piccolo il rapporto tra $R(\delta)$ e δ diventa sempre piu' piccolo.

livello dell'acqua nell'oceano. L'osservazione del fenomeno permette di affermare questi fatti fondamentali

1) Il livello dell'oceano si alza (alta marea) e si abbassa (bassa marea) circa due volte al giorno. Il tempo che intercorre tra due alte maree e' di circa 12 ore e 25 minuti

2) L'escursione mareale, che e' la differenza in altezza fra l'alta e la bassa marea, non e' costante, ma tende ad essere massima con la luna piena e la luna nuova, mentre e' minima quando la Luna e' in quadratura con il Sole, cioe' al primo e terzo quarto.

3) L'escursione mareale dipende moltissimo dalla forma delle coste.

4) Ci puo' essere una certa differenza, piu' o meno grande a seconda della forma delle coste e del periodo dell'anno, tra le due escursioni mareali della stessa giornata.

5) Oltre a questi periodi semigiornaliero (per l'altezza della marea) e bisettimanale (per l'escursione mareale) sono osservabili, attraverso misurazioni molto precise, anche una perodicita' dell'escursione mareale annuale e una di circa 18 anni e mezzo.

Nella figura sono riportate le escursioni mareali in una localita' messicana,

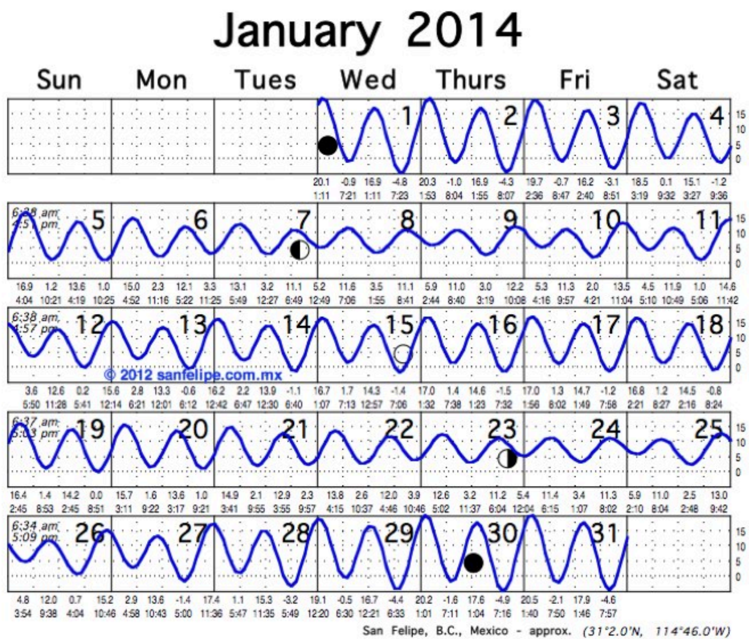

Figure 2: Un mese di maree a San Felipe, Mexico. Sono visibili i periodi semigiornaliero e quindicinale, e la differenza tra le due escursioni mareali nel corso della stessa giornata. Nella figura e' evidenziata anche la fase lunare. Le escursioni mareali sono misurate in piedi (1 piede=30.5cm).

in modo da rendere evidenti i punti 1), 2) e 4).

4 Maree solari

Dai fatti sperimentali appena elencati si puo' ipotizzare che i moti mareali siano dovuti sia alla presenza del Sole che a quella della Luna (teoria lunisolare). Sebbene da un punto di vista quantitativo le maree solari siano meno importanti di quelle dovute alla Luna, il modello matematico che ci portera' a comprendere i fatti sperimentali e' assai piu' semplice per le maree solari, e dunque tentiamo una valutazione, prima qualitativa e poi quantitativa, del fenomeno delle maree solari. Chiariamo prima di tutto il modello concettuale che sara' la base del nostro studio. Supporremo la Terra, con centro in T, perfettamente sferica, di raggio R_T e con densita' costante δ_T.

La massa della Terra M_T sara' dunque

$$M_T = \delta_T \frac{4}{3} \pi R_T^3 \tag{6}$$

Supporremo l'orbita terrestre perfettamente circolare, con distanza tra il centro della terra T e quello del Sole S pari a R_{TS}. Sopporremo poi la massa del Sole M_S sufficientemente grande rispetto a quella della Terra da assumere che il baricentro del sistema Terra-Sole sia nel centro del Sole S. Supporremo inoltre la distanza R_{TS} sufficientemente grande da permettere di considerare come parallele le rette che raggiungono la Terra partendo dal centro del Sole S (parallelismo dei raggi solari). Chiameremo poi ω la velocita' angolare costante del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Misurando gli angoli in radianti si avra' che $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, con τ pari a un anno. Infine assumeremo che la Terra sia completamente ricoperta da uno strato di acqua di altezza media h e supporremo che $h \ll R_T \ll R_{TS}$. Notiamo che quasi tutte queste assunzioni non sono verificate nella realta': la Terra non e' sferica, non ha densita' costante, si muove attorno al Sole su un'orbita ellittica in cui il Sole occupa uno dei fuochi. La velocita' angolare della rivoluzione della Terra attorno al Sole non e' costante, e il baricentro del sistema Terra-Sole non e' nel centro del Sole, ma, pur trovandosi all'interno del Sole, e' spostato verso la Terra di circa 300.000 Km. Le rette che arrivano sulla superficie della Terra a partire da S, poi, non sono parallele. Soprattutto, gli oceani non coprono in modo omogeneo tutta la Terra: una percentuale non trascurabile della superficie della Terra e' ricoperta dalle terre emerse, e la profondita' dell'oceano non e' affatto costante. Il nostro modello concettuale, dunque, e' molto approssimato. Tuttavia, come vedremo, queste approssimazioni rendono il calcolo della forza mareale piuttosto semplice, e permettono comunque di comprendere molti aspetti del sistema fisico. Nella prossima sezione svilupperemo un modello matematico leggermente piu' complesso, adatto anche alla descrizione delle maree lunari. Realizzeremo come alcune approssimazioni del calcolo presentato in questa sezione non siano completamente giustificate. Come vedremo, comunque, l'espressione quantitativa dell'escursione mareale sara' analoga a quella che si ottiene in questo calcolo semplificato.

L'idea qualitativa che porta alla comprensione del fenomeno delle maree e' la seguente: nella sua rotazione attorno al Sole la Terra e' sottoposta alla forza gravitazionale, diretta verso il centro del Sole, cioe' centripeta, e alla corrispondente forza centrifuga. Queste due forze si bilanciano esattamente nel centro della Terra, e fanno si' che il moto della Terra sia di rivoluzione attorno al Sole, e che la distanza relativa tra i due astri sia (nel nostro modello) costante. Tuttavia nei punti della Terra che sono piu' vicini al Sole la forza di attrazione gravitazionale e' leggeremente maggiore, ed e' minore nei punti piu' lontani. La forza centrifuga, invece, tende ad aumentare al crescere della distanza dal centro di rivoluzione, ed e' quindi maggiore nei punti piu' lontani dal Sole e minore nei punti piu' vicini. Si viene a creare quindi un eccesso di forza centripeta rispetto a quella centrifuga nelle parti della Terra piu' vicine al Sole rispetto al suo centro, e un eccesso di forza centrifuga nelle parti piu' lontane. La superficie dell'oceano, dunque, tende ad innalzarsi sia nella parte piu' vicina al Sole della superficie terrestre che in quella opposta, dando origine a due *bulge*, o rigonfiamenti, mareali. Per comprendere gli effetti della forza centrifuga e di quella centripeta l'immagine, frequentemente utilizzata nella letteratura greca e latina, e' quella della fionda, si veda in proposito [1] e "il volto della Luna" di Plutarco, 923, C-D. Questa descrizione qualitativa del fenomeno, che come ricostruito in [1] era probabilmente ben compresa gia' all'epoca ellenistica, ci guidera' ora nella valutazione quantitativa.

Calcoleremo il contributo solare A_S dell'escursione mareale A, che e' la differenza tra l'alta e la bassa marea, per i punti della superficie terrestre posti sul piano dell'eclittica, cioe' sul piano su cui si muove il centro della terra T nel corso della sua rivoluzione attorno al Sole. Per questo descriveremo i punti utilizzando una coppia di coordinate cartesiane. Ci poniamo in un sistema di riferimento avente come origine il centro del sole S, e avente l'asse x orientato come la congiungente tra S e T. Un punto di massa m che si trovi nel centro della Terra T e' sottoposto a due forze uguali in valore assoluto, avente, per via delle assunzioni di questo modello semplificato, entrambi la direzione dell'asse x ma verso contrario. Indicando con $\hat{\mathbf{x}}$ il versore dell'asse x, cioe' il vettore $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0)$, la forza di attrazione gravitazionale $\mathbf{F}_g$ e' data da

$$\mathbf{F}_g = -k\frac{mM_S}{R_{TS}^2}\hat{\mathbf{x}} \tag{7}$$

Il segno $-$ e' dovuto al fatto che la forza e' attrattiva, cioe' e' diretta verso l'origine S del sistema. La forza centrifuga $\mathbf{F}_c$ avra' espressione

$$\mathbf{F}_c = m\omega^2 R_{TS}\hat{\mathbf{x}} \tag{8}$$

Il principio di azione e reazione implica che $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_c = 0$, ossia

$$k\frac{mM_S}{R_{TS}^2} = m\omega^2 R_{TS} \tag{9}$$

e dunque

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{\tau^2} = k\frac{M_S}{R_{TS}^3} \tag{10}$$

Nota: la relazione appena trovata puo' essere riscritta in termini del periodo di rivoluzione τ come

$$\tau^2 = CR_{TS}^3 \qquad \text{con} \qquad C = \frac{4\pi^2}{kM_S} \tag{11}$$

Questa circostanza, e cioe' il fatto che τ^2 sia proporzionale a R_{TS}^3, e' nota come terza legge di Keplero, perche' la costante di proporzionalita', che in questa approssimazione dipende solo da M_S e dalla costante di gravitazione k, e' effettivamente grossomodo identica per tutti i pianeti che orbitano attorno al Sole. Questa legge piacque molto a Keplero, che essendo anche un astrologo amava molto le regolarita' che apparivano nei suoi calcoli astronomici.

La completa uguaglianza tra la forza centrifuga e la forza centripeta, discussa sopra, e' rispettata, oltre che per un punto posto nel centro della Terra T, anche per tutti i punti che si trovano a distanza R_{TS} dal Sole. Notiamo che la coordinata cartesiana del centro della Terra T e' esattamente uguale a R_{TS}. Se consideriamo i punti contenuti all'interno della Terra e distanti r dal suo centro T, potremo assumere r enormemente piu' piccolo di R_{TS}: si ha infatti che $r < R_T \approx 6300Km = 6.3 \times 10^3 Km$, mentre $R_{TS} \approx 150000000Km = 1.5 \times 10^8 Km$. Il parametro r/R_{TS} e' dunque un numero puro estremamente piccolo (minore di $\epsilon = R_T/R_{TS} \approx 1/25000$). Terremo conto nei calcoli seguenti dei termini proporzionali a ϵ, ma trascureremo i termini proporzionali a ϵ^2. Questa approssimazione va intesa nel senso della precisione della misura: una correzione di ordine ϵ^2 prevede la capacita' di eseguire misure con una precisione superiore a quella effettivamente realizzabile da apparati di misura anche molto sofisticati. A questo ordine di approssimazione i punti $x_v(r)$ di coordinate $x_v(r) = (T, r)$ possono essere considerati a distanza R_{TS} da S. Infatti la distanza $d(x_v, S)$ tra $x_v(r)$ e S e' data, per il teorema di Pitagora, da

$$d(x_v(r), S) = \sqrt{R_{TS}^2 + r^2} = R_{TS}\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R_{TS}}\right)^2} \tag{12}$$

Questa espressione puo' essere riscritta utilizzando la formula per la linearizzazione delle funzioni (5), presentata nella sezione 2. Ricordiamo che data una funzione $f(x)$ si ha che

$$f(x_0 + \delta) = f(x_0) + f'(x_0)\delta + R(\delta) \tag{13}$$

e $R(\delta)$ risulta proporzionale a δ^2. Posto $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ e $\delta = \left(\frac{r}{R_{TS}}\right)^2$, si ha che

$$d(x_v(r), S) = R_{TS}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_{TS}}\right)^2\right] \tag{14}$$

in quanto $f'(x_0) = 1/2$. La correzione alla distanza e' dunque di ordine ϵ^2, e verra' trascurata nei calcoli seguenti. Il resto $R(\delta)$ e' in questo caso proporzionale a ϵ^4, e sara' a maggior ragione trascurato. Dunque possiamo considerare che in tutti i punti $x_v(r)$ di coordinate $x_v(r) = (T, r)$ la forza centrifuga e quella centripeta si bilanciano esattamente. Questo, peraltro, giustifica il fatto di aver considerato parallele in tutti i punti della Terra la forza centrifuga e la forza centripeta. Se ora consideriamo i punti $x_h(r)$ di coordinate $x_h = (T + r, 0)$, l'esatto bilanciamento tra la forza centrifuga e quella centripeta viene perso: infatti avremo che

$$d(x_h(r), S) = R_{TS}\left[1 + \frac{r}{R_{TS}}\right] \tag{15}$$

La differenza tra la distanza di $x_h(r)$ e quella di T dal Sole e' ora proporzionale a ϵ, e dunque dovremo tenerne conto. La forza centrifuga applicata a un punto di massa m posto in $x_h(r)$ avra' la forma

$$\mathbf{F}_c(r) = m\omega^2 R_{TS}\left[1 + \frac{r}{R_{TS}}\right]\hat{\mathbf{x}} \tag{16}$$

mentre quella gravitazionale sara'

$$\mathbf{F}_g(r) = -k\frac{mM_S}{R_{TS}^2\left[1 + \frac{r}{R_{TS}}\right]^2}\hat{\mathbf{x}} \tag{17}$$

Dalla (10), che esprime il fatto che nel centro della Terra, cioe' per $r = 0$, le due forze sono esattamente uguali e contrarie, si ottiene che la (16) si puo' riscrivere come

$$\mathbf{F}_c(r) = k\frac{mM_S}{R_{TS}^2}\left[1 + \frac{r}{R_{TS}}\right]\hat{\mathbf{x}} \tag{18}$$

Inoltre a partire dal risultato di linearizzazione che abbiamo discusso si ha, trascurando i termini proporzionali a ϵ^2,

$$\frac{1}{[1 + \frac{r}{R_{TS}}]^2} = 1 - 2\frac{r}{R_{TS}} \tag{19}$$

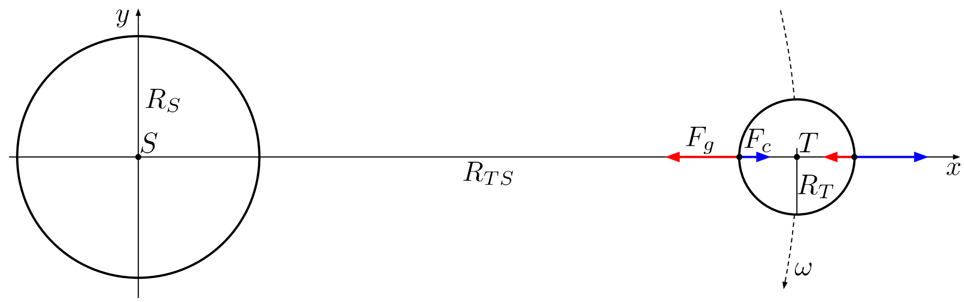

Figure 3: L'origine delle forze mareali solari

Si ottiene dunque che la forza mareale $\mathbf{F}_t(r)$, data da $\mathbf{F}_c(r) + \mathbf{F}_g(r)$, ha nei punti $x_h(r)$ la forma

$$\mathbf{F}_t(r) = 3k\frac{mM_Sr}{R_{TS}^3}\hat{\mathbf{x}} \tag{20}$$

La forza mareale e' quindi positiva, e dunque concorde alla forza centrifuga, per $r > 0$, cioe' per i punti piu' lontani dal Sole, e negativa, e dunque concorde con la forza gravitazionale, per $r < 0$, cioe' per i punti piu' vicini al Sole. Questa risultato viene qualitativamente evidenziato in figura.

Avendo dunque individuato questa forza mareale $\mathbf{F}_t(r)$, assente nei punti $x_v(r)$ e presente nei punti $x_h(r)$, ci poniamo il problema di valutare gli effetti di questa forza sull'altezza dell'oceano.

L'escursione mareale sara' misurata come la differenza dell'altezza dell'oceano nei due punti $x_h(R_T)$ e $x_v(R_T)$.

Per valutare l'escursione mareale effettueremo un *esperimento ideale*, ossia immagineremo un esperimento che nella realta' non e' possibile effettuare, ma che ci fara' comprendere quantitativamente le caratteristiche del fenomeno che vogliamo studiare. Un esperimento ideale molto simile e' presentato da Newton, in un contesto un po' diverso, nella proposizione 20, problema 4, del terzo libro dei Principia. L'esperimento e' il seguente: immaginiamo di collegare i punti $x_h(R_T)$ e $x_v(R_T)$ con il centro della terra T attraverso due sottili tunnel cilindrici, e lasciamo che l'oceano che ricopre la Terra riempia questi due tunnel. Perche' l'acqua sia in equilibrio, il peso complessivo dell'acqua nei due tunnel deve essere lo stesso. Nel tunnel che collega $x_h(R_T)$ con T, pero', il peso effettivo e' leggermente piu' piccolo, perche' alla forza gravitazionale esercitata dal centro della Terra T bisogna sottrarre la piccola componente $\mathbf{F}_t$. Per bilanciare il peso dell'altra colonna di acqua, dunque, questa colonna deve essere leggermente piu' alta, e questa differenza e' esattamente l'escursione mareale dovuta al Sole.

Per effettuare il calcolo dobbiamo applicare il teorema di Gauss in un contesto un po' piu' generale di quello che generalmente viene riportato nei testi scolastici. In particolare, se vogliamo calcolare la forza di gravitazione $\mathbf{P}(R_T)$ che la Terra esercita su un corpo posto puntiforme di massa m posto sulla sua superficie (forza peso), in virtu' del teorema di Gauss possiamo dire che questa forza e' diretta verso il centro della Terra e la sua intensita' e' data da

$$P(R_T) = k\frac{mM_T}{R_T^2} \tag{21}$$

Se ora pensiamo che il corpo sia piu' vicino al centro della Terra, cioe' se pensiamo che il corpo in questione sia una piccola porzione della colonna d'acqua che arriva fino al centro della Terra, posta a distanza $r < R_T$ da quest'ultimo, la forza peso che la Terra esercita sul corpo e' minore, ed e' precisamente quella che eserciterebbe un corpo di densita' δ_T uguale a quella della Terra, ma di raggio r. In altre parole solo la sfera "al di sotto" del corpo agisce su di esso, l'attrazione del guscio sferico "al di sopra" del corpo e' esattamente nulla. La massa di un pianeta con densita' δ_T e raggio $r < R_T$ e' uguale a $M_T\frac{r^3}{R_T^3}$, dato che il volume di una sfera e' proporzionale al cubo del suo raggio. Dunque l'intensita' della forza peso su un punto di massa m posto a distanza r dal centro della Terra e'

$$P(r) = k\frac{mM_T\frac{r^3}{R_T^3}}{r^2} = km\frac{M_T}{R_T^3}\ r \tag{22}$$

Chiamiamo δ la densita' della colonna d'acqua. Considerando la sezione della colonna d'acqua di altezza dr posta a distanza r dal centro della Terra T, possiamo, se dr e' molto piccolo rispetto a R_T, assimilarla a un punto di massa $m = \delta dr$

Il peso totale P della colonna d'acqua si otterra' sommando i pesi di ognuna delle piccole sezioni suddette, assimilando ciascuna a un punto materiale. La distanza r sara' in questo caso compresa tra 0 e R_T. L'operazione che ci permette di eseguire questa somma e' chiamata *integrale*, e si scrive come

$$P = \int_0^{R_T} k\delta\frac{M_T}{R_T^3}\ rdr \tag{23}$$

In questo caso particolare, la somme dei pesi corrisponde a trovare l'area totale della regione al di sotto del grafico della funzione $k\delta\frac{M_T}{R_T^3}\ r$, perche' il peso di ogni sezione di altezza dr viene rappresentato dall'area di un rettangolino di base dr e altezza $k\delta\frac{M_T}{R_T^3}\ r$.

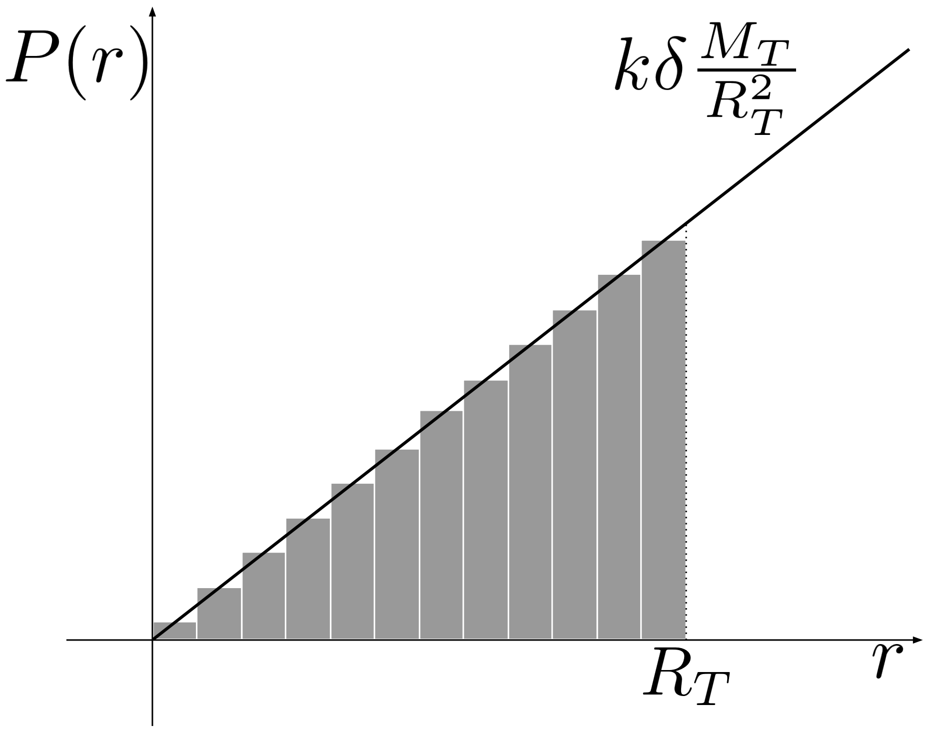

Figure 4: Il calcolo del peso totale della colonna d'acqua nella direzione verticale consiste nel calcolare l'area di un triangolo

Questa regione e' di forma triangolare, ed e' dunque molto semplice calcolarne l'area. la base del triangolo e' R_T, la sua altezza e' $k\delta\frac{M_T}{R_T^2}$ e dunque l'area totale, che rappresenta il peso P, e' data da

$$P = k\delta\frac{M_T}{2R_T} \tag{24}$$

Il calcolo che abbiamo appena svolto ci permette di trovare il peso totale della colonna d'acqua che passa per i punti $x_v(r)$. Il calcolo del peso della colonna d'acqua relativa ai punti $x_h(r)$ e' analogo, ma al contributo appena calcolato si deve sottrarre la piccola correzione mareale. Il contributo mareale al peso della sezione di altezza dr posta a distanza r da T e' ancora lineare in r, come si vede dalla (20), e dunque il calcolo e' esattamente lo stesso. Qui, pero', ricordando che A_S indica l'escursione mareale

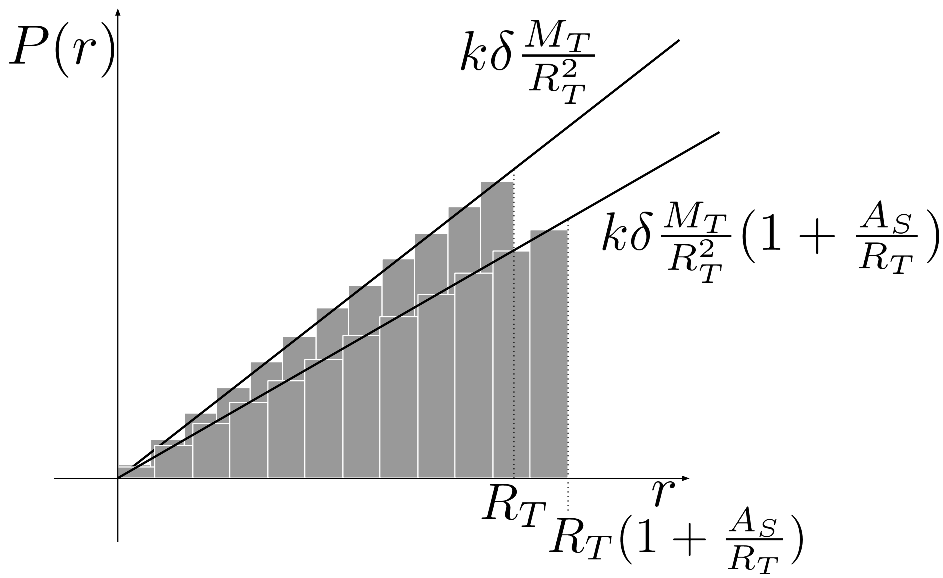

Figure 5: Il calcolo dell'escursione mareale consiste nel trovare la base di un secondo triangolo limitato da una retta con coefficiente angolare piu' piccolo, in modo tale che l'area dei due triangoli sia la stessa

dovuta al contributo solare, la base del triangolo e' pari a $R_T(1 + A_S/R_T)$ l'altezza del triangolo diventa, per il contributo analogo a quello della (24), pari a $k\delta\frac{M_T}{R_T^2}(1 + A_S/R_T)$, mentre per il contributo mareale l'altezza risulta $3k\frac{\delta M_S(R_T+A_S)}{R_{TS}^3}$. Il peso lungo la direzione orizzontale, che deve, per il principio dei vasi comunicanti, eguagliare quello nella direzione verticale,

e' dunque

$$P = k\delta\frac{M_T}{2R_T}\left(1+\frac{A_S}{R_T}\right)^2 - \frac{3}{2}k\frac{\delta M_S(R_T+A_S)^2}{R_{TS}^3}R_T \tag{25}$$

Riscriviamo in modo conveniente il secondo contributo:

$$\frac{3}{2}k\frac{\delta M_S(R_T+A_S)}{R_{TS}^3}R_T = \frac{3}{2}k\delta\left[\frac{M_S}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_{TS}}\right)^3\right]\frac{M_T}{R_T}\left(1+\frac{A_S}{R_T}\right)^2 \tag{26}$$

e osserviamo che i due termini molto piccoli nella (26) sono A_S/R_T e

$$\frac{M_S}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_{TS}}\right)^3 \approx \frac{1.98\times 10^{30}}{5.97\times 10^{24}}\left(\frac{6.37\times 10^3}{1.50\times 10^8}\right)^3 \approx \frac{2.54}{10^8} \tag{27}$$

Dunque il termine

$$\left(1 + \frac{A_S}{R_T}\right)^2 \tag{28}$$

nel membro di destra della (26) puo' essere sostituito con 1, come anche il termine in $(A_S/R_T)^2$ nel membro di sinistra della (25) puo' essere trascurato. Si ottiene alla fine, uguagliando la (25) e la (24)

$$k\delta \frac{M_T}{2R_T} = k\delta \frac{M_T}{2R_T}\left(1 + 2\frac{A_S}{R_T}\right) - \frac{3}{2}k\delta\left[\frac{M_S}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_{TS}}\right)^3\right]\frac{M_T}{R_T} \tag{29}$$

e cioe'

$$\frac{A_S}{R_T} = \frac{3}{2}\left[\frac{M_S}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_{TS}}\right)^3\right] \tag{30}$$

Quest'ultima e' nota come formula di Newton per il calcolo del contributo solare all'escursione mareale. Dalla (27) otteniamo

$$A_S = \frac{3}{2}\,\frac{2.54}{10^8}\,R_T \approx 3.81 \times 6.37 \times 10^{-2}\ m \approx 24\ cm \tag{31}$$

5 Maree lunari

Il contributo alle maree dovuto alla presenza della Luna puo' essere compreso in modo analogo ma la sua valutazione quantitativa e' leggermente piu' complicata per via del fatto che nel caso del sistema Terra-Luna non ha alcun senso immaginare che il baricentro del sistema sia nel centro della Luna, ne' che le rette che congiungono i punti della Terra con il centro della Luna siano perfettamente parallele.

Sia $R_{TL} = 3.84 \times 10^5 Km$ la distanza (media) tra la Terra e la Luna, e sia $M_L = 7.35 \times 10^{22} Kg$ la massa della Luna. La distanza R_{TG} tra il centro della Terra T e il baricentro G del sistema Terra-Luna e' facile da calcolare se, nella (1), scegliamo come origine del sistema di riferimento il centro della Terra T, ponendo dunque nella (1) $R_T = 0$. Si ha in questo caso che

$$R_{TG} = \frac{M_L R_{TL}}{M_T + M_L} = \frac{7.35 \times 10^{22} \times 3.84 \times 10^5}{5.98 \times 10^{24}} Km = 4.72 \times 10^3 Km \tag{32}$$

Il baricentro del sistema Terra-Luna, dunque, si trova all'interno della Terra, circa $1700Km$ al di sotto della crosta terrestre. Attorno a questo punto ruota il sistema, e dunque in particolare anche la Terra. Come nel caso delle maree solari, ci porremo in un sistema solidale con l'asse Terra-Luna, avente l'origine nel baricentro G. Le formule che ci hanno permesso di calcolare la forza centrifuga e quella gravitazionale nel caso delle maree solari sono ora leggermente differenti, perche' mentre la forza gravitazionale dipende dalla distanza R_{TL}, nell'espressione della forza centrifuga che si applica ad un punto individuato da un vettore r che parte dal centro della Terra T compare la quantita' R_{TG}. Si ha infatti che su di un punto di massa m posto nel centro della Terra T

$$\mathbf{F}_g = -k\frac{mM_L}{R_{TL}^2}\hat{\mathbf{x}} \tag{33}$$

dove, come in (7), il segno $-$ e' dovuto al fatto che la forza e' attrattiva, cioe' e' diretta verso il centro della Luna L; la forza centrifuga $\mathbf{F}_c$, invece, sara'

$$\mathbf{F}_c = m\omega^2 R_{TG}\hat{\mathbf{x}} \tag{34}$$

Il principio di azione e reazione implica che $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_c = 0$, ossia

$$k\frac{mM_L}{R_{TL}^2} = m\omega^2 R_{TG} \tag{35}$$

e dunque, dalla (32), si ottiene

$$\omega^2 = k\frac{M_T + M_L}{R_{TL}^3} \tag{36}$$

Calcoliamo prima di tutto la forza centrifuga e la forza centripeta nei punti $x_h(r)$ di coordinate $x_h(r) = (R_{TG} + r, 0)$. Si ha

$$\mathbf{F}_c(r) = m\omega^2(R_{TG} + r)\hat{\mathbf{x}} \tag{37}$$

Utilizzando (32) e (36) si ottiene

$$\mathbf{F}_c(r) = k\frac{mM_L}{R_{TL}^2}\left(1 + \frac{r}{R_{TG}}\right)\hat{\mathbf{x}} = k\frac{mM_L}{R_{TL}^2}\left(1 + \frac{r}{R_{TL}}\frac{M_T + M_L}{M_L}\right)\hat{\mathbf{x}} \tag{38}$$

Per la forza centripeta (gravitazionale), scrivendone direttamente il contributo linearizzato in $\frac{r}{R_{TL}}$, si ottiene, analogamente al caso solare (19),

$$\mathbf{F}_g(r) = -k\frac{mM_L}{R_{TL}^2}\left(1 - 2\frac{r}{R_{TL}}\right)\hat{\mathbf{x}} \tag{39}$$

La forza mareale e' dunque data, nella direzione orizzontale, da

$$\mathbf{F}_t(r) = \mathbf{F}_c(r) + \mathbf{F}_g(r) = k\frac{mM_L r}{R_{TL}^3}\left(3 + \frac{M_T}{M_L}\right)\hat{\mathbf{x}} \tag{40}$$

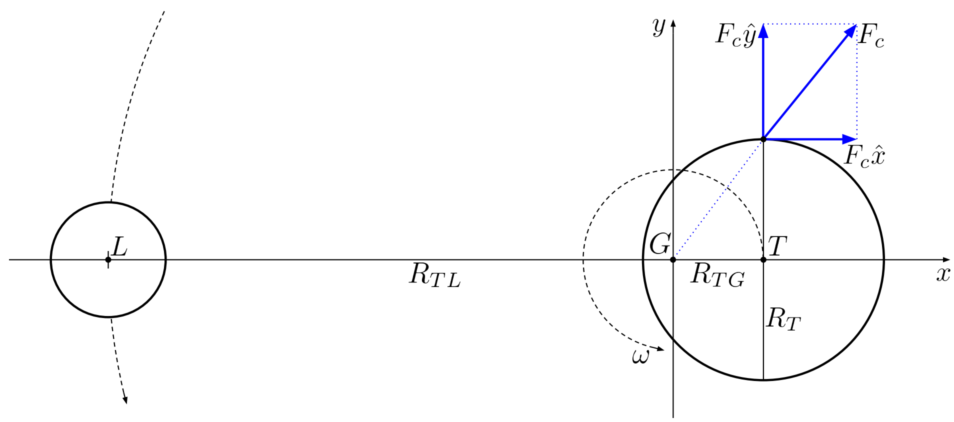

Figure 6: L'origine delle forze mareali lunari

Occorre ora calcolare la forza mareale nella direzione verticale. Poiche' le rette che congiungono il centro della Luna L o il baricentro G con i punti $x_v(r)$ di coordinate $x_v(r) = (R_{TG}, r)$ non possono essere considerate parallele, e' necessario calcolare con attenzione le componenti, orizzontali e verticali, della forza centrifuga e di quella centripeta. Si ha, dalla regola di somma dei vettori (vedi figura)

$$\mathbf{F}_c(r) = m\omega^2(R_{TG}\hat{\mathbf{x}} + r\hat{\mathbf{y}}) = k\frac{mM_L}{R_{TL}^2}\left(\hat{\mathbf{x}} + \frac{r}{R_{TL}}\frac{M_T + M_L}{M_L}\hat{\mathbf{y}}\right) \tag{41}$$

Per la forza gravitazionale, trascurando, come nel caso delle maree solari, i termini in $\left(\frac{r}{R_{TL}}\right)^2$ si ottiene (vedi figura)

$$\mathbf{F}_g(r) = -k\frac{mM_L}{R_{TL}^2}\left(\hat{\mathbf{x}} + \frac{r}{R_{TL}}\hat{\mathbf{y}}\right) \tag{42}$$

Nella direzione verticale si ottiene dunque che la forza mareale ha la forma

$$\mathbf{F}_t(r) = \mathbf{F}_c(r) + \mathbf{F}_g(r) = k\frac{mM_L r}{R_{TL}^3}\left(\frac{M_T}{M_L}\right)\hat{\mathbf{y}} \tag{43}$$

Ripetendo ora il calcolo dell'escursione mareale come abbiamo fatto nel caso del Sole, e' chiaro che quello che comporta la differenza di altezza delle due colonne d'acqua in direzione verticale e orizzontale e' la *differenza* fra le due forze mareali. Il termine $k\frac{mM_L r}{R_{TL}^3}\frac{M_T}{M_L}$, che compare in direzione parallela al vettore r sia in $\mathbf{F}_g(r)$ che in $\mathbf{F}_c(r)$ e' dunque ininfluente, e l'unico termine che influisce sull'escursione mareale e' il termine $3k\frac{mM_L r}{R_{TL}^3}\hat{\mathbf{x}}$ che compare in (40), che ha esattamente la stessa forma, sostituendo M_S con M_L e R_{TS} con R_{TL}, del termine che compare in (20). Dunque si ottiene, per il contributo lunare

$$\frac{A_L}{R_T} = \frac{3}{2}\left[\frac{M_L}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_{TL}}\right)^3\right] \tag{44}$$

che coincide anche in questo caso con la formula di Newton. Andando a eseguire i calcoli si ottiene

$$A_L = \frac{3}{2}\ \frac{7.35}{5.97 \times 10^2}\ \left(\frac{6.37}{3.84 \times 10^2}\right)^3\ R_T \approx 8.42 \times 6.37 \times 10^{-2}\ m \approx 54\ cm \tag{45}$$

I due contributi, solare e lunare, sono dello stesso ordine di grandezza. Quando Terra, Sole e Luna sono grossomodo allineati i due contrbuti si sommano, e danno luogo all'escursione mareale massima. Quando i tre astri sono in quadratura, cioe' la Luna e' al primo e terzo quarto, il Sole tende a alzare la marea nei momenti in cui il contributo lunare tende ad abbassarla, e viceversa. Dunque l'escursione totale risulta essere la differenza tra i due contributi, solare e lunare. E' interessante notare che, siccome Sole e Luna hanno una grandezza apparente molto simile, il rapporto tra le due escursioni mareali e' grossomodo proporzionale alle loro densita': infatti per un generico corpo celeste C, l'escursione mareale ha la forma

$$A_C = \frac{3}{2}\left[\frac{M_C}{M_T}\left(\frac{R_T}{R_{TC}}\right)^3\right] R_T \tag{46}$$

Assumendo C di forma sferica e di densita' δ_C costante, si avra' che

$$M_C = \frac{4}{3}\pi R_C^3 \delta_C \tag{47}$$

Sostituendo (47) in (46) si ottiene

$$A_C = 2\pi\delta_C\left[\frac{R_T^3}{M_T}\left(\frac{R_C}{R_{TC}}\right)^3\right] R_T \tag{48}$$

Ma la quantita' $\frac{R_C}{R_{TC}}$ e' proprio il raggio apparente del corpo celeste C, per cui a parita' di $\frac{R_C}{R_{TC}} = \theta$ l'escursione mareale risulta essere proporzionale a δ_C, in quanto la quantita' $2\pi\left[\frac{R_T^3}{M_T}\theta^3\right] R_T$ non dipende dal corpo celeste C.

Si noti che le densita' di Sole e Luna sono, rispettivamente $\delta_S = 1.41 g/cm^3$ e $\delta_L = 3.34 g/cm^3$, e dunque $\frac{\delta_S}{\delta_L} = 0.42$, mentre $\frac{A_S}{A_L} = 0.44$.

6 Note storiche

Come premesso nell'introduzione, una eccellente trattazione delle teorie prenewtoniane delle maree e' contenuta in [1]. Il tema e' estremamente interessante, e viene messo in relazione dall'autore con i flussi e i riflussi che si sono osservati nella cultura scientifica occidentale. La lettura del testo di Russo e' dunque estremamente consigliata. Nelle poche pagine che seguono ci proponiamo un compito molto piu' limitato, che e' quello di descrivere, sulla base della lettura degli stessi Principia di Newton [3] e di una interessantissima opera piu' "divulgativa" di Eulero [4], il livello di consapevolezza riguardo alla teoria delle maree che si e' creato all'inizio della rinascita della cultura scientifica in Europa.

Nei Principia di Newton si parla esplicitamente di maree nella proposizione 24, teorema 19, del terzo libro, che e' il libro dei Principia di argomento astronomico, in cui Newton applica ai sistemi reali i risultati generali da lui trovati nei libri precedenti. La trattazione dei flussi e dei riflussi del mare discussa in questa parte dell'opera di Newton e' pero' molto qualitativa: la preoccupazione e' quella di descrivere i fatti relativi alle maree alla luce del modello teorico, che viene sviluppato nel primo libro. La comprensione del problema in questa parte del testo e' piuttosto completa, e Newton fa molta attenzione a spiegare, sempre in modo qualitativo ma molto corretto, che non e' strano che le osservazioni non siano in perfetto accordo con il modello teorico, per via dell'effetto delle coste dei continenti e dell'inerzia delle correnti di marea, che hanno bisogno di un certo tempo per invertire il loro corso. Tuttavia e' molto interessante andare a confrontare la teoria esposta sopra con il modello teorico al quale Newton si riferisce. Questo modello teorico e' discusso nel I libro, nella proposizione 66, teorema 26. Nel corollario 19 il teorema e' applicato esplicitamente al problema delle maree, ma il calcolo esplicito, anche se in forma molto piu' geometrica, delle forze mareali e' presentato nella dimostrazione del teorema, caso I. Ebbene, in questa trattazione le forze centrifughe , dovute al moto attorno al baricentro dei corpi, non vengono menzionate. Sembra di poter dire che la formula nota come formula di newton, con il suo fattore 3/2, sia in realta' posteriore. E' molto interessante, per rendersi conto dell'influenza dei Principia nella scienza del '700, leggere la parte relativa alle maree delle "Lettere a una principessa tedesca" di Leonardo Eulero. Eulero, uno dei piu' grandi matematici e fisici del ‘700, si trovo’ a esercitare la funzione di precettore di Sophie Friederike Charlotte Leopoldine di Brandendburg-Schwedt. Nel 1760 le vicende della guerra dei sette anni costrinsero la corte di Federico II di Prussia, di cui la famiglia di Sophie faceva parte, a lasciare Berlino per rifugiarsi a Magdeburgo. Eulero, che era rimasto a Berlino, continuo’ le sue lezioni con una serie di 234 lettere, scritte tra il 1760 e il 1762. Queste lettere, poi pubblicate in varie lingue a partire dal 1770, costituiscono uno straordinario compendio della scienza del ‘700, composto da uno dei suoi principali protagonisti. I problemi scientifici sono trattati senza mai ricorrere a eccessive semplificazioni, ma in uno stile privo di qualunque tecnicismo. Per questo le “Lettere” costituiscono una lettura molto indicata per gli studenti della scuola secondaria di secondo grado.

Le lettere di Eulero relative alla teoria delle maree, che si trovano sul sito [5], sono quelle comprese tra la 62 e la 67, e sono state scritte da Eulero tra il 26 settembre e il 14 ottobre del 1760. Nella prima lettera sull’argomento, la 62, Eulero menziona il fenomeno del flusso e riflusso del mare, ed elenca con una certa precisione i fatti sperimentali che possono essere osservati a tale riguardo. Nella lettera 63 Eulero prende in considerazione alcune teorie precedenti alla teoria di Newton, soffermandosi in particolare sull’ipotesi di Cartesio, che aveva supposto che la Luna, passando sopra la Terra, premesse sull’acqua degli oceani, causando i flussi e i riflussi. E’ interessante notare il fatto che Eulero, correttamente, rifiuta la spiegazione di Cartesio perche’ essa non e’ in accordo con i fatti sperimentali. L’idea che una teoria scientifica dovesse essere giudicata in base alla sua capacita’ descrittiva dei fenomeni sperimentali era dunque, nel 1760, completamente accettata. Nelle quattro lettere successive Eulero descrive la teoria delle maree a partire dalla differenza tra l’attrazione gravitazionale esercitata dalla Luna sui vari punti della Terra, e dunque presentando in modo qualitativo una parte dei calcoli che sono stati descritti nella sezione precedente di queste pagine. E’ tuttavia abbastanza sorprendente che Eulero non abbia tentato, sempre in modo qualitativo, di includere nella descrizione dei fenomeni mareali anche gli effetti del moto di rivoluzione della Luna e della Terra attorno al comune baricentro, che come abbiamo visto contribuiscono con un termine che e’ dello stesso ordine di grandezza di quello dovuto ai contributi centripeti e rendono piu’ chiaro il motivo per cui oltre al rigonfiamento mareale in corrispondenza della Luna se ne crei anche uno in direzione opposta. Va notato, pero’, che nelle lettere che precedono la descrizione delle maree, in cui Eulero descrive la gravitazione universale di Newton, il tema del moto attorno al baricentro non e’ nemmeno accennato.
Il quadro che emerge da questa breve discussione e’ il seguente: mentre le

caratteristiche qualitative del fenomeno dei flussi e riflussi del mare, sia del modello teorico che di quello applicato, erano ben chiare all fine del '600 e all'inizio del '700, il calcolo quantitativo del modello teorico, comunemente attribuito a Newton, e' posteriore, probabilmente ad opera di Kelvin.

7 Attivita' laboratoriali per le classi

Nel contesto della presentazione della teoria delle maree nella scuola secondaria puo' avere senso presentare alla classe delle esperienze laboratoriali che aiutino la comprensione degli aspetti qualitativi. L'utilita' delle esperienze laboratoriali nella presentazione di temi fisico-matematici e' stata, negli ultimi tempi, piu' volte sottolineata. Qui vogliamo ricordare in proposito il progetto dell'Accademia Nazionale dei Lincei "Con la mente e con le mani", che da anni promuove una didattica delle discipline scientifiche, inclusa la matematica, che parta da attivita' concrete.
I temi riguardanti la teoria delle maree che possono essere presentati qualitativamente a partire da esperienze laboratoriali sono l'idea di moto di un sistema di due corpi attorno al baricentro, fondamentale per comprendere la teoria delle maree lunari, e la competizione tra forza centripeta e forza centrifuga.
Il tema dei moti attorno al baricentro, che come abbiamo visto nella sezione precedente non e' affatto banale, e' importante per capire come vi sia anche nel caso delle maree lunari un contributo centrifugo alla forza mareale. E' dunque fondamentale comprendere che, oltre al moto di rivoluzione della Luna attorno alla Terra, esiste anche un contemporaneo moto di rivoluzione della Terra attorno al baricentro del sistema. Un modo molto chiaro per mostrare questo moto di rivoluzione e' quello di confrontare la posizione di una persona che tiene fermo un peso con quella della stessa persona che fa ruotare il peso attorno a se'. Nel secondo caso, la persona deve spostare la schiena all'indietro, e di fatto sta anch'essa ruotando attorno al baricentro.
Le due foto allegate, realizzate durante uno stage presso l'Universita' di Tor Vergata a cui ha partecipato un gruppo di studenti dell'ultimo anno della scuola secondaria, mostra in modo evidente il moto dello studente attorno al baricentro nel momento in cui fa ruotare attorno a se' lo zaino. Le due foto sono fermi immagine di un filmato che puo' essere scaricato dal sito [5]
Si ringrazia Adriano Ceccotti per aver acconsentito alla pubblicazione delle foto e del filmato.
Per realizzare il filmato e' molto conveniente utilizzare una ripresa con molti fps (frame per second), perche' in tal modo e' possibile scegliere il

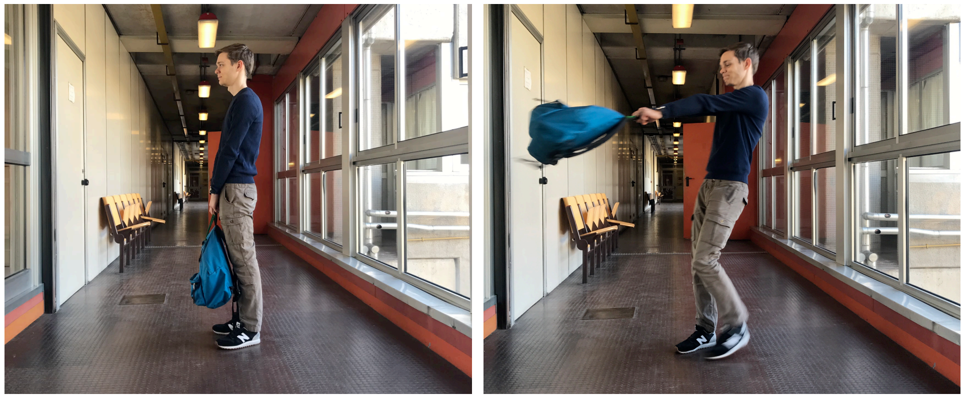

Figure 7: Nella prima foto la persona e' ferma, nella seconda sta facendo ruotare attorno a se' lo zaino. Si vede come il corpo debba spostarsi all'indietro per mantenere l'equilibrio, ruotando come lo zaino attrono al baricentro comune.

fotogramma che evidenzia in modo migliore il moto attorno al baricentro di chi fa ruotare un peso attorno a se'.

Per mostrare la competizione tra forza centrifuga e forza centripeta, in modo da evidenziare sperimentalmente l'idea della Terra che "e' come una fionda", si puo' procedere nel modo seguente. Si infila, avendola preventivamente cosparsa di colla, una vite in una pallina di schiuma di poliestere (pallina antistress). Alla vite si fissa poi un filo di ferro che viene ripiegato e fissato al mandrino di un trapano. Se la pallina antistress viene fotografata da ferma, le sua forma e' perfettamente sferica. Se invece il mandrino del trapano viene fatto ruotare, e la pallina viene ripresa, di nuovo avendo l'avvertenza di utilizzare il massimo numero possibile di fps, si puo' osservare confrontando la pallina con una linea circolare, che la sua forma non e' piu' perfettamente sferica, ma si e' allungata nella direzione del filo di ferro (vedi figura). La forma della pallina e' analoga alla forma che assumono gli oceani attorno alla Terra. L'esperimento appena descritto aiuta qualitativamente a comprendere la trattazione della teoria descritta nella sezione 4.

Per comprendere qualitativamente la teoria delle maree lunari, descritta nella sezione 5, si puo' procedere con un po' piu' di attenzione in modo analogo. Il filo di ferro fissato alla pallina deve ora essere fissato, all'estremo opposto, ad una seconda pallina, piu' piccola e piu' leggera. L'insieme del filo e la pallina piu' piccola, che rappresenta naturalmente la Luna, deve essere

Figure 8: Nella prima foto la pallina e' ferma, nella seconda sta girando. Il confronto con la linea circolare mostra come la pallina sia perfettamente sferica quando e' ferma, mentre quando e' messa in rotazione dal trapano si allunga per effetto della forza centripeta (esercitata dal filo) e di quella centrifuga.

molto leggero, perche' bisogna fare in modo che il baricentro del sistema costituito dalle due palline e il filo di ferro si trovi all'interno della pallina antistress che rappresenta la Terra. Una volta creato questo sistema rigido si cerca di individuarne approssimativamente il baricentro, e attraverso di esso si fa passare, sempre cospargendolo prima di colla, un grosso chiodo, che viene poi fissato al mandrino del trapano. Se il sistema e' fermo, la forma della pallina antistress e' circolare, ma se il sistema viene messo in rotazione dal trapano accade, come nel caso precedente, che la sua forma non e' piu' perfettamente sferica, ma si e' allungata nella direzione del filo di ferro (vedi figura).

FIGURA DA FARE

Questi due esperimenti, che vogliono mostrare come l'effetto mareale dovuto al Sole e alla Luna sia dello stesso tipo, possono essere realizzati per presentare la teoria qualitativa delle maree anche a ragazzi della scuola secondaria di primo grado, o dei primi anni della scuola secondaria di secondo grado. Le foto e i filmati (questi ultimi, come nel caso precedente, possono essere scaricati da [5]) sono stati anch'essi realizzati durante lo stage menzionato in precedenza.

Bibliografia

[1] L. Russo, Flussi e riflussi, Feltrinelli, 2003

[2] Butikov, A Dynamical Picture of the Oceanic Tides, Am. J. Phys., vol. 70, 2002. http://butikov.faculty.ifmo.ru/Oceanic_Tides.pdf. Vedi anche http://butikov.faculty.ifmo.ru/TidesOD.pdf

[3] I. Newton, Principi matematici della filosofia naturale, a cura di A.Pala, UTET, 1989

[4] L. Eulero, Lettere a una principessa tedesca, a cura di G. Cantelli, Boringhieri, 1958.

[5] mia homepage