

Lezione 2 meccanica analitica

(1)

Riepilogo:

Abbiamo provato che considerando l'equazione del moto di una particella di massa m in una dimensione, con forze conservative

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (1)$$

definito

$$V(x) = - \int dx F(x) \quad (2)$$

la quantità

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) \quad (3)$$

si conserva lungo le soluzioni delle equazioni (1). Attraverso la conservazione dell'energia (3) si può risolvere ~~il problema~~ il problema del moto per separazione di variabili.

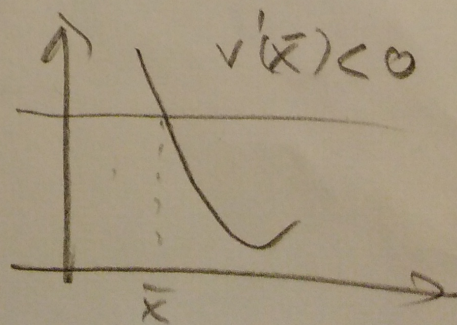
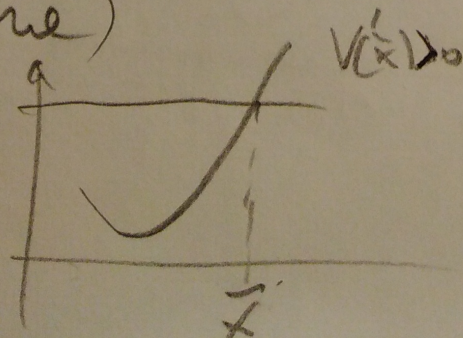
Si ottiene che, per tratti del moto in cui non cambia il segno della velocità $\dot{x}(t)$, si ha

(2)

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = t - t_0 \quad (4)$$

La (4) rappresenta l'integrazione del moto in una dimensione. Il segno $\pm$ nella radice dipende dal segno della velocità iniziale.

Per essere una soluzione completa del problema del moto, la (4) deve essere attentamente valutata perché nei punti $\bar{x}$ in cui $E = V(\bar{x})$, detti punti di inversione, l'integrale è improprio. Nella prima lezione abbiamo provato che se $V'(\bar{x}) \neq 0$ (e sarà $V'(\bar{x}) > 0$ se $V(x) < V(\bar{x})$ per $x < \bar{x}$, $V'(\bar{x}) < 0$ in caso contrario, vedi figure)



l'integrale in (4) è convergente,
e il tempo necessario ad invertire il
segno della velocità è finito.

Ora mostriamo che se $V(\bar{x})=0$ il
tempo necessario a raggiungerlo diverge.

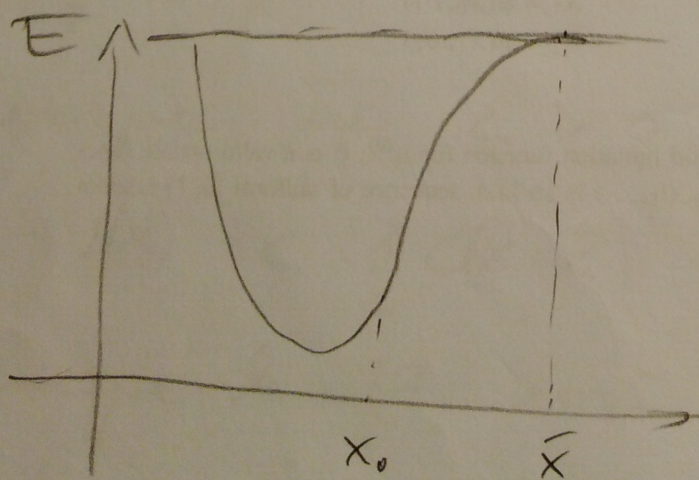
Dobbiamo cioè valutare

$$\int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}$$

con $V(\bar{x})=E$
 $V'(\bar{x})=0$ (5)

per fissare le idee poniamo $x_0 < \bar{x}$ e
dunque $V(x) < V(\bar{x}) \forall x_0 \leq x < \bar{x}$.

La situazione è dunque quella
del disegno



Osserviamo che, per la continuità di $V''(x)$, esiste una scelta di x_0 che garantisce che $V''(x) \leq 0 \quad \forall x_0 \leq x \leq \bar{x}$.
In questo intervallo si può scrivere per $x_0 \leq x \leq \bar{x}$

$$V(x) \geq V(\bar{x}) + V'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} V''(\xi)(\bar{x} - x)^2 \quad (6)$$

con $x_0 \leq \xi \leq \bar{x}$.

$V''(\xi)$ può essere stimato come $\max_{[x_0, \bar{x}]} V''(x) = -c$

Se $c > 0$, si avrà, utilizzando $V(\bar{x}) = E$ e $V'(\bar{x}) = 0$

$$\int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \geq \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \frac{1}{2} c (x - \bar{x})^2}} \quad (7)$$

Se $c = 0$ (come nel caso, per es., di $V(x) = -x^4$ e $E = \infty$) esisterà comunque un $c > 0$ tale che

$$E - V(x) < \frac{1}{2} c (x - \bar{x})^2 \quad \forall x \in (x_0, \bar{x}),$$

e dunque la (7) non è comunque soddisfatta. L'integrale nel membro di destra della (7) è dunque

(5)
divergente, un moto che ha dati
iniziali tali che $E = V(\bar{x})$ non
raggiungerà $\bar{x}$ in un tempo finito e
dunque è detto moto a meta
asintotica. Sul testo di Arnold
l'esistenza di moti a meta
asintotica è provata senza far uso
di stime, semplicemente dall'unica
soluzione del moto: l'esistenza
di un moto che raggiunge $\bar{x}$ in
un tempo finito implicherebbe,
invertendo il segno del tempo,
l'esistenza di un moto che
partendo da $\bar{x}$ con velocità nulla
lo abbandona in un tempo finito.
Ma partendo in $\bar{x}$ con velocità
nulla la soluzione (unica) del
moto è $x(t) = \bar{x} \forall t$, dato che
la forza in $\bar{x}$ è nulla.

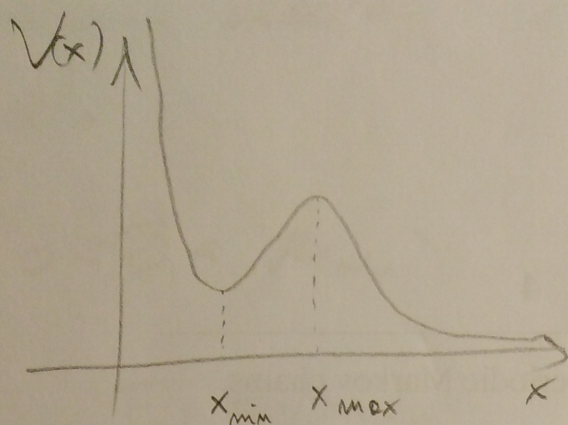
Quindi presupporre l'esistenza di ⑥
un moto che raggiunge $\bar{x}$ in tempo
finito contraddice l'unicità della
soluzione del moto.

I risultati che abbiamo fin qui
dimostrato permettono di
studiare qualitativamente i moti
unidimensionali attraverso il
cosiddetto ritratto in fase, che
corrisponde allo studio delle curve
di livello di E nel piano $x, \dot{x}$.

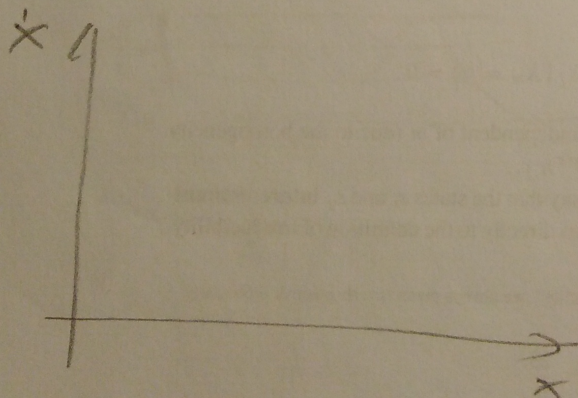
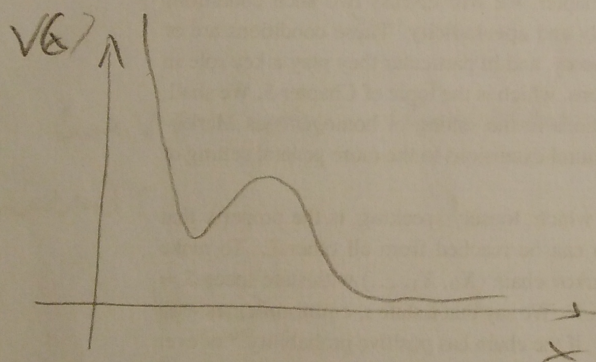
Presentiamo uno studio di questo
tipo per un potenziale generico,
anche se C^∞ .

Sia V un potenziale descritto
dalla figura seguente

(7)



Diregniamo lo spazio delle fasi in modo da far coincidere in verticale i punti dei due assi delle x



e fissiamo un livello di energia E . È facile vedere che per $E \leq 0$ non può esserci moto

Studiamo allora
livello:

varie curve di $\textcircled{8}$

$$0 < E_1 < V(x_{\min})$$

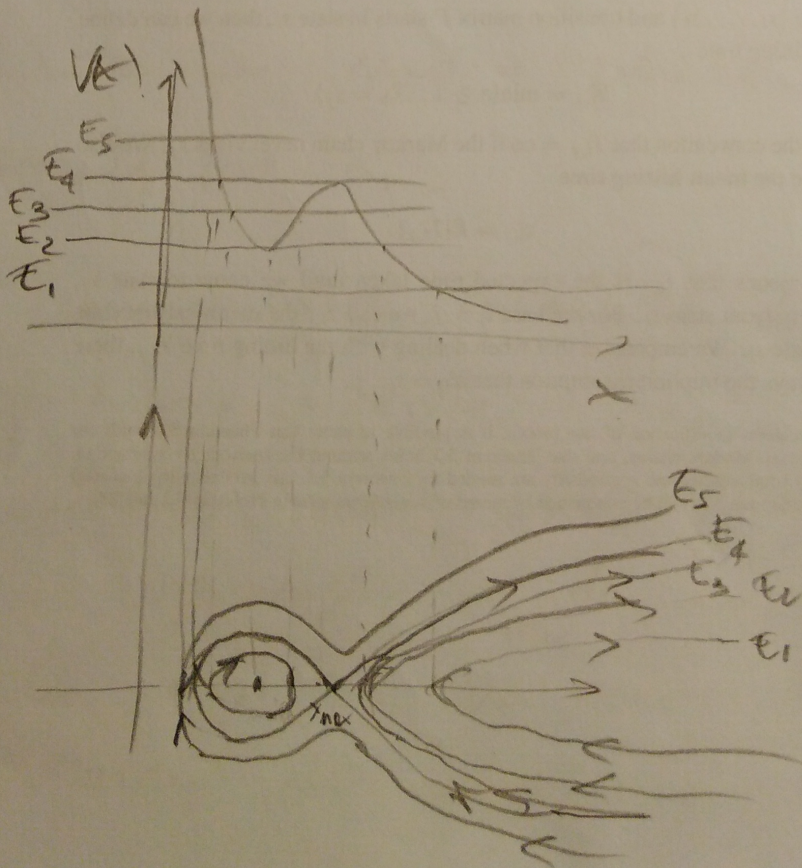
$$E_2 = V(x_{\min})$$

$$V(x_{\min}) < E_3 < V(x_{\max})$$

$$E_4 = V(x_{\max})$$

$$E_5 > V(x_{\max})$$

Le curve di livello saranno della forma
seguente



Commenti:

- E_1 è composto da un'orbita che contiene un'unica traiettoria aperta, che parte a $t = -\infty$ da $x = +\infty$ e torna a $t = +\infty$ in $x = +\infty$
- E_2 è composto da due traiettorie, una qualitativamente uguale alla precedente e una costituita da un unico punto $x = x_{min}$, $\dot{x} = 0$ (equilibrio stabile, come vedremo)
- E_3 oltre alla traiettoria aperta presenta una traiettoria chiusa, che rappresenta un moto periodico attorno all'equilibrio x_{min}
- E_4 è composto di 4 orbite distinte: un equilibrio instabile $x = x_{max}$, $\dot{x} = 0$, due moti a mete asintotiche, uno che tende a raggiungere x_{max} da sinistra e uno da destra, un moto che partendo nell'interno destro di x_{max} tende a $+\infty$

$-E_s$ è composta di un unico moto (10)
che proviene e tende a $x = +\infty$

Esercizi

1) mostrare che, detto $(\bar{x})$ un punto in cui $V(\bar{x}) = E$, se $V'(\bar{x}) \neq 0$ le orbite che intersecano l'asse delle x in $\bar{x}$ sono verticali, altrimenti hanno derivata finita (o nulla)

2) studiare qualitativamente il potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax^4$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$