Nome e cognome (in stampatello):

Corso di meccanica analitica. Compito Scritto del 11 febbraio 2013.

In un piano orizzontale π un disco omogeneo di massa M e raggio R e' libero di ruotare senza attrito attorno al suo centro O. Sul disco e' fissata una guida rettilinea di massa trascurabile su cui puo' scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m. Una molla ideale di massa trascurabile, di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k connette il punto P al centro del disco O.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema, e le equazioni di Lagrange.

2) Si scriva l'Hamiltoniana del sistema, e le equazioni di Hamilton.

3) Si discutano simmetrie e quantita' conservate del sistema, e si dica se il sistema e' integrabile.

4) Si definisca una trasformazione canonica $(p, q) \rightarrow (P, Q)$ tale che $P = p/2q$ e si scriva l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico $H(p, q) = 1/2(p^2 + q^2)$ nelle coordinate (P, Q).

Corso di meccanica analitica. Compito Scritto del 14 febbraio 2014.

In un piano verticale π di assi x, y, avente l'asse y orientato secondo l'alto, e' posta una guida ellittica di equazione $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$. Un punto materiale P_1 di massa $m = 1$ scorre senza attrito sulla guida. Un secondo punto materiale P_2, sempre di massa $m = 1$, e' vincolato a rimanere a distanza fissa l da P_1.

1) Si scrivano la Lagrangiana e l'Hamiltoniana del sistema.

2) Si discutano le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilita' al variare del parametro a.

3) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema. Ponendo poi il piano π in posizione orizzontale e $a = 1$, si risolva il sistema in termini di integrali indefiniti con il metodo della separazione delle variabili.

Nome e cognome (in stampatello):

Corso di meccanica analitica. Scritto del 9 febbraio 2015.

Una sbarretta omogenea di lunghezza l e massa m e' vincolata a muoversi in un piano verticale π, mantenendo il suo baricentro sull'asse verticale delle y di un riferimento cartesiano Oxy. Le estremita' della sbarretta P_1 e P_2 sono collegate all'origine O con due molla ideali di costante elastica k_1 e di lunghezza a riposo nulla. L'estremita' P_1 e' collegata da una molla di costante elastica k_1 all'asse delle y. la molla e' vincolata a rimanere in posizione orizzontale. Si utilizzino come coordinate lagrangiane la coordinata y del centro di massa e l'angolo θ formato dal segmento OP_1 con l'asse delle x.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema, e le equazioni di Lagrange.

2) Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e si discuta la loro stabilita'.

3) Si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.

4) Si scriva l'Hamiltoniana del sistema

5) Posto ora $k_2 = 0$ si individuino le simmetrie e le quantita' conservate e si risolva il sistema con il metodo di Hamilton-Jacobi. Si dia una descrizione completa dei moti del sistema.

Nome e cognome (in stampatello):

Corso di meccanica analitica. Compito Scritto del 25 febbraio 2014.

In un piano orizzontale π un disco omogeneo di massa M e raggio R e' libero di ruotare senza attrito attorno al suo centro O, che supporremo posto nell'origine di un riferimento cartesiano del piano π. Sul disco e' fissata una guida rettilinea di massa trascurabile che passa per il centro O del disco. Sulla guida puo' scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m. Una molla ideale di massa trascurabile, di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k_1 connette il punto P al centro del disco O. Una seconda molla di costante elastica k_2 connette il punto P_1 di intersezione tra la guida e il bordo del disco con il punto P_2 di coordinate $(R, 0)$.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema, e le equazioni di Lagrange.

2) Si scriva l'Hamiltoniana del sistema, e le equazioni di Hamilton.

3) Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilita', e si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni del sistema attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Posto $k_2 = 0$ si discutano simmetrie e quantita' conservate del sistema, e si integri il moto con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Nome e cognome (in stampatello):

Corso di meccanica analitica. Compito Scritto del 9 maggio 2013. Compito n. 1

In un piano verticale π un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare sull'asse x. Sul bordo del disco e' vincolato a muoversi senza attrito un punto materiale P di massa m. Una molla ideale di massa trascurabile, di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k connette il punto P con l'origine delle coordinate O. Si suggerisce di utilizzare come coordinate lagrangiane la posizione x del centro di massa O_D del disco e l'angolo θ che il segmento O_DP forma con la verticale.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema, e le equazioni di Lagrange.

2) Nel caso $k = 0$ si discutano simmetrie e quantita' conservate del sistema, e si riduca il sistema a un moto unidimensionale, indicandone esplicitamente la quadratura per separazione di variabili.

3) Nel caso $k > 0$ si discutano le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilita' e si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile

SOLO PER GLI STUDENTI IMMATRICOLATI NELL'ANNO ACCADEMICO 2010-2011 O PRECEDENTI
4) Si scriva l'Hamiltoniana del sistema, e le equazioni di Hamilton.

5) Si trovi un valore della costante k per cui il sistema e' integrabile.

6) Per il valore di k trovato al punto 5) si individui la trasformazione canonica $(p, q) \to (P, Q)$ tale che $P_1 = p_x, Q_1 = x$ e $P_2 = \frac{p_\theta}{1-\frac{m}{m+3/2M}}$ e si scriva l'Hamiltoniana del sistema nelle coordinate (P, Q).

Nome e cognome (in stampatello):

Corso di meccanica analitica. Compito Scritto del 9 maggio 2013. Compito n. 2

In un piano verticale π un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare sull'asse x. Sul bordo del disco e' vincolato a muoversi senza attrito un punto materiale P di massa m. Una molla ideale di massa trascurabile, di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k connette il punto P con il punto di coordinate $(0, R)$. Si suggerisce di utilizzare come coordinate lagrangiane la posizione x del centro di massa O_D del disco e l'angolo θ che il segmento $O_D P$ forma con la verticale.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema, e le equazioni di Lagrange.

2) Nel caso $k = 0$ si discutano simmetrie e quantita' conservate del sistema, e si riduca il sistema a un moto unidimensionale, indicandone esplicitamente la quadratura per separazione di variabili.

3) Nel caso $0 < k < \frac{mg}{R}$ si discutano le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilita' e si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile

Nome e cognome (in stampatello):

Corso di meccanica analitica. I esonero del 17 aprile 2014.

In un piano verticale π, avente l'asse y orientato secondo la verticale ascendente, un punto materiale P_1 di massa m e' vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse orizzontale x. Un secondo punto materiale P_2, sempre di massa m, e' vincolato a rimanere a distanza fissata l da P_1 ed e' collegato con una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k con il punto di coordinate $(0, 2l)$.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema, e le equazioni di Lagrange.

2) Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e si discuta la loro stabilita' al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{kl}$

3) Si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni del sistema attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

Nome e cognome (in stampatello):

Corso di meccanica analitica. Esonero del 12 maggio 2015.

In un piano verticale e' definito un riferimento cartesiano avente l'asse y orientato come la verticale ascendente. Due punti materiali P_1 e P_2 sono vincolati a scorrere senza attrito sull'asse x del riferimento; un punto materiale P_2 e' vincolato a scorrere senza attrito sull'asse y del riferimento; i punti materiali P_1 e P_2 sono vincolati a rimanere a distanza fissata l. Tutti e tre i punti sono di ugual massa m. Due molle ideali identiche, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collegano il punto P_3 a ciascuno dei due punti P_1 e P_2. Si ponga $\lambda = \frac{mg}{kl}$

1) Si scriva la lagrangiana del sistema.

2) Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e si discuta la loro stabilita' al variare di λ.

3) Si calcoli la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.

Corso di meccanica analitica. Compito Scritto del 8 giugno 2013.

In un piano verticale π un punto materiale P_1 di massa $m = 1$ scorre senza attrito su una guida di equazione $y = 1$. Un secondo punto materiale P_2, sempre di massa $m = 1$, scorre senza attrito su una guida di equazione $y = -\frac{1}{2}ax^2$. I due punti sono collegati da una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k.

1) Si scriva l'Hamiltoniana del sistema.

2) Si discutano le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilita' al variare del parametro k.

3) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema. Nel caso particolare $a = 0$ si risolva il sistema in termini di integrali indefiniti con il metodo della separazione delle variabili.

Nome e cognome (in stampatello):

Corso di meccanica analitica. Esonero del 4 giugno 2015.

In un piano orizzontale un punto materiale P_1 di massa m e' vincolato a scorrere senza attrito su una guida circolare di raggio R. Un secondo punto P_2, sempre di massa m, e' vincolato a scorrere senza attrito sulla retta passante per P_1 e per il centro O della circonferenza. Una molla ideale, di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega il punto P_1 al punto P_2.

1) Si scriva l'hamiltoniana del sistema.

2) Si individuino le simmetrie e le quantita' conservate del sistema.

3) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema e la si integri in termini di integrali indefiniti con il metodo della separazione delle variabili.

Corso di meccanica analitica. Compito Scritto del 14 giugno 2013.

In un piano verticale π un disco omogeneo di raggio R e di massa M puo' ruotare senza attrito attorno al suo baricentro, vincolato a rimanere nell'origine O di un sistema di assi cartesiani avente l'asse y diretto come la verticale ascendente. Un punto materiale P di massa m e' vincolato a rimanere a distanza R da un punto fissato ξ sul bordo del disco. Il punto P e' collegato all'origine da una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e di costante elastica k. Si consiglia di utilizzare come coordinate lagrangiane l'angolo θ_1 formato dal segmento $O\xi$ con la verticale discendente e l'angolo θ_2 formato dal segmento ξP con la verticale discendente.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema.

2) Si discutano le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilita' al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR}$.

3) Si calcolino le pulsazioni ω delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.

4) Ponendo ora il piano π in posizione orizzontale ($g = 0$), si scriva l'Hamiltoniana del sistema. Si individuino simmetrie e quantita' conservate.

5) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema e la si risolva in termini di integrali indefiniti con il metodo della separazione delle variabili.

Per recuperare il primo esonero rispondere alle domande 1), 2) e 3).
Per recuperare il secondo esonero rispondere alle domande 4) e 5).

Nome e cognome (in stampatello):

Corso di meccanica analitica. Scritto del 3 giugno 2014.

Una sbarretta omogenea di lunghezza l e massa m e' vincolata a muoversi in un piano orizzontale π, mantenendo il suo baricentro sull'asse delle x di un riferimento cartesiano Oxy. La prima estremita' della sbarretta P_1 e' collegata all'origine O con una molla ideale di costante elastica k_1 e di lunghezza a riposo nulla. La seconda estremita' della sbarretta P_2 e' collegata all'origine O con una molla ideale di costante elastica $k_2 < k_1$ e di lunghezza a riposo nulla. Si utilizzino come coordinate lagrangiane la coordinata x del centro di massa e l'angolo θ formato dal segmento OP_1 con l'asse delle x.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema, e le equazioni di Lagrange.

2) Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e si discuta la loro stabilita'.

3) Si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni del sistema attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Si scriva l'Hamiltoniana del sistema

5) Posto ora $k_1 = k_2$ si individuino le simmetrie e le quantita' conservate e si risolva il sistema con il metodo di Hamilton-Jacobi. Si dia una descrizione completa dei moti del sistema.

Chi deve recuperare il secondo esonero deve rispondere alle domande 2), 4) e 5)

Nome e cognome (in stampatello):

Corso di meccanica analitica. Compito del 12 giugno 2015.

In un piano orizzontale dotato di un sistema di riferimento (Oxy) un punto materiale P di massa m si muove nel semipiano $x > 0$ ed e' attratto dall'origine O con una forza di potenziale $\frac{1}{4}\rho^4$, dove ρ e' la distanza del punto dall'origine O. Il punto e' anche sottoposto a una forza repulsiva che dipende dalla sua distanza dall'asse y, ed ha potenziale $\frac{1}{2x^2}$.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema in coordinate polari.

2) Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e si discuta la loro stabilita'.

3) Si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni del sistema attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Si scriva l'Hamiltoniana del sistema

5) Osservando che l'hamiltoniana puo' essere scritta come $H(\Phi(p_\theta, \theta), p_\rho, \rho)$, si risolva il problema del moto del sistema in termini di integrali definiti con il metodo di Hamilton-Jacobi per separazione delle variabili.

Chi deve recuperare il primo esonero deve rispondere alle domande 1), 2) e 3)
Chi deve recuperare il secondo esonero deve rispondere alle domande 4) e 5)

Corso di meccanica analitica. Compito Scritto del 9 settembre 2013.

In un piano verticale π un punto materiale P_1 di massa m e' vincolato a rimanere a distanza $d = 1$ dall'origine O di un sistema inerziale, avente l''asse y orientato lungo la verticale ascendente. Un secondo punto materiale P_2, sempre di massa m, e' vincolato a rimanere sulla retta r che contiene i due punti P_1 e O. I vincoli sono senza attrito. Il punto P_1 e' poi collegato al punto P_2 con una molla ideale di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Si utilizzino come coordinate lagrangiane l'angolo θ formato dal segmento OP_1 con la verticale discendente e la coordinata x sulle retta r a partire dal punto P_1, considerando x positiva quando P_1 e' tra O e P_2.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema.

2) Si discutano le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilita' al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{2k}$.

3) Si calcolino le pulsazioni ω delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.

4) Ponendo ora il piano π in posizione orizzontale ($g = 0$), si scriva l'Hamiltoniana del sistema. Si individuino simmetrie e quantita' conservate.

5) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema e la si risolva in termini di integrali indefiniti con il metodo della separazione delle variabili.

Per recuperare il primo esonero rispondere alle domande 1), 2) e 3).
Per recuperare il secondo esonero rispondere alle domande 4) e 5).

In un piano orizzontale dotato di un sistema di riferimento (Oxy) un punto materiale P di massa m si muove nel semipiano $y > 0$ ed e' attratto dall'origine O con una forza di potenziale $\frac{1}{6}\rho^6$, dove ρ e' la distanza del punto dall'origine O. Il punto e' anche sottoposto a una forza repulsiva che dipende dalla sua distanza dall'asse x, ed ha potenziale $\frac{1}{2y^2}$.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema in coordinate polari.

2) Si individuino le posizioni di equilibrio del sistema e si discuta la loro stabilita'.

3) Si calcolino le pulsazioni delle piccole oscillazioni del sistema attorno ad una posizione di equilibrio stabile.

4) Si scriva l'Hamiltoniana del sistema

5) Osservando che l'hamiltoniana puo' essere scritta come $H(\Phi(p_\theta, \theta), p_\rho, \rho)$, si risolva il problema del moto del sistema in termini di integrali definiti con il metodo di Hamilton-Jacobi per separazione delle variabili.

Chi deve recuperare il primo esonero deve rispondere alle domande 1), 2) e 3)
Chi deve recuperare il secondo esonero deve rispondere alle domande 4) e 5)

Corso di meccanica analitica. Compito Scritto del 23 settembre 2013.

In un piano verticale π un punto materiale P_1 di massa m e' vincolato a scorrere senza attrito su una guida posta in un piano verticale avente l'"asse y orientato lungo la verticale ascendente. La guida ha equazione $y = \alpha e^{-x^2}$. Un secondo punto materiale P_2, sempre di massa m, e' vincolato a rimanere a distanza l dal punto P_1. Anche questo vincolo e' senza attrito. Si consiglia di utilizzare come coordinate lagrangiane l'angolo θ formato dal segmento P_1P_2 con la verticale discendente e la coordinata x del punto P_1.

1) Si scriva la Lagrangiana del sistema.

2) Si discutano le posizioni di equilibrio del sistema e la loro stabilita' al variare del parametro α.

3) Scegliendo un opportuno valore di α, si calcolino le pulsazioni ω delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.

4) Ponendo ora $\alpha = 0$ si scriva l'Hamiltoniana del sistema. Si individuino simmetrie e quantita' conservate.

5) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per il sistema e la si risolva in termini di integrali indefiniti con il metodo della separazione delle variabili.