5 Meccanica analitica

5.1 Equazioni di Hamilton

Sia $\mathcal{L}(q,\eta,t)$ una funzione regolare definita in un aperto $U \subset \mathbb{R}^{2l+1}$ ($q,\eta \in \mathbb{R}^l, t \in \mathbb{R}$) e supponiamo che la matrice

$$h_{ij}(q,\eta,t) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta_i \, \partial \eta_j}(q,\eta,t) \tag{5.1}$$

abbia determinante non nullo in U. Allora è possibile risolvere rispetto alle variabili η il sistema di equazioni

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i}(q,\eta,t) \tag{5.2}$$

e, detta $\eta = \alpha(q,p,t)$ la soluzione, esiste un aperto $V \subset \mathbb{R}^{2l+1}$ ed un diffeomorfismo regolare $\Phi : U \mapsto V$, tale che

$$\Phi(q,\eta,t) = (q,p,t) \quad , \quad \Phi^{-1}(q,p,t) = (q,\alpha(q,p,t),t) \tag{5.3}$$

Sull'insieme V definiamo allora una funzione $H(q,p,t)$, *l'Hamiltoniana* corrispondente alla Lagrangiana $\mathcal{L}(q,\eta,t)$, tramite la

$$H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{l} p_i \alpha_i(q,p,t) - \mathcal{L}(q,\alpha(q,p,t),t) \tag{5.4}$$

$H(q,p,t)$ è ovviamente anch'essa una funzione regolare e vale la seguente proposizione.

Proposizione 5.1 *Se $q(t)$ è una soluzione in U delle equazioni di Lagrange di Lagrangiana $\mathcal{L}(q,\eta,t)$ e $p_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i}(q(t),\dot{q}(t),t)$, allora $q(t)$ e $p(t)$ sono soluzione del sistema di equazioni differenziali del primo ordine*

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t),p(t),t) \\ \\ \dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t),p(t),t) \end{cases} \tag{5.5}$$

Dim. - Usando la definizione di $p(t)$, le equazioni di Lagrange possono scriversi nella forma

$$\dot{p}_i(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(q(t),\dot{q}(t),t) \tag{5.6}$$

D'altra parte, dalla (5.4) segue che

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{l} p_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j}\frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \tag{5.7}$$

avendo usato, nell'ultimo passaggio, la (5.2). La prima delle (5.5) segue immediatamente dalle (5.6) e (5.7).

La seconda delle (5.5) segue dall'osservazione che $\dot{q}(t) = \alpha(q(t), p(t), t)$, per la (5.3) e la definizione di $p(t)$, e dalla

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{l} p_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial p_i} = \alpha_i \tag{5.8}$$

∎

Le equazioni (5.5) si chiamano *Equazioni di Hamilton* relative all'Hamiltoniana $H(q, p, t)$. Si noti che si tratta di equazioni differenziali in forma normale, per cui ad esse si applica direttamente il teorema di esistenza ed unicità locale.

La Prop. 5.1 può essere invertita. Sia $H(q, p, t)$ una funzione regolare definita in un aperto $V \subset \mathbb{R}^{2l+1}$ e supponiamo che la matrice

$$h'_{ij}(q, p, t) = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \, \partial p_j}(q, p, t) \tag{5.9}$$

abbia determinante non nullo in V. Allora è possibile risolvere rispetto alle variabili p il sistema di equazioni

$$\eta_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(q, p, t) \tag{5.10}$$

e, detta $p = \beta(q, \eta, t)$ la soluzione, esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^{2l+1}$ ed un diffeomorfismo $\Psi : V \mapsto U$, tale che

$$\Psi(q, p, t) = (q, \eta, t) \quad , \quad \Psi^{-1}(q, \eta, t) = (q, \beta(q, \eta, t), t) \tag{5.11}$$

Procedendo come nella dimostrazione della Prop. 5.1, è facile dimostrare la proposizione seguente.

Proposizione 5.2 *Se $(q(t), p(t))$ è una soluzione in V delle equazioni di Hamilton di Hamiltoniana $H(q, p, t)$, allora $q(t)$ è una soluzione delle equazioni di Lagrange di Lagrangiana*

$$\mathcal{L}(q, \eta, t) = \sum_{i=1}^{l} \eta_i \beta_i(q, \eta, t) - H(q, \beta(q, \eta, t), t) \tag{5.12}$$

Nel caso di un sistema meccanico soggetto a vincoli ideali e forze attive conservative, la Lagrangiana è una funzione indipendente dal tempo della forma

$$\mathcal{L}(q, \eta) = T(q, \eta) - V(q) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{l} g_{ij}(q) \eta_i \eta_j - V(q) \tag{5.13}$$

Inoltre $g_{ij}(q)$ è una matrice definita positiva, quindi invertibile. Ne segue che $p_i = \sum_{j=1,\dots,l} g_{ij}\eta_j$ e che queste equazioni possono essere invertite. Pertanto esiste l'Hamiltoniana corrispondente è

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} g_{ij}^{-1}(q)p_i p_j + V(q) = T(q,p) + V(q) \tag{5.14}$$

Si noti che l'Hamiltoniana coincide in questo caso con l'energia del sistema ed è quindi, come sappiamo, un integrale del moto. Questa proprietà è in realtà un caso particolare di una proprietà più generale delle equazioni di Hamilton, descritta dalla proposizione seguente.

Proposizione 5.3 *Se $(q(t),p(t))$ è una soluzione delle equazioni di Hamilton di Hamiltoniana $H(q,p,t)$, allora*

$$\frac{d}{dt}H[q(t),p(t),t] = \frac{\partial H}{\partial t}[q(t),p(t),t] \tag{5.15}$$

Dim. - Usando le (5.5), si trova

$$\frac{d}{dt}H[q(t),p(t),t] = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{l}(-\dot{p}_i\dot{q}_i + \dot{q}_i\dot{p}_i) = \frac{\partial H}{\partial t}$$

∎

Si noti anche che, se si considera la funzione di η

$$F(\eta) = \sum_{i=1}^{l} p_i\eta_i - \mathcal{L}(q,\eta,t) \tag{5.16}$$

parametrizzata da q, p, t, la (5.2) può essere vista come la condizione di annullamento del gradiente di $F(\eta)$. Pertanto i valori di η che soddisfano la (5.2) sono i punti di stazionarietà di $F(\eta)$. Nel caso della Lagrangiana (5.13), la matrice Hessiana in questi punti coincide con la matrice $g_{ij}(q)$ cambiata di segno, pertanto è una matrice definita negativa. Ne segue che le soluzioni della (5.2) sono punti di massimo di $F(\eta)$, per cui la (5.4) può anche scriversi

$$H(q,p,t) = \max_{\eta\in\mathbb{R}^l}\left[\sum_{i=1}^{l} p_i\eta_i - \mathcal{L}(q,\eta,t)\right] \tag{5.17}$$

Questa formula compare anche in altre applicazioni ed è detta *Trasformazione di Legendre.*

5.2 Principio di Hamilton

Le soluzioni delle equazioni di Hamilton soddisfano un principio variazionale simile al Principio di minima azione, valido per le soluzioni delle equazioni di Lagrange.

Data l'Hamiltoniana regolare $H(q, p, t)$ definita nell'aperto V, l'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ e i vettori $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{2l}$, consideriamo la famiglia $\mathcal{F}$ delle funzioni $x(t) = (q(t), p(t)), t \in [t_1, t_2]$, tali che $(q(t), p(t), t) \in V$ e $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ (ovviamente supponiamo che t_1, t_2, x_1, x_2 siano definiti in modo che $\mathcal{F}$ non sia vuoto). Indichiamo con X gli elementi di $\mathcal{F}$ e definiamo su $\mathcal{F}$ un funzionale S, ponendo

$$A(X) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{i=1}^{l} p_i(t)\dot{q}_i(t) - H(q(t), p(t), t) \right] \tag{5.18}$$

Vale la seguente Proposizione.

Proposizione 5.4 *X è un punto di stazionarietà di $\mathcal{F}$ se e solo se $q(t)$ e $p(t)$ soddisfano le equazioni di Hamilton di Hamiltoniana H.*

Dim. - Supponiamo che $x(t)$ sia una soluzione delle equazioni di Hamilton e consideriamo una curva regolare $y(\varepsilon), \varepsilon \in [-\delta_y, \delta_y], \delta > 0$, in $\mathcal{F}$, tale che $y(0) = X$. Per dimostrare che X è un punto di stazionarietà di $A(X)$, bisogna dimostrare che, comunque si scelga questa curva, la derivata in $\varepsilon = 0$ della funzione $f(\varepsilon) = A(y(\varepsilon))$ è nulla.

Si noti che, se si indica con $y(\varepsilon, t) = (q(t, \varepsilon), p(t, \varepsilon))$ la funzione corrispondente a $y(\varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ soddisfa le condizioni $y(t_i, \varepsilon) = x_i, i = 1, 2$, per ogni ε, per cui

$$\frac{\partial q}{\partial \varepsilon}(t_i, \varepsilon) = 0, \quad i = 1, 2 \tag{5.19}$$

D'altra parte, usando la (5.18) e la definizione di $f(\varepsilon)$, si ha

$$\begin{aligned} f'(\varepsilon) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{l} \left[\frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \frac{\partial q_i}{\partial t}(t, \varepsilon) + p_i(t, \varepsilon) \frac{\partial^2 q_i}{\partial \varepsilon\, \partial t}(t, \varepsilon) - \right. \\ &- \left. \frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t, \varepsilon), p(t, \varepsilon), t) \frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) - \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t, \varepsilon), p(t, \varepsilon), t) \frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \right] \end{aligned}$$

Se si integra per parti il termine con la derivata seconda di $q(t, \varepsilon)$ e si usa la (5.19), si trova, ponendo $\varepsilon = 0$ nell'espressione precedente ed usando il fatto che $q(t, 0) = q(t)$, $p(t, 0) = p(t)$,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{l} \left\{ v_i(t) \Big[\dot{q}_i(t) - \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t), t) \Big] - \right. \\ &- \left. u_i(t) \Big[\dot{p}_i(t) + \frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t), t) \right\} \end{aligned} \tag{5.20}$$

avendo posto $u(t) = \partial q/\partial\varepsilon(t,0)$ e $v(t) = \partial p/\partial\varepsilon(t,0)$. Ma, per ipotesi, $q(t)$ e $p(t)$ soddisfano le equazioni di Hamilton, per cui, quali che siano le funzioni $u(t)$ e $v(t)$, $f'(0) = 0$.

Supponiamo, viceversa, che X sia un punto di stazionarietà di A, cioè che la (5.20) sia verificata per ogni scelta della curva $y(\varepsilon)$ in $\mathcal{F}$. Ciò implica che la (5.20) è verificata per ogni scelta delle funzioni $u(t)$ e $v(t)$, soggette alla sola condizione di essere nulle in t_1 e t_2, per la (5.19); per dimostrarlo, date $u(t)$ e $v(t)$, si può, per esempio, porre $q(t,\varepsilon) = q(t)+\varepsilon u(t)$ e $p(t,\varepsilon) = p(t)+\varepsilon v(t)$, con $\varepsilon \in [-\delta_y, \delta_y]$ e δ_y abbastanza piccolo perché $(q(t,\varepsilon), p(t,\varepsilon), t) \in V$. D'altra parte è facile dimostrare che l'integrale a secondo membro della (5.20) può essere nullo per ogni scelta di $u(t)$ e $v(t)$, sia pure con la condizione che siano nulle negli estremi di integrazione, solo se le espressioni in parentesi quadra sono identicamente nulle, cioè solo se $x(t)$ soddisfa le equazioni di Hamilton. ∎

Si noti che, durante la dimostrazione, non si è mai usato il fatto che i valori di $p(t)$ fossero fissati negli estremi dell'intervallo $[t_1, t_2]$; la sola condizione essenziale era che fossero fissati i valori di $q(t)$. Del resto, le soluzioni delle equazioni di Hamilton sono univocamente determinate assegnando i valori di $q(t)$ e $p(t)$ ad uno stesso istante, cioè assegnando $2l$ condizioni, per cui non ci si può aspettare in generale che siano necessarie $4l$ condizioni per individuare una soluzione, come avverrebbe se si fissassero i valori sia di $q(t)$ che di $p(t)$ in t_1 e t_2. Si noti peraltro che le condizioni al bordo $q(t_i) = q_i$, per quanto sufficienti per formulare il Principio di Hamilton, non garantiscono in generale l'esistenza di una soluzione. Il Principio di Hamilton si limita a formulare una condizione equivalente all'esistenza.

La formulazione scelta del Principio di Hamilton è giustificata solo dall'uso che ne verrà fatto più avanti, nel par. 5.5.

5.3 Trasformazioni canoniche

Uno dei motivi principali di interesse nelle equazioni di Hamilton è la possibilità di definire una classe di trasformazioni che lasciano invarianti la forma delle equazioni. Queste trasformazioni coinvolgono sia le variabili q che le variabili p, per cui sono molto più generali dei cambiamenti di coordinate del formalismo Lagrangiano, che coinvolgono solo le variabili q, ma non le variabili η, che devono essere necessariamente associate nelle equazioni del moto alle $\dot{q}$.

Definizione 5.1 *Sia H una funzione regolare su $V \subset \mathbb{R}^{2l+1}$ e sia*

$$(Q, P, t) = (F(q,p,t), G(q,p,t), t) \equiv C(q,p,t) \tag{5.21}$$

un diffeomorfismo di classe C^∞ di V in $W = C(V)$ (si noti che questa trasformazione manda t in sé stesso, per cui si dice **isocrona***). Supponiamo inoltre* *che la matrice Jacobiana di C abbia determinante non nullo in tutto W, che su W sia definita una funzione regolare H' e che, se $(q(t),p(t)), t \in [t_1,t_2]$ è una soluzione delle equazioni di Hamilton con Hamiltoniana $H(q,p,t)$, allora $Q(t) = F(q(t),p(t),t)$ e $P(t) = G(q(t),p(t),t)$ forniscono una soluzione delle equazioni di Hamilton con Hamiltoniana $H'(Q,P,t)$. In tal caso si dice che C è una* **trasformazione canonica di V in W rispetto alle Hamiltoniane H e H'**, *che si dicono* **canonicamente coniugate**.

Se, per di più, le funzioni F e G nella (5.21) sono indipendenti dal tempo e se, comunque si scelga l'Hamiltoniana regolare $H(q,p)$ indipendente dal tempo, C è canonica rispetto ad H e $H'(Q,P) = H(C^{-1}(Q,P))$, allora C si dice completamente canonica.

Si noti che, nel caso di una trasformazione completamente canonica, $H'(Q,P)$ si ottiene da $H(q,p)$, operando il cambiamento di variabili corrispondente nell'espressione di H, per cui, nelle applicazioni alla Meccanica, H' rappresenta ancora l'energia. Nel seguito le trasformazioni completamente canoniche verranno in generale chiamate, per brevità, trasformazioni canoniche.

Più avanti faremo vedere come è possibile costruire delle trasformazioni canoniche. Facciamo intanto vedere come sia possibile caratterizzarle in termini delle proprietà della matrice Jacobiana della trasformazione.

Poniamo, come nella (5.21),

$$\begin{aligned} Q &= F(q,p) \\ P &= G(q,p) \end{aligned} \tag{5.22}$$

e definiamo le 4 matrici $l \times l$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \quad , \quad B_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \\ C_{ij} &= \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \quad , \quad D_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial p_j} \end{aligned} \tag{5.23}$$

La matrice $(2l) \times (2l)$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

è la matrice Jacobiana della trasformazione (5.22) e pertanto, in base alla definizione (5.1), $\det \mathbf{L} \neq 0$.

Definiamo inoltre la matrice $(2l) \times (2l)$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

avendo indicato con I la matrice identità $l \times l$, ed indichiamo con $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ∇H, $\nabla H'$ i vettori a $2l$ componenti uguali, rispettivamente, a (q,p), (Q,P),

$(\partial H/\partial q, \partial H/\partial p)$, $(\partial H'/\partial Q, \partial H'/\partial P)$. Queste definizioni implicano, in particolare, che le equazioni di Hamilton possono scriversi nella forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{E}\,(\nabla H)(\mathbf{x}(t)) \tag{5.26}$$

Si noti inoltre che

$$\mathbf{E}^2 = -\mathbf{I} \tag{5.27}$$

dove $\mathbf{I}$ indica al matrice identità $(2l) \times (2l)$.

Proposizione 5.5 *Condizione necessaria e sufficiente perché una trasformazione sia completamente canonica è che*

$$\mathbf{L}^{-1} = -\mathbf{E}\mathbf{L}^T\mathbf{E} \tag{5.28}$$

Dim. - In base alla definizione (5.1) le soluzioni delle equazioni di Hamilton di Hamiltoniana $H(q,p)$ e $H'(Q,P)$ sono collegate fra loro dalle relazioni

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = C(\mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} F(q(t),p(t)) \\ G(q(t),p(t)) \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

ed inoltre

$$H(\mathbf{x}) = H'(C(\mathbf{x})) \tag{5.30}$$

Usando la (5.30) e le (5.23), si vede facilmente che

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} \quad , \quad (\nabla H)(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^T(\nabla H')(C(\mathbf{x})) \tag{5.31}$$

Ne segue, usando anche la (5.26), che

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{E}\nabla H(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{E}\mathbf{L}^T\nabla H'(\mathbf{y}) \tag{5.32}$$

D'altra parte, la (5.26) usata per H' e la (5.27) implicano che $\nabla H'(\mathbf{y}) = -\mathbf{E}\dot{\mathbf{y}}$, per cui

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{L}[-\mathbf{E}\mathbf{L}^T\mathbf{E}]\dot{\mathbf{y}} \tag{5.33}$$

Di qui segue immediatamente la (5.28). ∎

Una matrice di ordine pari che soddisfa la (5.28) si dice *matrice simplettica.* Dalla (5.28) si ricava immediatamente, calcolando il determinante di ambedue i membri ed usando il fatto che $\det(\mathbf{E}) = \det(-\mathbf{E}) = (-1)^l$, che

$$\det(\mathbf{L})^2 = 1 \tag{5.34}$$

Pertanto il determinante di ogni matrice simplettica è eguale a 1 in modulo. Ne segue che le trasformazioni canoniche conservano il volume, poiché $\mathbf{L}$ è la matrice Jacobiana della trasformazione. Si può in realtà dimostrare che $\det(\mathbf{L}) = +1$.

5.4 Parentesi di Poisson

La caratterizzazione (5.28) delle trasformazioni canoniche viene talora rappresentata in una maniera diversa, che ora andiamo a descrivere.

Definizione 5.2 *Date due funzioni regolari $f(q,p)$ e $g(q,p)$, si definisce* **parentesi di Poisson** *di f e g e si indica con il simbolo $\{f,g\}(q,p)$ la funzione*

$$\{f,g\}(q,p) = \sum_{i=1}^{l} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i}(q,p)\frac{\partial g}{\partial p_i}(q,p) - \frac{\partial f}{\partial p_i}(q,p)\frac{\partial g}{\partial q_i}(q,p) \right] \tag{5.35}$$

Si noti che, usando questa definizione, le equazioni di Hamilton possono scriversi nella forma

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad , \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \tag{5.36}$$

e che

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad , \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \tag{5.37}$$

Proposizione 5.6 *Condizione necessaria e sufficiente perché una trasformazione sia completamente canonica è che, se la trasformazione è definita come in (5.22),*

$$\{F_i, G_j\} = \delta_{ij} \quad , \quad \{F_i, F_j\} = \{G_i, G_j\} = 0 \tag{5.38}$$

Dim. - Usando la (5.24) e la (5.25), la (5.28) può scriversi nella forma

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \tag{5.39}$$

$$= \begin{pmatrix} (-BC^T + AD^T) & (BA^T - AB^T) \\ (-DC^T + CD^T) & (DA^T - CB^T) \end{pmatrix} \tag{5.40}$$

Confrontando il primo e l'ultimo termine di questa eguaglianza, si trova

$$\begin{aligned} (-BC^T + AD^T)_{ij} &= \delta_{ij} \\ (BA^T - AB^T)_{ij} &= 0 \\ (-DC^T + CD^T)_{ij} &= 0 \\ (DA^T - CB^T)_{ij} &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

La quarta equazione coincide con la prima, in quanto $(DA^T - CB^T) = (-BC^T + AD^T)^T$. Le altre tre, usando le (5.23), si possono scrivere nella forma (5.38). ∎

Le (5.38) vengono di solito scritte usando per F e G i nomi delle variabili Q e P:

$$\{Q_i, P_j\}(q,p) = \delta_{ij} \quad , \quad \{Q_i, Q_j\}(q,p) = \{P_i, P_j\}(q,p) = 0 \tag{5.41}$$

Questa espressione, insieme alle (5.37), giustifica l'affermazione che *le trasformazioni canoniche lasciano invarianti le parentesi di Poisson delle variabili q e p.* In realtà le trasformazioni canoniche lasciano invarianti le parentesi di Poisson di qualunque coppia di funzioni, come mostra la proposizione seguente.

Proposizione 5.7 *Date due funzioni regolari $f(q,p)$ e $g(q,p)$, siano $\tilde{f}(Q,P) = f(C^{-1}(Q,P))$ e $\tilde{g}(Q,P) = g(C^{-1}(Q,P))$ le loro rappresentazioni in termini delle variabili $(Q,P) = C(q,p)$. Allora*

$$\{f,g\}(q,p) = \{\tilde{f},\tilde{g}\}(C(q,p)) \tag{5.42}$$

Dim. - Per definizione $f(q,p) = \tilde{f}(F(q,p), G(q,p))$ e $g(q,p) = \tilde{g}(F(q,p), G(q,p))$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\{f,g\} &= \sum_{k=1}^{l} \left\{ \sum_{i=1}^{l} \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Q_i}\frac{\partial F_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P_i}\frac{\partial G_i}{\partial q_k} \right] \sum_{j=1}^{l} \left[\frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q_j}\frac{\partial F_j}{\partial p_k} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial P_j}\frac{\partial G_j}{\partial p_k} \right] - \right. \\
&- \left. \sum_{i=1}^{l} \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Q_i}\frac{\partial F_i}{\partial p_k} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P_i}\frac{\partial G_i}{\partial p_k} \right] \sum_{j=1}^{l} \left[\frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q_j}\frac{\partial F_j}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{g}}{\partial P_j}\frac{\partial G_j}{\partial q_k} \right] \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial Q_i}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q_j}\{F_i,F_j\} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Q_i}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial P_j}\{F_i,G_j\} + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P_i}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial Q_j}\{G_i,F_j\} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P_i}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial P_j}\{G_i,G_j\} \right]
\end{aligned}$$

La (5.42) segue immediatamente dalle (5.38). ∎

5.5 Funzioni generatrici

Nel par. 5.2 abbiamo visto che le soluzioni delle equazioni di Hamilton possono essere caratterizzate come punti di stazionarietà del funzionale (5.18) nell'insieme $\mathcal{F}$ lì definito. Notiamo ora che questo funzionale può essere scritto nella forma

$$A(X) = \int_{\mathcal{C}} \left[\sum_{i=1}^{l} p_i dq_i - H(q,p,t)\, dt \right] \tag{5.43}$$

dove $\mathcal{C}$ rappresenta la curva $\{(q(t), p(t), t), t \in [t_1, t_2]\}$ nell'insieme $V \subset \mathbb{R}^{2l+1}$ su cui è definita l'Hamiltoniana e l'espressione in parentesi quadra è una forma differenziale su V.

Supponiamo ora che C sia un diffeomorfismo di classe C^∞ di V in W. Dato $X \in \mathcal{F}$, indichiamo come prima con $x(t) = (q(t), p(t))$ la funzione corrispondente e definiamo

$$\mathcal{F}' = \{x'(t) = (Q(t), P(t)) = C(x(t), t), t \in [t_1, t_2] : X \in \mathcal{F}\} \qquad (5.44)$$

Se C è una trasformazione canonica rispetto alle Hamiltoniane H e H' (vedi def. (5.1)), il Principio di Hamilton implica che, se $\bar{X}$ è un punto di stazionarietà di $A(X)$, la funzione $\bar{x}'(t) = C(x(t), t)$ è un punto di stazionarietà del funzionale su $\mathcal{F}'$

$$A'(X') = \int_{\mathcal{C}'} \left[\sum_{i=1}^{l} P_i dQ_i - H'(Q, P, t)\, dt \right] \qquad (5.45)$$

la definizione di $\mathcal{C}'$ essendo analoga a quella di $\mathcal{C}$. Ovviamente l'affermazione precedente è vera anche se si scambiano i ruoli di H e H'.

Osserviamo che i due funzionali (5.43) e (5.45) possono essere visti ambedue in modo naturale, utilizzando il diffeomorfismo C fra V e W, come funzionali sia su $\mathcal{F}$ che su $\mathcal{F}'$. Per esempio, se $Q = F(q, p, t)$, dQ_i può essere interpretato come il differenziale $dF_i(q, p, t)$ su V o come il differenziale dQ_i su W. Per sottolineare questo fatto, d'ora in poi useremo i simboli Q_i e P_i per indicare sia le variabili nell'insieme $C(V)$ che le funzioni F_i e G_i; analogamente i simboli q_i e p_i indicheranno anche le funzioni che permettono di rappresentarle in funzione di Q e P.

Siamo ora in grado di formulare una condizione sufficiente perché C sia canonica rispetto ad H e H'.

Proposizione 5.8 *Condizione sufficiente perché la trasformazione C sia canonica rispetto alle Hamiltoniane $H(q, p, t)$ e $H'(Q, P, t)$ è che esista una funzione $R(q, p, t)$, tale che, su V*

$$\left[\sum_{i=1}^{l} p_i dq_i - H(q, p, t)\, dt \right] = \left[\sum_{i=1}^{l} P_i dQ_i - H'(Q, P, t)\, dt \right] + dR(q, p, t) \quad (5.46)$$

cioè tale che le due forme differenziali $(pdq - Hdt)$ e $(PdQ - H'dt)$ differiscano per un differenziale esatto.

Dim. - La (5.46), insieme alle (5.43) e (5.45), implica che

$$A(X) = A'(C(X)) + R(x_2, t_2) - R(x_1, t_1) \quad , \quad \forall X \in \mathcal{F} \qquad (5.47)$$

avendo indicato con $C(X)$ l'elemento di $\mathcal{F}'$ individuato dalla funzione $C(x(t), t)$ e con $x_i = x(t_i)$ i valori fissi negli estremi dell'intervallo $[t_1, t_2]$ delle funzioni $X \in \mathcal{F}$. Infatti l'integrale lungo la curva $\mathcal{C}$ di $PdQ - H'dt$, pensata come forma differenziale su V, coincide con l'integrale lungo la curva $\mathcal{C}' = C(\mathcal{C})$, se si pensa $PdQ - H'dt$ come forma differenziale su W. Essendo C un diffeomorfismo, nella (5.47) i ruoli di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ possono scambiarsi. Pertanto, essendo x_1 e x_2 eguali per tutti gli $X \in \mathcal{F}$, X è un punto di stazionarietà di A se e solo se $C(X)$ è un punto di stazionarietà di A'. Per il Principio di Hamilton, ciò significa che $x(t)$ è una soluzione delle equazioni di Hamilton per H se e solo se $C(x(t),t)$ è una soluzione delle equazioni di Hamilton per H'. Pertanto C è una trasformazione canonica rispetto ad H e H'. ▌

La Prop. 5.8 permette di costruire facilmente, data comunque la funzione regolare $H(q,p,t)$, un gran numero di trasformazioni canoniche rispetto ad H ed ad una opportuna Hamiltoniana $H'(Q,P,t)$.

Proposizione 5.9 *Sia $H(q,p,t)$ una funzione regolare sull'aperto $V \in \mathbb{R}^{2l+1}$ e sia $S(q,Q,t)$ una funzione regolare su $\mathbb{R}^{2l+1}$, tale che*

$$\det\left\{\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial Q_j}(q,Q,t)\right\} \neq 0 \quad , \quad \forall (q,Q,t) \in \mathbb{R}^{2l+1} \tag{5.48}$$

Allora le equazioni

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}(q,Q,t) \\ P_i &= -\frac{\partial S}{\partial Q_i}(q,Q,t) \end{aligned} \tag{5.49}$$

definiscono (implicitamente) un diffeomorfismo C fra V ed un aperto W, tale che C è una trasformazione canonica rispetto ad $H(q,p,t)$ e la funzione regolare $H'(Q,P,t)$ su W, tale che

$$H'(C(q,p,t),t) = H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,Q(q,p,t),t) \tag{5.50}$$

Dim. - Per il Teorema del Dini, la (5.48) garantisce che la prima delle (5.49) può essere risolta rispetto alle variabili Q; sia $Q(q,p,t)$ la soluzione. Se si sostituisce questa funzione nel secondo membro della seconda delle (5.49), si ottiene una funzione $P(q,p,t)$, che definisce, insieme a $Q(q,p,t)$, una trasformazione regolare C di V in $W = C(V)$. Questa trasformazione è un diffeomorfismo, in quanto la (5.48) garantisce che anche la seconda delle (5.49) può essere risolta rispetto alle q in termini di una funzione $q(Q,P,t)$, che, inserita nel secondo membro della prima delle (5.49), permette di ottenere anche p in funzione di Q, P e t. Poniamo ora

$$R(q,p,t) = S(q,Q(q,p,t),t) \tag{5.51}$$

Le (5.49) implicano che

$$dR = \sum_{i=1}^{l} [p_i dq_i - P_i dQ_i] + \frac{\partial S}{\partial t}\, dt \tag{5.52}$$

È pertanto facile verificare che la condizione (5.46) è verificata, se si definisce H' come nella (5.50). Ne segue che la trasformazione C è canonica rispetto ad H e H'. ∎

Proposizione 5.10 *Sia $H(q,p,t)$ una funzione regolare sull'aperto $V \in \mathbb{R}^{2l+1}$ e sia $S(q,P,t)$ una funzione regolare su $\mathbb{R}^{2l+1}$, tale che*

$$\det\left\{\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\,\partial P_j}(q,P,t)\right\} \neq 0 \quad , \quad \forall (q,P,t) \in \mathbb{R}^{2l+1} \tag{5.53}$$

Allora le equazioni

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}(q,P,t) \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}(q,P,t) \end{aligned} \tag{5.54}$$

definiscono (implicitamente) un diffeomorfismo C fra V ed un aperto W, tale che C è una trasformazione canonica rispetto ad $H(q,p,t)$ e la funzione regolare $H'(Q,P,t)$ su W, tale che

$$H'(C(q,p,t),t) = H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,P(q,p,t),t) \tag{5.55}$$

Dim. - Si dimostra come prima che le (5.54) definiscono un diffeomorfismo, dopo di che si definisce

$$R(q,p,t) = S(q,P(q,p,t),t) - \sum_{i=1}^{l} Q_i P_i \tag{5.56}$$

Le (5.54) implicano che

$$\begin{aligned} dR &= \sum_{i=1}^{l} [p_i dq_i + Q_i dP_i - d(Q_i P_i)] + \frac{\partial S}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^{l} [p_i dq_i - P_i dQ_i] + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}$$

È pertanto facile verificare che la condizione (5.46) è verificata, se si definisce H' come nella (5.55). Ne segue che la trasformazione C è canonica rispetto ad H e H'. ∎

In modo del tutto simile si dimostrano le proposizioni seguenti.

Proposizione 5.11 *Sia $H(q,p,t)$ una funzione regolare sull'aperto $V \in \mathbb{R}^{2l+1}$ e sia $S(p,Q,t)$ una funzione regolare su $\mathbb{R}^{2l+1}$, tale che*

$$\det\left\{\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\,\partial Q_j}(p,Q,t)\right\} \neq 0 \quad , \quad \forall (p,Q,t) \in \mathbb{R}^{2l+1} \tag{5.57}$$

Allora le equazioni

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial S}{\partial p_i}(p,Q,t) \\ P_i &= -\frac{\partial S}{\partial Q_i}(p,Q,t) \end{aligned} \tag{5.58}$$

definiscono (implicitamente) un diffeomorfismo C fra V ed un aperto W, tale che C è una trasformazione canonica rispetto ad $H(q,p,t)$ e la funzione regolare $H'(Q,P,t)$ su W, tale che

$$H'(C(q,p,t),t) = H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t}(p,Q(q,p,t),t) \tag{5.59}$$

Proposizione 5.12 *Sia $H(q,p,t)$ una funzione regolare sull'aperto $V \in \mathbb{R}^{2l+1}$ e sia $S(p,P,t)$ una funzione regolare su $\mathbb{R}^{2l+1}$, tale che*

$$\det\left\{\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\,\partial P_j}(p,P,t)\right\} \neq 0 \quad , \quad \forall (p,P,t) \in \mathbb{R}^{2l+1} \tag{5.60}$$

Allora le equazioni

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial S}{\partial p_i}(p,P,t) \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}(p,P,t) \end{aligned} \tag{5.61}$$

definiscono (implicitamente) un diffeomorfismo C fra V ed un aperto W, tale che C è una trasformazione canonica rispetto ad $H(q,p,t)$ e la funzione regolare $H'(Q,P,t)$ su W, tale che

$$H'(C(q,p,t),t) = H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t}(p,P(q,p,t),t) \tag{5.62}$$

Le quattro proposizioni precedenti mostrano che, data una funzione regolare $S(u,v,t)$ su $\mathbb{R}^{2l+1}$ ($u,v \in \mathbb{R}^l$) tale che la matrice $\{\partial^2 S/\partial u_i \partial v_j\}$ ha determinante non nullo, è possibile associarle quattro differenti trasformazioni canoniche, mettendo in corrispondenza u con le variabili q o p e v con le variabili Q o P. La funzione S viene detta *funzione generatrice della trasformazione canonica* corrispondente.

Se la funzione generatrice non dipende esplicitamente dal tempo, le trasformazioni canoniche ad essa associate sono tali che $H(q,p,t) = H'(C(q,p),t)$, sono quindi trasformazioni completamente canoniche. Ci si potrebbe a questo punto chiedere se tutte le trasformazioni completamente canoniche possono essere associate con una opportuna funzione generatrice. Che questo non sia vero segue dall'osservazione che tutti e quattro i tipi di trasformazioni canoniche associati con una funzione generatrice son tali che uno dei due gruppi di variabili q e p ed uno dei due gruppi di variabili Q e P possono essere espressi in funzione delle variabili rimanenti. Per esempio, nella trasformazione definita implicitamente dalle (5.49), le variabili p e P sono espresse in funzione delle q e Q. Questa proprietà non segue dalla definizione di trasformazione canonica, come mostra il seguente esempio.

Sia $l = 2$ e si consideri la trasformazione seguente

$$\begin{array}{ll} Q_1 = q_1 \quad , & P_1 = p_1 \\ Q_2 = p_2 \quad , & P_2 = -q_2 \end{array} \tag{5.63}$$

È facile verificare che questa trasformazione è completamente canonica, applicando direttamente la definizione 5.1, ma non esiste alcun gruppo di quattro variabili, formato da (q_1, q_2) o (p_1, p_2) insieme a (Q_1, Q_2) o (P_1, P_2), che si possa esprimere in funzione delle altre quattro. Si noti tuttavia che la condizione (5.46) è verificata con $R(q,p) = p_2 q_2$, come è facile verificare.

Si può dimostrare che ogni trasformazione completamente canonica si può ottenere combinando una trasformazione del tipo della (5.63) (cioè una trasformazione che scambia p_i con $(-q_i)$ per un sottoinsieme delle coppie (q_i, p_i)) con una trasformazione canonica associata ad una funzione generatrice.

Un'altro questione interessante è se la condizione (5.46) è anche necessaria perché una trasformazione C sia canonica rispetto a H e H'; la risposta è negativa, come mostra l'esempio seguente.

Data una Hamiltoniana $H(q,p)$ ed un numero reale $\lambda \neq 0$, si consideri la trasformazione

$$Q = q \quad , \quad P = \lambda p \ ,$$

e l'Hamiltoniana

$$H'(Q,P) = \lambda H(Q, P/\lambda) \ .$$

È facile verificare che questa trasformazione è canonica, comunque si scelga H, rispetto a H e H'. Tuttavia, la forma differenziale

$$\sum_{i=1}^{l} \{p_i\, dq_i - P_i\, dQ_i\} + [H'(Q,P) - H(q,p)]dt = \sum_{i=1}^{l} \{(1-\lambda) p_i\, dq_i\} + (\lambda - 1) H(q,p) dt$$

non è un differenziale esatto, se $\lambda \neq 1$. Infatti, se esistesse una funzione $R(q,p,t)$, tale che

$$\frac{\partial R}{\partial t} = (\lambda - 1) H \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = (1-\lambda) p_i \ ,$$

allora R dovrebbe essere della forma $R = (\lambda - 1)tH(q,p) + F(q,p)$, con H e F tali che, per ogni t,

$$(\lambda - 1)t\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad , \quad (\lambda - 1)t\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} = (1-\lambda)p_i \; .$$

Ne segue subito che H deve essere costante e che F deve soddisfare le condizioni

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial q_i} = (1-\lambda)p_i \; ,$$

incompatibili fra loro.

5.6 L'equazione di Hamilton-Jacobi.

Il metodo di costruzione di una trasformazione canonica tramite una funzione generatrice $S(q,P,t)$ (usiamo qui la convenzione di indicare con $(q,p) \in \mathbb{R}^{2l}$ le coordinate originali e con (Q,P) le nuove coordinate) può essere utilizzato per risolvere le equazioni di Hamilton nel modo seguente.

Ricordiamo che, nell'ipotesi che la funzione $S(q,P,t)$ soddisfi in un aperto U la condizione che il determinante della matrice $\partial^2 S/\partial q_i \partial P_j$ è diverso da zero, allora la trasformazione canonica è determinata dalle condizioni:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q,P,t) \quad , \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}(q,P,t) \quad , \quad i = 1,\ldots,l \; , \tag{5.64}$$

$$H'(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,P,t) \; , \tag{5.65}$$

dove possono essere considerate come variabili indipendenti o (q,p) o (q,P). Ci poniamo ora il problema di determinare $S(q,P,t)$ così che $H' = 0$. Se ciò fosse possibile, le equazioni del moto sarebbero banalmente risolte, in quanto le equazioni di Hamilton nelle variabili (Q,P) ci direbbero che $P(t)$ e $Q(t)$ sono delle costanti, calcolabili tramite le (5.64) (con $t = t_0$) in funzione dei dati iniziali per le variabili (q,p). Basta allora risolvere le (5.64) rispetto alle (q,p) (per un valore arbitrario di t) per ottenere la soluzione cercata.

Le (5.64) e (5.65) implicano che $H' = 0$, se e solo se è verificata la seguente equazione alle derivate parziali, detta *equazione di Hamilton-Jacobi*:

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \; . \tag{5.66}$$

Si noti che nella (5.66) non compaiono le derivate parziali $\partial S/\partial P_i$, per cui le P_i hanno in realtà il ruolo di parametri. Il problema che ci si pone è pertanto quello di trovare una soluzione $S(q,t)$ della (5.66), dipendente da l costanti arbitrarie P_i, tale che la matrice $\partial^2 S/\partial q_i \partial P_j$ abbia determinante non nullo in un opportuno aperto delle variabili (q,P,t). Una tale soluzione è di solito detta *integrale completo* dell'equazione di Hamilton-Jacobi.

I casi in cui si riesce a provare l'esistenza di un integrale completo non sono molti, anche se si tratta in genere di esempi di notevole interesse. Non si deve tuttavia pensare che ciò sia dovuto solo a difficoltà di calcolo. Infatti l'esistenza di un integrale completo, nel caso di Hamiltoniana indipendente dal tempo, implica, come sarà chiaro dalla discussione successiva, che il sistema è *integrabile*, nel senso che i suoi moti possono essere descritti in termini di moti unidimensionali lineari. È tuttavia ben noto, fin dai tempi di Poincaré, che in genere i sistemi Hamiltoniani non soddisfano questa proprietà.

Un caso che capita sovente è quello in cui H non dipende da t; in tal caso il problema può essere riformulato nel modo seguente. Si osserva che la funzione $S(q,t)$ può supporsi della forma:

$$S(q,t) = S_0(q) + g(t) \ , \tag{5.67}$$

con $g'(t) = g_0$, essendo g_0 una costante. Infatti, sostituendo la (5.67) nella (5.66), si ha:

$$H(\frac{\partial S_0}{\partial q}, q) = -g'(t) \ . \tag{5.68}$$

Poiché il termine di destra dipende solo da t e quello di sinistra solo da q, la (5.68) può essere verificata solo se ambedue i membri sono costanti.

Viene allora naturale assumere il valore di g_0 come una delle variabili P_i, per esempio P_1, e porre

$$g(t) = -P_1 t \ . \tag{5.69}$$

Allora la (5.66) assume la forma:

$$H(\frac{\partial S_0}{\partial q}, q) = P_1 \ , \tag{5.70}$$

ed il problema diventa quello di determinare una funzione $S_0(q)$ che risolve la (5.70) e che dipende, oltre che da P_1, da altre $l-1$ costanti $P_2, \ldots, P_l$, così che la matrice $\partial^2 S_0/\partial q_i \partial P_j$ ha determinante diverso da zero.

Si noti che la (5.70) potrebbe anche trovarsi come condizione per l'esistenza di una trasformazione canonica indipendente dal tempo tale che $H'(Q,P) = P_1$. Se si adotta questa interpretazione della (5.70), Q_1 non è più una costante del moto, ma:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{\partial H'}{\partial P_1} = 1 \ , \\ Q_1 &= \frac{\partial S_0}{\partial P_1} \ , \end{aligned} \tag{5.71}$$

per cui Q_1 è eguale a t, a meno di una costante additiva. Nel caso precedente, invece:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= 0 \ , \\ Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{\partial S_0}{\partial P_1} - t \ , \end{aligned} \tag{5.72}$$

il che è ovviamente del tutto equivalente.

Nel seguito noi adotteremo l'interpretazione (5.71) della soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi, nel caso di Hamiltoniana indipendente dal tempo. In tal caso, del resto, la (5.70) può essere vista come un caso particolare del *metodo di Hamilton-Jacobi*, consistente nel cercare una trasformazione canonica, tale che $H'(Q,P)$ è esplicitamente funzione solo delle variabili P. La soluzione di questo più generale problema permette anch'essa di risolvere banalmente le equazione del moto; infatti le P_i sono ancora delle costanti del moto, mentre le Q_i soddisfano le equazioni:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \equiv \omega_i \ , \tag{5.73}$$

la cui soluzione, essendo le ω_i costanti, è semplicemente

$$Q_i(t) = Q_i(0) + \omega_i t \ . \tag{5.74}$$

Per chiarire meglio la notazione, possiamo considerare un sistema ad un grado di libertà soggetto a forze attive conservative. La Lagrangiana sarà allora del tipo:

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} g(q) \dot{q}^2 - \mathcal{V}(q) \ , \tag{5.75}$$

con $g(q) > 0$. L'Hamiltoniana corrispondente ha la forma:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2g(q)} + \mathcal{V}(q) \ . \tag{5.76}$$

La (5.70) diventa allora:

$$\frac{1}{2g(q)} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + \mathcal{V}(q) = E \ , \tag{5.77}$$

avendo indicato P_1 con E, per sottolinearne il significato fisico di energia. Inoltre indicheremo con τ la variabile Q_1, che coincide con il tempo, come abbiamo visto, a meno di una costante. Pertanto, formalmente:

$$S_0(q,E) = \pm \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2g(q')[E - \mathcal{V}(q')]} + f(E) \ , \tag{5.78}$$

essendo $f(E)$ una arbitraria funzione regolare di E.

Per dare un significato preciso alla (5.78) bisogna specificare l'aperto U dello spazio delle fasi (nelle variabili (q,p)), in cui si vuole studiare il problema. In particolare, il segno davanti all'integrale deve coincidere con il segno di p ; ciò implica che U deve essere contenuto nel semipiano $\{p > 0\}$ o $\{p < 0\}$. Inoltre q deve variare in un intervallo in cui $E - \mathcal{V}(q) \geq 0$ e l'estremo inferiore di integrazione q_0 deve appartenere a questo intervallo per ogni valore assunto da E in U (q_0 potrebbe anche dipendere da E, purché in modo regolare).

Per chiarire meglio questo punto, supponiamo che il potenziale abbia un minimo in $q = 0$, che $\mathcal{V}(0) = 0$ e che esista un intervallo (a, b), $a < 0 < b$, tale che $\mathcal{V}(a) = \mathcal{V}(b) = E_0$, $\mathcal{V}(q)$ è strettamente decrescente per $q < 0$ e strettamente crescente per $q > 0$; una situazione di questo genere si verifica, per esempio, per il potenziale di Fig. 1 del par. 1.1. Consideriamo nel *piano delle fasi* (q, p) gli insiemi aperti $U = \{(q, p) : 0 < p^2/2g(q) + \mathcal{V}(q) < E_0\}$, $U_+ = \{(q, p) \in U : p > 0\}$ e $U_- = \{(q, p) \in U : p < 0\}$. Se si sceglie nella (5.78) il segno $+$ o il segno $-$, si definisce una trasformazione canonica fra $U_\pm$ ed un aperto $V_\pm$ del piano (τ, E), tale che $V_\pm = \{(\tau, E) : 0 < E < E_0, c_\pm(E) < \tau < d_\pm(E)$, essendo $c_\pm(E)$ e $d_\pm(E)$ funzioni regolari che dipendono dalla scelta in (5.78) di q_0 e $f(E)$ (eventualmente diversa nei due casi).

Questa arbitrarietà nella definizione della funzione generatrice può essere utilizzata per raccordare con continuità le due trasformazioni canoniche in modo da definire un'unica trasformazione canonica, definita nell'insieme U privato dell'intersezione con una qualunque semiretta uscente dall'origine delle coordinate. Per fissare le idee consideriamo l'insieme $\tilde{U} = U \backslash \{(q, p) : p = 0, q < 0\}$ e definiamo in $\tilde{U}$ la funzione

$$\tilde{S}_0(q, p) = \int_{\mathbb{C}_{q,p}} p' dq' \ , \tag{5.79}$$

essendo $\mathbb{C}_{q,p}$ il cammino, percorso in verso orario, che congiunge il punto $P_0 = (q_{E-}, 0)$ con il punto $P = (q, p)$ lungo la curva $\mathbb{C}_E = \{(q', p') : p'^2/2g(q') + \mathcal{V}(q') = E$, vedi Fig. 29.

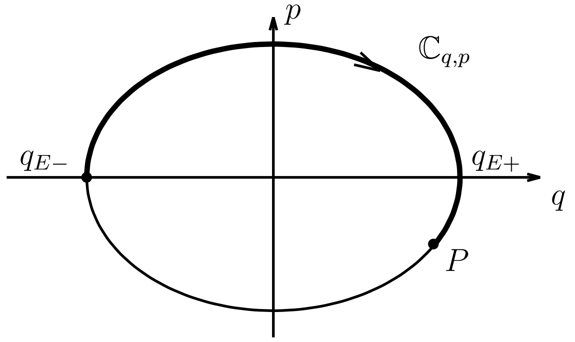

Figura 29: Curva di livello dell'energia.

Si noti che non è possibile estendere $\tilde{S}_0$ a tutto l'insieme U, in quanto il suo limite per $P \to P_0$ dal basso è eguale ad un numero positivo, l'area della regione interna a $\mathbb{C}_E$, mentre il suo limite dall'alto è eguale a 0.

Definiamo ora la funzione generatrice $S_{0\pm}$ della trasformazione canonica in $U_\pm$, ponendola eguale alla restrizione di $\tilde{S}_0$ ad $U_\pm$. È facile vedere che ciò corrisponde a scegliere nella (5.78) $q_0 = q_{E-}$ e $f(E) = 0$, nel caso di S_{0+}, $q_0 = q_{E+}$ (vedi figura) e $f(E) = \tilde{S}_0(q_{E+}, 0)$, nel caso di S_{0-}. Si ha inoltre

$$\frac{\partial}{\partial E} S_{0+}(q, E) = \int_{q_{E-}}^{q} dq' \sqrt{\frac{g(q')}{2[E - \mathcal{V}(q')]}} \ , \tag{5.80}$$

poiché il contributo alla derivata rispetto ad E dell'estremo d'integrazione è nullo, essendo nullo in quel punto l'integrando. Analogamente si trova che

$$\frac{\partial}{\partial E} S_{0-}(q, E) = \int_{q_{E-}}^{q_{E+}} dq' \sqrt{\frac{g(q')}{2[E - \mathcal{V}(q')]}} - \int_{q_{E+}}^{q} dq' \sqrt{\frac{g(q')}{2[E - \mathcal{V}(q')]}} \ . \tag{5.81}$$

Pertanto, si può definire un'unica trasformazione canonica su $\tilde{U}$, ponendo

$$\tau = \int_{\mathbb{C}_{q,p}} g(q', p') dq' \quad , \quad g(q', p') = \text{sign } (p') \sqrt{\frac{g(q')}{2[E - \mathcal{V}(q')]}} \ , \tag{5.82}$$

avendo indicato con sign(p) il segno di p. Si noti che $g(q, p)$ coincide, se sign$(p) = \pm$, con $\partial^2 S_{0\pm}/\partial E \partial q$, per cui, con abuso di notazione, talora si scrive

$$\tau = \int_{\mathbb{C}_{q,p}} \frac{\partial^2 S_0}{\partial E \partial q}(q', E) dq' \ . \tag{5.83}$$

Le soluzioni delle equazioni di Hamilton in $\tilde{U}$ si ottengono dalle (5.71); si trova:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{\mathbb{C}_{q(t),p(t)}} g(q', p') dq' \ , \\ p(t) &= \pm\sqrt{2g(q)[E - \mathcal{V}(q(t))]} \ . \end{aligned} \tag{5.84}$$

$\tau(q, p)$ è pertanto il tempo necessario per percorrere il tratto di curva $\mathbb{C}_{q,p}$ e la trasformazione canonica trasforma l'insieme $\tilde{U}$ nell'insieme $\tilde{V}_0 = \{(\tau, E) : 0 < E < E_0, 0 < \tau < T(E)\}$, essendo $T(E)$ il periodo del moto di energia E.

Si noti che, se nella (5.83) si sostituisce il cammino d'integrazione $\mathbb{C}_{q,p}$ con il cammino $\mathbb{C}_{q,p}^{(n)}$, ottenuto da $\mathbb{C}_{q,p}$ aggiungendogli n volte il cammino $\mathbb{C}_E$, percorso in senso orario o antiorario a seconda del segno di n, allora la trasformazione canonica trasforma l'insieme $\tilde{U}$ nell'insieme $\tilde{V}_n = \{(\tau, E) : 0 < E < E_0, nT(E) < \tau < (n+1)T(E)\}$. Questa osservazione si esprime di solito dicendo che è possibile mettere in corrispondenza (non biunivoca) tutto l'insieme U con l'insieme $\bar{V} = \{(\tau, E) : 0 < E < E_0, -\infty < \tau < +\infty\}$, pur di interpretare gli integrali nella (5.79) e nella (5.83) come funzioni a più valori, i differenti valori essendo associati ai differenti cammini $\mathbb{C}_{q,p}^{(n)}$, che congiungono il punto P_0 con il punto P. Questa corrispondenza è tale che, fissato E, q e p risultano essere funzioni periodiche di τ di periodo $T(E)$. Viene pertanto naturale introdurre la variabile

$$\alpha_\tau = 2\pi \frac{\tau}{T(E)} \tag{5.85}$$

e identificare in $\bar{V}$ i punti (τ_1, E) e $\tau_2, E)$, tali che $\alpha_{\tau_1} - \alpha_{\tau_2}$ è un multiplo di 2π. In questo modo si ottiene un diffeomorfismo fra U e l'insieme $(0, E_0) \times \mathbb{T}_1$, dove $\mathbb{T}_1$ indica il toro unidimensionale. Questo diffeomorfismo non è tuttavia una trasformazione canonica; per ottenere una trasformazione canonica è necessario sostituire E con una nuova variabile, come vedremo nel par. 5.8.

5.7 Il metodo di separazione delle variabili

La possibilità di estendere le considerazioni precedenti a sistemi con più gradi di libertà dipende dalla possibilità di risolvere effettivamente la (5.70). In generale ciò succede quando si può applicare il metodo di *separazione delle variabili.*

Supponiamo che la dipendenza di $H(q,p)$ da una coppia di variabili coniugate, per esempio (p_l, q_l), sia del tipo:

$$H(q,p) = F(p', q', G(p_l, q_l)) \quad , \quad (p', q') = (p_1, \ldots, p_{l-1}, q_1, \ldots, q_{l-1}) \tag{5.86}$$

essendo F e G due opportune funzione di $2(l-1)$ e 2 variabili, rispettivamente. In tal caso ci si può limitare a cercare soluzioni della (5.70) della forma:

$$S(q) = S_l(q_l) + S'(q') \tag{5.87}$$

Infatti, se si sostituisce la (5.87) nella (5.70), si ottiene:

$$F(\frac{\partial S'}{\partial q'}, q', G(\frac{dS_l}{dq_l}, q_l)) = P_1 \tag{5.88}$$

che può essere risolta cercando una funzione $S_l(q_l)$ tale che:

$$G(\frac{dS_l}{dq_l}, q_l) = P_l \tag{5.89}$$

essendo P_l una costante, ed una funzione $S'(q')$ tale che:

$$F(\frac{\partial S'}{\partial q'}, q', P_l) = P_1 \tag{5.90}$$

La (5.89) può in generale essere risolta banalmente (anche se in modo non unico, ma questo non e' un problema) per un insieme non vuoto di valori di P_l, invertendo la funzione $G(p_l, q_l)$ rispetto a p_l, in modo da ricavare dS_l/dq_l (e quindi $S_l(q_l)$ tramite un'integrazione). D'altra parte la (5.90) è un'equazione dello stesso tipo di quella di partenza, ma con una variabile in meno. Si può quindi provare ad iterare il procedimento; se ci si riesce fino a ridursi ad un'equazione in una sola variabile (quindi banalmente risolubile al pari della (5.89)), il procedimento di soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi è portato a compimento con una soluzione della forma:

$$S(q, P) = \sum_{i=1}^{l} S_i(q_i, P) \tag{5.91}$$

dove P indica le l costanti arbitrarie che compaiono nel corso del procedimento (e che assumono il ruolo di nuovi impulsi).

Si noti, tuttavia, che il procedimento sopra descritto porta a determinare delle costanti del moto e a ridurre l'ordine del sistema di equazioni da risolvere, anche se non si riesce ad iterare fino alla fine. Supponiamo, per esempio, di essere riusciti a fare solo il primo passo; se consideriamo la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice

$$S(q, P) = S_l(q_l, P_l) + S'(q', P) \tag{5.92}$$

con $S_l(q_l, P_l)$ che soddisfa la (5.89) e $S'(q', P)$ arbitraria, la Hamiltoniana nelle nuove variabili avrà la forma:

$$H'(Q, P) = F(\frac{\partial S'}{\partial q'}, q', P_l) \tag{5.93}$$

dove le variabili q' si immaginano scritte in funzione di P e Q, usando le (5.64). Tuttavia, poichè S_l non dipende da $P' = (P_1, \ldots, P_{l-1})$, q' dipende solo da $Q' = (Q_1, \ldots, Q_{l-1})$, come è facile verificare; ne segue che H' è indipendente da Q_l, che P_l è una costante del moto e che le equazioni di Hamilton nelle variabili P', Q' sono un sistema di equazioni chiuso, con P_l che funge da parametro. La funzione $Q_l(t)$ è determinata in funzione della soluzione di questo sistema, usando l'equazione di Hamilton per la variabile Q_l, cioè:

$$\dot{Q}_l = \frac{\partial H'}{\partial P_l}(P, Q') \tag{5.94}$$

5.8 Le variabili azione-angolo

Passiamo ora a discutere un'altra trasformazione canonica dalle proprietà particolarmente interessanti, che si può applicare, in particolare, quando è possibile trovare un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi tramite il metodo di separazione delle variabili.

Supponiamo pertanto che sia possibile risolvere l'equazione (5.70) usando una funzione generatrice della forma (5.91). In tal caso l'analisi del §5.7

mostra che le funzioni $S_i(q_i, P)$ sono soluzioni di equazioni del tipo:

$$G_i(\frac{dS_i}{dq_i}, q_i, P_{i+1}, \ldots, P_l) = P_i \tag{5.95}$$

se si suppone di avere ordinato le variabili q in ordine inverso a quello con cui appaiono nel procedimento iterativo di separazione delle variabili (che ovviamente non è unico). Inoltre, per la (5.64):

$$p_i = \frac{\partial S_i}{\partial q_i}(q_i, P) \tag{5.96}$$

ed in generale la $S_i(q_i, P)$ dovrà essere scelta in modo diverso in differenti regioni dello spazio delle fasi (vedi, per esempio, la (5.84)).

Supponiamo ancora che esista un aperto U nello spazio delle fasi, tale che il sottoinsieme del piano (p_i, q_i) in cui è verificata la condizione:

$$G_i(p_i, q_i, P_{i+1}, \ldots, P_l) = P_i \tag{5.97}$$

sia, per ogni i e per ogni scelta di P, una curva chiusa $\mathbb{C}_i$. Supponiamo anche che questa curva si possa dividere in un numero finito di curve aperte $\mathbb{C}_{i,k}$, $k = 1, \ldots, n_i$, descrivibili nella forma $p_i = h_{i,k}(q_i)$, $q_i \in [a_{i,k}, a_{i,k+1}]$, con $a_{i,n_i+1} = a_{i,1}$. Le funzioni $h_{i,k}(q_i)$ devono ovviamente verificare le condizioni

$$\begin{array}{rcl} h_{i,k}(a_{i,k+1}) & = & h_{i,k+1}(a_{i,k+1}) \;, k = 1, \ldots, n_i - 1, \\ h_{i,n_i}(a_{i,n_i+1}) & = & h_{i,1}(a_{i,1}) \;. \end{array} \tag{5.98}$$

Se $(p(t), q(t))$ è una soluzione delle equazioni di Hamilton, la coppia $(p_i(t), q_i(t))$ deve soddisfare la (5.96) (con P eguale al valore calcolato con i dati iniziali), poiché la (5.96) è una delle relazioni che definiscono la trasformazione canonica. Pertanto $(p_i(t), q_i(t))$, cioè la proiezione del moto sul piano (p_i, q_i), appartiene alla curva $\mathbb{C}_i$ per ogni t; noi supporremo che tale curva sia percorsa in un tempo finito, cioè che tale proiezione sia un moto periodico. Quest'ultima proprietà è di solito verificata se il moto si svolge in una regione limitata dello spazio delle fasi, come succede nell'esempio ad un grado di libertà del §5.6.

Facciamo ora vedere che le ipotesi precedenti implicano, in particolare, che i moti sono quasi-periodici nella regione U considerata. Per raggiungere questo risultato è conveniente definire delle nuove variabili, dette *variabili di azione*, nel modo seguente

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathbb{C}_i} p_i dq_i \tag{5.99}$$

avendo scelto il verso di percorrenza della curva chiusa $\mathbb{C}_i$ in modo che, per esempio, $J_i > 0$.

Usando la (5.96) ed il fatto che le curve $\mathbb{C}_i$ sono univocamente individuate da P, si mostra subito che $J = (J_1, \dots, J_l)$ è una funzione solo delle P. Supponiamo che tale funzione sia invertibile nella regione U dello spazio delle fasi, in cui sono soddisfatte tutte le ipotesi precedenti, cioè che esista una funzione $W(J)$ tale che, in U:

$$P = W(J) \tag{5.100}$$

Vogliamo studiare le proprietà della trasformazione canonica associata alla funzione generatrice:

$$\tilde{S}(q, J) = S(q, W(J)) \tag{5.101}$$

Notiamo innanzi tutto che, dette $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ le variabili coniugate alle variabili di azione, la Hamiltoniana, come funzione delle nuove variabili, ha la forma:

$$\tilde{H}(J, \alpha) = P_1 = W_1(J) \tag{5.102}$$

per cui è funzione solo delle J. Ne segue che le J sono costanti del moto e che:

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J_i} \equiv \omega_i(J) \tag{5.103}$$

Pertanto il moto ha una descrizione molto semplice anche in termini delle variabili (J, α).

Notiamo ora che la trasformazione canonica è definita tramite la funzione generatrice in modo diverso nelle diverse regioni dello *spazio delle fasi* (lo spazio delle variabili (q, p)) individuato dalla scelta, per ogni i, degli insiemi in cui la (5.97) è risolubile rispetto a p_i. Tuttavia, procedendo come nell'esempio ad un grado di libertà del par. 5.6, si possono raccordare con continuità queste trasformazioni canoniche. Si comincia scegliendo, su ogni curva $\mathbb{C}_i$, un punto P_{0i}, che dipende in modo regolare da J, ed un verso di percorrenza, lo stesso della (5.99), quindi si definisce, sulla regione U dello spazio delle fasi spazzata dalle curve $\mathbb{C}_i$, private dei punti P_{0i}, la funzione

$$\bar{S}(q, p) = \sum_{i=1}^{l} \int_{\mathbb{C}_{q_i, p_i}} p_i' dq_i' \ , \tag{5.104}$$

essendo $\mathbb{C}_{q_i, p_i}$ il cammino che congiunge il punto P_{0i} con il punto $P_i = (q_i, p_i)$ lungo la curva $\mathbb{C}_i$.

La restrizione di $\bar{S}(q, p)$ ad ognuno dei diversi sottoinsiemi di U (che indicheremo con U_k, $k = 1, \dots, N$) in cui tutte le p_i possono scriversi come funzioni di q_i e di J, è una possibile scelta della funzione generatrice. Se $\tilde{S}^{(k)} = \sum_{j=1}^{l} \tilde{S}_j^{(k)}$ indica la funzione generatrice relativa alla regione U_k, in U_k si ha:

$$\alpha_i = \frac{\partial \tilde{S}^{(k)}}{\partial J_i}(q, J) \ . \tag{5.105}$$

Pertanto le variabili α_i possono scriversi in funzione di q e p in tutto l'insieme U, nella forma

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbb{C}_{q_j,p_j}} g_{ij}(p'_j, q'_j) dq'_j + f_i(J) \ , \tag{5.106}$$

essendo $g_{ij}(p_j, q_j)$ una funzione continua e regolare a tratti, eguale in U_k a $\partial^2 \tilde{S}_j^{(k)} / \partial J_i \partial q_j$, mentre $f_i(J)$ indica il contributo della derivata rispetto a J_i degli estremi inferiori di integrazione. Come nel par. 5.6, con un piccolo ma utile abuso di notazione (peraltro frequente in letteratura), possiamo allora scrivere

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbb{C}_{q_j,p_j}} \frac{\partial^2 \tilde{S}_j}{\partial J_i \partial q_j} dq'_j + f_i(J) \ . \tag{5.107}$$

Le variabili α sono dette *variabili angolari*, per la ragione che andiamo subito a spiegare. Calcoliamo la variazione $\Delta_j \alpha_i$ che subisce α_i, quando si fa compiere un giro completo alla coppia (p_j, q_j) lungo la curva $\mathbb{C}_j$, tenendo fisse le altre variabili. Usando la (5.107), si trova che

$$\Delta_j \alpha_i = \oint_{\mathbb{C}_j} \frac{\partial^2 \tilde{S}_j}{\partial J_i \partial q_j} dq_j \ . \tag{5.108}$$

D'altra parte, l'ipotesi fatta sulle curve $\mathbb{C}_i$ prima della (5.98) implica che

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{\mathbb{C}_j} p_j \, dq_j = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\partial}{\partial J_i} \int_{a_{j,k}(J)}^{a_{j,k+1}(J)} h_{j,k}(J, q_j) \, dq_j = \\ &\sum_{k=1}^{n_j} \left[\frac{\partial a_{j,k+1}}{\partial J_i} h_{j,k}(J, a_{j,k+1}) - \frac{\partial a_{j,k}}{\partial J_i} h_{j,k}(J, a_{j,k}) + \int_{a_{j,k}(J)}^{a_{j,k+1}(J)} \frac{\partial h_{j,k}(J, q_j)}{\partial J_i} dq_j \right] = \\ &\sum_{k=1}^{n_j} \int_{a_{j,k}(J)}^{a_{j,k+1}(J)} \frac{\partial h_{j,k}(J, q_j)}{\partial J_i} dq_j = \oint_{\mathbb{C}_j} \frac{\partial^2 \tilde{S}_j}{\partial J_i \partial q_j} (J, q_j) dq_j \ , \end{aligned} \tag{5.109}$$

avendo usato le (5.98) per eliminare i termini contenenti le derivate rispetto a J_i degli estremi di integrazione. Le (5.108) e (5.109) implicano che

$$\Delta_j \alpha_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint_{\mathbb{C}_j} p_j \, dq_j = 2\pi \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = 2\pi \delta_{ij} \ , \tag{5.110}$$

cioè la variabile α_i si incrementa di 2π, se si fa compiere un giro completo alla coppia (p_i, q_i) lungo $\mathbb{C}_i$, mentre ritorna al valore di partenza, se si fa compiere un analogo giro alla coppia (p_j, q_j), con $j \neq i$. Pertanto α_i può essere vista come un parametro angolare lungo la curva $\mathbb{C}_i$ e si può estendere l'argomento usato nel par. 5.6 per definire un diffeomorfismo fra l'insieme U e l'insieme $B \times \mathbb{T}_l$, dove B è l'aperto di $\mathbb{R}^l$ cui appartengono i valori di J e $\mathbb{T}_l$ è il toro l-dimensionale. Questa corrispondenza è tale che, fissato J, se α_i si incrementa di 2π, la coppia (q_i, p_i) torna al valore di partenza compiendo un giro lungo la curva $\mathbb{C}_i$ nel verso positivo, mentre, se α_j, $j \neq i$, si incrementa di 2π, la coppia (q_i, p_i) torna al valore di partenza percorrendo avanti e indietro un tratto di $\mathbb{C}_i$. Ciò implica che $q_i = f_i(\alpha)$ e $p_i = g_i(\alpha)$, con $f_i(\alpha)$ e $g_i(\alpha)$ funzioni multiperiodiche di periodo 2π in ognuna delle variabili. Ne segue che le soluzioni delle equazioni di Hamilton nelle variabili originali, date dalle funzioni $q_i(t) = f_i(\alpha(t))$ e $p_i(t) = g_i(\alpha(t))$, sono funzioni quasiperiodiche di t, con periodi $2\pi/\omega(J)$, essendo $\omega(J)$ le velocità angolari delle variabili α definite nella (5.103).

5.9 Esempio 1: una particella in $\mathbb{R}^3$ soggetta ad una forza centrale

In coordinate polari, la posizione $\vec{r}$ di una particella di massa m che si muove in $\mathbb{R}^3$ può scriversi nella forma

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho \quad , \quad \vec{e}_\rho = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{5.111}$$

Pertanto la sua velocità è della forma

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi \tag{5.112}$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \quad , \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \tag{5.113}$$

Si noti che $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\rho$ formano una terna ortonormale di vettori. Pertanto, se la particella è soggetta ad una forza centrale di potenziale $V(\rho)$ e si assumono le coordinate polari come variabili lagrangiane, la Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \rho^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - V(\rho) \tag{5.114}$$

Per passare alla formulazione Hamiltoniana del sistema, calcoliamo i momenti cinetici. Si ha

$$p_\rho = m\dot{\rho} \quad , \quad p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} \quad , \quad p_\varphi = m\rho^2\sin^2\theta\dot{\varphi} \tag{5.115}$$

L'Hamiltoniana del sistema è allora data da

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2\sin^2\theta}\right) + V(\rho) \tag{5.116}$$

Il metodo si separazione delle variabili è allora applicabile, scegliendo una funzione generatrice della forma

$$S(\rho, \theta, \varphi, E, A, p_\varphi) = S_1(\rho, E, A) + S_2(\theta, A, p_\varphi) + S_3(\varphi, p_\varphi) \tag{5.117}$$

dove le funzioni S_i soddisfano le equazioni

$$S_3'(\varphi) = p_\varphi \tag{5.118}$$

$$S_2'(\theta)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = A^2 \quad , \quad p_\theta = S_2'(\theta) \tag{5.119}$$

$$\frac{1}{2m} S_1'(\rho)^2 + \frac{A^2}{2m\rho^2} + V(\rho) = E \quad , \quad p_\rho = S_1'(\rho) \tag{5.120}$$

in cui E, $A \geq 0$ e p_φ sono i tre parametri che assumono il ruolo di nuovi momenti cinetici nella trasformazione canonica associata e sono pertanto delle costanti del moto. Se indichiamo con τ, α, ψ le variabili coniugate, rispettivamente a E, A e p_φ, si ha inoltre:

$$\tau = \frac{\partial S}{\partial E}(\rho, \theta, \varphi, E, A, p_\varphi) = \frac{\partial S_1}{\partial E}(\rho, E, A) \tag{5.121}$$

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial A}(\rho, \theta, \varphi, E, A, p_\varphi) = \frac{\partial S_1}{\partial A}(\rho, E, A) + \frac{\partial S_2}{\partial A}(\theta, A, p_\varphi) \tag{5.122}$$

$$\psi = \frac{\partial S}{\partial p_\varphi}(\rho, \theta, \varphi, E, A, p_\varphi) = \varphi + \frac{\partial S_2}{\partial p_\varphi}(\theta, A, p_\varphi) \tag{5.123}$$

Infine, α e ψ sono delle costanti del moto, mentre $\dot{\tau} = 1$. Pertanto le soluzioni $\rho(t), \theta(t), \varphi(t)$ delle equazioni di Hamilton nelle variabili originali si ottengono risolvendo le equazioni precedenti, dopo avere sostituito τ con $t + t_0$, t_0 essendo una costante univocamente individuata, al pari di $E, A, p_\varphi, \alpha, \psi$, dai dati iniziali sulle coordinate polari e le loro derivate temporali. Naturalmente, in generale tali soluzioni non sono esprimibili in modo esplicito, ma le equazioni precedenti ne determinano alcune importanti proprietà qualitative, in modo simile a quel che abbiamo visto nel caso dei sistemi unidimensionali conservativi.

Il significato fisico di A e p_φ si trova calcolando il momento angolare $\vec{J}$ della particella rispetto all'origine delle coordinate. Si ha, usando la (5.111), la (5.112) ed il fatto che $\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\theta$

$$\vec{J} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = m\rho\vec{e}_\rho \wedge (\rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = m\rho^2\dot{\theta}\vec{e}_\varphi - m\rho^2 \sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \tag{5.124}$$

per cui, usando le (5.115), si trova che

$$A = |\vec{J}| \quad , \quad p_\varphi = J_z \tag{5.125}$$

Pertanto, la costanza nel tempo di A e p_φ è conseguenza del fatto ben noto (e facile a dimostrare in coordinate cartesiane) che $\vec{J}$ è un vettore costante, come conseguenza dell'invarianza del sistema per rotazioni.

Si noti che la costanza di $\vec{J}$ implica addirittura che i moti della particella si svolgono nel piano passante per l'origine ed ortogonale a $\vec{J}$. Questa proprietà non è immediatamente evidente se si studia il sistema in coordinate polari, a meno che non si scelga il sistema di riferimento in modo che l'asse z sia diretto come il vettore $\vec{J}(0)$, cioè come il momento angolare all'istante $t = 0$.

Questa scelta è possibile senza sapere che $\vec{J}$ è costante, ma ha l'inconveniente di dipendere dai dati iniziali; non è tuttavia restrittiva, grazie all'invarianza per rotazioni del sistema. In coordinate polari, ciò implica che

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad , \quad A = p_\varphi \tag{5.126}$$

Usando la (5.119), si vede allora subito che $\theta(t) = \theta(0) = \pi/2$, cioè che il moto si svolge nel piano xy; se infatti $\theta(t)$ assumesse valori diversi da $\pi/2$ per qualche t, dovrebbe essere $A > p_\varphi$, in contrasto col fatto che A e p_φ sono costanti ed eguali.

L'osservazione precedente implica che i moti della particella possono studiarsi considerando lo stesso problema in $\mathbb{R}^2$. Tuttavia, se si è interessati a confrontare i moti di più particelle (non interagenti fra di loro), può essere utile continuare l'analisi del problema in un riferimento fissato una volta per tutte. Un caso particolarmente interessante è quello in cui le caratteristiche del potenziale permettono di individuare uno o più aperti limitati U nello spazio delle fasi tali che

$$0 < A < A_0 \quad , \quad E_1(A) < E < E_2(A) \quad , \quad 0 < p_\varphi < A \tag{5.127}$$

dove $E_1(A)$ e $E_2(A)$ sono delle funzioni regolari ed inoltre, dati A e E, l'insieme $\mathbb{C}_\rho(E, A)$, individuato dall'equazione

$$\frac{1}{2m} p_\rho^2 + V_A(\rho) = E \quad , \quad V_A(\rho) = \frac{A^2}{2m\rho^2} + V(\rho) \tag{5.128}$$

cui deve appartenere la coppia (ρ, p_ρ) per la (5.120), è una curva semplice e chiusa, simmetrica rispetto all'asse $p_\rho = 0$, che interseca in due punti di ascisse ρ_- e $\rho_+ > \rho_-$, tali che $V_A'(\rho_-) < 0$ e $V_A'(\rho_+) > 0$. Si noti che la condizione $p_\varphi < A$ garantisce, senza ulteriori ipotesi, che anche l'insieme $\mathbb{C}_\theta(A, p_\varphi)$, individuato dall'equazione

$$p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = A^2 \quad , \quad \theta \in (0, \pi) \tag{5.129}$$

cui deve appartenere la coppia (θ, p_θ) per la (5.119), è una curva semplice e chiusa, simmetrica rispetto all'asse $p_\theta = 0$, che interseca in due punti di ascisse

$$\theta_\pm = \frac{\pi}{2} \pm \delta \quad , \quad \cos^2\delta = \frac{p_\varphi^2}{A^2} \tag{5.130}$$

Per quel che riguarda la coppia (φ, p_φ), se si fissa p_φ, essa varia di fatto su di una curva chiusa, che indicheremo con $\mathbb{C}_\varphi(p_\varphi)$, in quanto φ è un angolo e pertanto (φ, p_φ) deve pensarsi come un punto sulla superficie cilindrica $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_1$.

Le ipotesi precedenti garantiscono che l'equazione per $S_1(\rho)$ è della stessa forma di quella studiata nell'esempio unidimensionale del par. 5.6; pertanto possiamo definire la funzione che raccorda con continuità la funzione generatrice nella regione $p_\rho > 0$ con quella in $p_\rho < 0$ nel modo seguente:

$$\tilde{S}_1(\rho, p_\rho) = \int_{\mathbb{C}_{\rho,p_\rho}} d\rho' \mathrm{sign}\ (p'_\rho)\sqrt{2m[E - V_A(\rho')]} \tag{5.131}$$

dove $\mathbb{C}_{\rho,p_\rho}$ è l'arco di curva contenuto in $\mathbb{C}_\rho(E, A)$ che congiunge in senso orario il punto $(\rho_-, 0)$ con il punto (ρ, p_ρ); si noti che $\tilde{S}_1$, fissati E e A, dipende solo dal segno di p_ρ. Ne segue allora, nel modo solito, che $\rho(t)$ è una funzione periodica con periodo

$$T(E, A) = \oint_{C_\rho(E,A)} d\rho \frac{\partial^2 S_1(\rho, E, A)}{\partial E\ \partial\rho} = \sqrt{2m}\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_A(\rho)}} \tag{5.132}$$

In modo analogo, possiamo porre

$$\tilde{S}_2(\theta, p_\theta) = \int_{\mathbb{C}_{\theta,p_\theta}} d\theta' \mathrm{sign}\ (p'_\theta)\sqrt{A^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta'}} \tag{5.133}$$

dove $\mathbb{C}_{\theta,p_\theta}$ è l'arco di curva contenuto in $\mathbb{C}_\theta(A, p_\varphi)$ che congiunge in senso orario il punto $(\theta_-, 0)$ con il punto (θ, p_θ). Infine, possiamo porre

$$S_3(\varphi) = \int_0^\varphi p_\varphi d\varphi' = p_\varphi \varphi \tag{5.134}$$

Per discutere le proprietà qualitative delle funzioni $\theta(t)$ e $\varphi(t)$ è conveniente introdurre le variabili di azione-angolo, come nel par. 5.8. Pertanto definiamo

$$J_\rho = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathbb{C}_\rho(E,A)} d\rho\ \mathrm{sign}\ (p_\rho)\sqrt{2m[E - V_A(\rho)]} \tag{5.135}$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathbb{C}_\theta(A,p_\varphi)} d\theta\ \mathrm{sign}\ (p_\theta)\sqrt{A^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}} \tag{5.136}$$

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathbb{C}_\varphi(p_\varphi)} p_\varphi\ d\varphi = p_\varphi \tag{5.137}$$

È facile vedere che, nelle ipotesi fatte, se si fissa A, l'integrale a secondo membro della (5.135) è una funzione crescente e regolare di E; esiste pertanto una funzione regolare $F(J_\rho, A)$, tale che $E = F(J_\rho, A)$. Inoltre, un calcolo esplicito mostra che

$$J_\theta = A - p_\varphi = A - J_\varphi \tag{5.138}$$

Pertanto l'Hamiltoniana nelle variabili azione-angolo è la funzione

$$\tilde{H}(J) = F(J_\rho, J_\theta + J_\varphi) \tag{5.139}$$

così che, se $\alpha = (\alpha_\rho, \alpha_\theta, \alpha_\varphi)$ sono gli angoli, le loro velocità angolari sono date da

$$\omega_\rho = \frac{\partial F}{\partial J_\rho}(J_\rho, A) \quad , \quad \omega_\theta = \omega_\varphi = \frac{\partial F}{\partial A}(J_\rho, A) \tag{5.140}$$

Ne segue, in particolare, che i moti sono quasiperiodici con due soli periodi, in accordo con l'osservazione fatta precedentemente che il problema qui studiato è in effetti un problema a due gradi di libertà. Inoltre, se indichiamo con $G(E, A)$ il secondo membro della (5.135), si ha l'identità

$$J_\rho = G(F(J_\rho, A), A) \tag{5.141}$$

da cui, derivando ambedue i membri rispetto a J_ρ e A, si ricavano le equazioni

$$1 = \frac{\partial G}{\partial E}(E, A) \frac{\partial F}{\partial J_\rho}(J_\rho, A) \tag{5.142}$$

$$0 = \frac{\partial G}{\partial E}(E, A) \frac{\partial F}{\partial A}(J_\rho, A) + \frac{\partial G}{\partial A}(E, A) \tag{5.143}$$

Usando la (5.135) e la (5.132), si trova anche

$$\frac{\partial G}{\partial E}(E, A) = \frac{\sqrt{2m}}{2\pi} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_A(\rho)}} = \frac{T(E, A)}{2\pi} \tag{5.144}$$

Pertanto, la (5.142) e la prima delle (5.140) implicano che

$$\omega_\rho = \frac{2\pi}{T(E, A)} \tag{5.145}$$

cioè il primo periodo è quello della funzione $\rho(t)$. In modo analogo, la (5.143) e la seconda delle (5.140) implicano che

$$\omega_\theta = -\omega_\rho \frac{\partial G}{\partial A}(E, A) = \omega_\rho \frac{A}{\pi\sqrt{2m}} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{E - V_A(\rho)}} \tag{5.146}$$

Un caso notoriamente interessante è quello del potenziale Kepleriano

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho} \quad , \quad k > 0 \tag{5.147}$$

In tal caso, le ipotesi che ci garantiscono che i moti sono limitati e quasiperiodici sono soddisfatte se, nelle (5.127), si pone

$$A_0 = +\infty \quad , \quad E_1(A) = -\frac{mk^2}{2A^2} \quad , \quad E_2(A) = 0 \tag{5.148}$$

ed è facile verificare che

$$\frac{A}{\pi\sqrt{2m}}\int_{\rho_-}^{\rho_+}\frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{E-V_A(\rho)}}=1 \tag{5.149}$$

Ne segue, per la (5.146), che tutti i periodi sono eguali, cioè che i moti sono periodici. Il loro valore comune può inoltre essere facilmente calcolato e si trova

$$T(E,A)=\pi k\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{|E|^{3/2}} \tag{5.150}$$

il che implica, in particolare, che il periodo non dipende da A. Si può anche mostrare facilmente che $\rho_- + \rho_+ = k/|E|$ e così ritrovare la terza legge di Keplero. Non è tuttavia facile mostrare, senza studiare direttamente il problema bidimensionale equivalente, che le traiettorie sono delle ellissi.

5.10 Esempio 2: una particella in $\mathbb{R}^2$ soggetta ad un campo di dipolo

Consideriamo un punto materiale P di massa m che si muove nel piano xy sotto l'azione di una forza conservativa di potenziale (detto potenziale di dipolo)

$$U(\vec{r})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}\ ,$$

dove $\vec{a}$ è un vettore fissato, che possiamo supporre abbia la stessa direzione e verso dell'asse x.

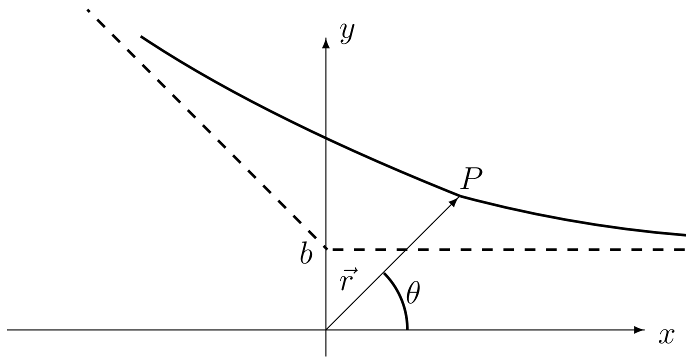

Figura 30: Esempio di traiettoria.

Vogliamo studiare il moto corrispondente alle condizioni (vedi Fig. 30):

$$\begin{array}{ll}\lim_{t\to-\infty} x(t)=+\infty & ,\ \lim_{t\to-\infty} y(t)=b>0\ ,\\ \lim_{t\to-\infty} \dot{x}(t)=-v_0 & ,\ \lim_{t\to-\infty} \dot{y}(t)=0\ ,\end{array} \tag{5.151}$$

cioè il moto di una particella puntiforme che proviene dall'infinito in verso opposto ad $\vec{a}$ con velocità v_0, seguendo una traiettoria parallela all'asse x (per $t \to -\infty$), ma non coincidente con l'asse x (il caso $b = 0$ è di fatto un problema unidimensionale, quindi banale).

Poiché

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = 3a\frac{xy}{r^5} \ , \tag{5.152}$$

$\dot{y}$ e quindi anche $\dot{\theta}$ sono positivi in un intorno di $t = -\infty$, al contrario di $\dot{r}$, che è ovviamente negativo. Pertanto, dato che

$$p_r = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta} \ , \tag{5.153}$$

esiste un tempo t_0, eventualmente infinito, tale che:

$$p_r < 0 \quad , \quad p_\theta > 0 \quad , \quad t \in (-\infty, t_0) \ . \tag{5.154}$$

Nel seguito t_0 sarà scelto come il più grande possibile, compatibilmente con la validità delle (5.154).

In coordinate polari l'Hamiltoniana ha la forma:

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + \frac{a\cos\theta}{r^2} \ , \tag{5.155}$$

cui corrisponde l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial r})^2 + \frac{1}{2mr^2}[(\frac{\partial S}{\partial \theta})^2 + 2ma\cos\theta] = E \ , \tag{5.156}$$

la quale può essere risolta per separazione delle variabili, ponendo

$$S(r,\theta) = S_1(r) + S_2(\theta) \ . \tag{5.157}$$

$S_1(r)$ e $S_2(\theta)$ devono soddisfare le equazioni:

$$p_r^2 = (\frac{\partial S_1}{\partial r})^2 = 2mE - \frac{\beta}{r^2} \ , \tag{5.158}$$

$$p_\theta^2 = (\frac{\partial S_2}{\partial \theta})^2 = \beta - 2ma\cos\theta \ . \tag{5.159}$$

E e β sono due costanti del moto (corrispondenti ai due nuovi momenti coniugati), da determinare in base alle condizioni (5.151), che prendono qui il posto delle usuali condizioni iniziali. Poiché $U(\vec{r}(t)) \to 0$ per $t \to -\infty$, si ha:

$$E = \frac{1}{2}m\lim_{t\to-\infty}\vec{v}(t)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \ . \tag{5.160}$$

Inoltre, se si indica con $\vec{k}$ il versore dell'asse z (ortogonale al piano del moto), si ha:

$$p_\theta = m(\vec{r}\wedge\vec{v})\cdot\vec{k} = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \ \xrightarrow[t\to-\infty]{} \ mbv_0 \ , \tag{5.161}$$

in quanto $x\dot{y}\xrightarrow[t\to-\infty]{}0$. Per dimostrare quest'ultima affermazione, notiamo che, grazie alle (5.151), esiste un tempo T, tale che, se $t \leq T$, $y(t) \leq 2b$ e $-\dot{x}(t) \geq v_0/2$. Pertanto, usando la (5.152), si ha

$$\begin{aligned}
m\dot{y}(t) &= m\int_{-\infty}^{t} ds\, \ddot{y}(s) = 3a\int_{-\infty}^{t} \frac{x(s)y(s)}{r(s)^5} \leq 6ab\int_{-\infty}^{t} \frac{ds}{x(s)^4} = \\
&= 6ab\int_{-\infty}^{t} \frac{\dot{x}(s)\, ds}{x(s)^4}\frac{1}{\dot{x}(s)} \leq -\frac{12ab}{v_0}\int_{-\infty}^{t} \frac{\dot{x}(s)\, ds}{x(s)^4} = \frac{12ab}{v_0}\int_{x(t)}^{\infty} \frac{dx}{x^4} = \\
&= \frac{4ab}{v_0}\frac{1}{x(t)^3} \Rightarrow x(t)\dot{y}(t) \leq \frac{4ab}{v_0}\frac{1}{x(t)^2} \to 0 \quad , \quad \text{for } t \to -\infty \, .
\end{aligned}$$

Ne segue che:

$$\beta = m^2 b^2 v_0^2 + 2ma = 2Emb^2 + 2ma > 0 \, . \tag{5.162}$$

Inoltre

$$\beta - 2ma\cos\theta \geq \beta - 2ma = 2mEb^2 > 0 \, ,$$

per cui p_θ non può annullarsi mai, così che le (5.154) possono essere violate solo se p_r cambia segno nel corso del moto (t_0 è il primo istante in cui ciò avviene, se $t_0 < +\infty$). D'altra parte

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{2a\cos\theta}{r^3} + \frac{p_\theta^2}{mr^3} = \frac{\beta}{mr^3} > 0 \quad , \quad \forall t \, ,$$

e $\lim_{t\to-\infty} p_r = -mv_0$; pertanto $p_r(t)$ è una funzione crescente negativa, per $t < t_0$ e $\lim_{t\to t_0} p_r(t) = 0$. Ragionando come nel par. 1.1 per i sistemi unidimensionali conservativi, si mostra anche che t_0 è finito. Se $t > t_0$, $p_r(t)$ è una funzione crescente positiva e $\lim_{t\to+\infty} p_r = mv_0$. Poiché $p_r = m\dot{r}$, la funzione $r(t)$ è allora decrescente da $+\infty$ a r_0, per $t \leq t_0$, e crescente da r_0 a $+\infty$, per $t \geq t_0$, essendo r_0 il valore di r per cui si annulla p_r, cioè

$$r_0 = \sqrt{\frac{\beta}{2mE}} \, . \tag{5.163}$$

Si noti anche che r_0 è certamente maggiore di b. Infatti la (5.162) può riscriversi:

$$1 = \lambda + \mu \quad , \quad \lambda = \frac{2ma}{\beta} > 0 \quad , \quad \mu = \frac{b^2}{r_0^2} \, , \tag{5.164}$$

da cui segue che $\mu < 1$.

La discussione precedente implica che, se si vuole studiare il moto per $t \gtrless t_0$, bisogna risolvere le (5.158) e (5.159) nella forma:

$$\begin{aligned}
S_1(r) &= \pm\int_{r_0}^{r} dr' \sqrt{2mE - \frac{\beta}{r'^2}} \, , &(5.165)\\
S_2(\theta) &= \int_0^{\theta} d\theta' \sqrt{\beta - 2ma\cos\theta'} \, , &(5.166)
\end{aligned}$$

avendo scelto le costanti di integrazione arbitrarie così che $S_2(0) = 0$ e $S_1(r_0) = 0$. In realtà gli estremi di integrazione potrebbero essere scelti in modo diverso nelle due regioni, ma la scelta adottata permette di raccordare con continuità le due diverse trasformazioni canoniche, quella definita per $p_r > 0$ e quella definita per $p_r < 0$. Se indichiamo con τ la variabile coniugata a E, si ha, nella regione $p_r \gtrless 0$,

$$\tau = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_1}{\partial E} = \pm \int_{r_0}^{r} dr' \frac{m}{\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} \ , \tag{5.167}$$

avendo usato il fatto che il termine proporzionale a $\partial r_0/\partial E$ dà un contributo nullo, in quanto l'integrando della (5.165) si annulla in $r = r_0$. Si noti che l'integrando nella (5.167) è singolare, ma integrabile, il che giustifica la scelta dell'estremo di integrazione inferiore nella (5.165); questa proprietà è strettamente legata al fatto che $t_0 < +\infty$, come discusso nel par. 1.1.

L'equazione di Hamilton per τ implica che

$$\dot{\tau} = \frac{\partial H}{\partial E} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tau(t) = t - t_0 \tag{5.168}$$

avendo imposto, in accordo con la (5.167) e la discussione precedente, la condizione $\tau(t_0) = 0$. Dalla (5.167) segue allora che

$$|t - t_0| = \int_{r_0}^{r(t)} dr' \frac{m}{\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} \ . \tag{5.169}$$

L'integrale a secondo membro della (5.169) si può calcolare esplicitamente e si trova (omettiamo i passaggi):

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + v_o^2 (t - t_0)^2} \ . \tag{5.170}$$

Passiamo ora a studiare il comportamento della funzione $\theta(t)$. Poiché, come abbiamo detto, p_θ non si annulla mai, $\dot{\theta}(t)$ ha segno costante e pertanto $\theta(t)$ è una funzione monotona. La relazione fra θ e r lungo la traiettoria può essere determinata notando che, se α è la variabile coniugata a β, allora

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\partial S}{\partial \beta} &= \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{2r'^2\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} + \\ &\quad + \int_0^\theta \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta'}} \quad , \quad t \lesseqgtr t_0 \ , \qquad (5.171) \\ \dot{\alpha} &= 0 \ . \qquad (5.172) \end{aligned}$$

Il valore costante di α può essere determinato, calcolando il secondo membro della (5.171) nel limite $t \to -\infty$, in cui $\theta(t) \to 0$ e $r(t) \to +\infty$; si trova

$$\alpha = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{2r'^2\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} \ . \tag{5.173}$$

Ne segue che, posto $\theta_0 = \theta(t_0)$:

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta'}} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{2r'^2\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2mE/\beta}} \frac{dx}{2\sqrt{2mE - \beta x^2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{\beta}} \ . \tag{5.174}$$

Analogamente, se si pone

$$\theta_M = \lim_{t\to+\infty} \theta(t) \ ,$$

si ha:

$$\int_0^{\theta_M} \frac{d\theta'}{2\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta'}} = 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{2r'^2\sqrt{2mE - \beta/r'^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} \ , \tag{5.175}$$

che può riscriversi nella forma

$$\int_0^{\theta_M} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \lambda\cos\theta'}} = \pi \ , \tag{5.176}$$

dove λ è una costante positiva e minore di 1, definita nella (5.164).

La (5.176) definisce implicitamente θ_M in funzione di λ, ma non può essere risolta in termini di funzioni semplici. Facciamo vedere che, in ogni caso, è certamente vero che

$$\theta_M < \pi$$

Si consideri la funzione:

$$F(\lambda, \theta) = \int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - \lambda\cos\theta'}} \tag{5.177}$$

Se $\theta' < \pi/2$, è facile mostrare che l'integrando è una funzione monotona crescente di λ; ciò è sufficiente a provare che anche F è una funzione crescente di λ, se $\theta \le \pi/2$. Se $\pi/2 < \theta \le \pi$, si può scrivere:

$$F(\lambda, \theta) = F(\lambda, \pi - \theta) + \frac{1}{2}\int_{\pi-\theta}^{\theta} d\theta' \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda\cos\theta'}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\cos\theta'}} \right]$$

ed è ancora facile dimostrare che l'espressione fra parentesi quadre è una funzione crescente di λ; lo stesso è allora vero per F. Pertanto:

$$F(\lambda, \theta) \ge F(0, \theta) = \theta \quad , \quad \theta \in [0, \pi] \quad , \quad \lambda \in (0, 1) \tag{5.178}$$

da cui segue subito, vista la monotonia di F anche come funzione di θ, che $\theta_M < \pi$, dato che, per la (5.176), $F(\lambda, \theta_M) = \pi$ e, per la (5.178), $F(\lambda, \pi) > \pi$.

Dalle considerazioni precedenti segue pure che:

$$\lim_{\lambda\to 1} \theta_M = 0$$