Seminarietto sulle successioni spettrali

Luis Alberto Molina Rojas

1 Definizioni

Una *successione spettrale (di omologia)* in una categoria abeliana $\mathcal{A}$ è una famiglia $\{E^r_{p,q}\}$ di oggetti in $\mathcal{A}$ definita per tutti gli interi p, q, e per $r \geq a$, tale che:
1) per ogni r sono definiti dei morfismi

$$d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$$

tali che $d^r d^r = 0$. I d^r sono detti differenziali, e rispetto a tali r le "rette di coefficiente angolare $-(r+1)/r$" nel reticolo $E^r_{*,*}$ formano dei complessi di catene;
2) $E^{r+1}_{p,q}$ è l'omologia di $E^r_{*,*}$ nel punto $E^r_{p,q}$: piú precisamente, ci sono degli isomorfismi

$$E^{r+1}_{p,q} \cong \frac{\mathrm{Ker}(d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1})}{d^{r+1}_{p+r,q-r+1}(E^r_{p+r,q-r+1})}$$

(d'ora in poi al posto dell'isomorfismo scriveremo un'uguaglianza).
Gli $E^r_{p,q}$ sono detti i *termini* della successione spettrale $E = (E, d)$; gli $E^a_{p,q}$ sono chiamati anche *termini iniziali*.
Si noti che $E^{r+1}_{p,q}$ è un sottoquoziente di $E^r_{p,q}$ Il *grado totale* del termine $E^r_{p,q}$ è $n = p+q$; i termini di grado totale n giacciono su una antidiagonale: quindi ogni differenziale $d^r_{p,q}$ diminuisce il grado totale di una unità. Un *morfismo* di successioni spettrali $f : E \to E'$ è una famiglia di mappe $f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E'^r_{p,q}$ in $\mathcal{A}$ tali che:
1) $d^r f^r = f^r d^r$;
2) $f^{r+1}_{p,q}$ è la mappa indotta sull'omologia da $f^r_{p,q}$.

Esempio. Una *successione spettrale nel primo quadrante* è una successione spettrale tale che $E^r_{p,q} = 0$ per ogni $p < 0, q < 0$. Fissati p e q, si ha che $E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$ per r sufficientemente grande ($r > \max\{p, q+1\}$), perché in tal caso il d^r che atterra sul punto (p, q) proviene dal quarto quadrante (e quindi l'immagine è zero), mentre il d^r che parte da $E^r_{p,q}$ finisce sul secondo quadrante (e quindi il nucleo è tutto $E^r_{p,q}$): denoteremo con $E^\infty_{p,q}$ questo valore stabile di $E^r_{p,q}$.

Lemma 1.1 *Sia $f : E \to E'$ un morfismo di successioni spettrali tali che per qualche r fissato $f^r : E^r_{p,q} \to E'^r_{p,q}$ è un isomorfismo per ogni p, q. Allora anche $f^s : E^s_{p,q} \to E'^s_{p,q}$ è un isomorfismo per ogni $s \geq r$.*

DIM. Il diagramma

$$\begin{tikzcd}
d^r(E^r_{p+r,q-r+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "f^r"] & \mathrm{Ker}(d^r) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "f^r"] & E^{r+1}_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "f^r_*=f^{r+1}"] & 0 \\
d^r(E'^r_{p+r,q-r+1}) \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d'^r) \arrow[r] & E'^{r+1}_{p,q} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mostra subito che anche f^{r+1} deve essere un isomorfismo; la tesi segue quindi per induzione. □

Successioni limitate e convergenza. Una successione spettrale è detta *limitata* se per ogni n solo un numero finito di termini di grado totale n non sono nulli in $E^a_{*,*}$. In tal caso, per ogni p e q c'è un r_0 tale che $E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$ per ogni $r \geq r_0$ (la spiegazione è analoga a quella per la successione nel primo quadrante). Denoteremo con $E^\infty_{p,q}$ questo valore stabile di $E^r_{p,q}$.
Diciamo che una successione spettrale limitata *converge* ad H_* se esiste una famiglia di oggetti H_n di $\mathcal{A}$, ognuno dotato di una filtrazione finita

$$0 = F_s H_n \subset \cdots \subset F_{p-1} H_n \subset F_p H_n \subset F_{p+1} H_n \subset \cdots \subset F_t H_n = H_n,$$

e tale che ci sono degli isomorfismi

$$E^\infty_{p,q} \cong \frac{F_p H_{p+q}}{F_{p-1} H_{p+q}}.$$

In tal caso si scriverá $E^a_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$.

Esempio. Supponiamo che una successione spettrale nel primo quadrante converga ad H_*. Fissato n, i termini di grado totale non nulli n in $E^\infty_{*,*}$ sono $E^\infty_{0,n} = F_0 H_n$, $E^\infty_{1,n-1} = F_1 H_n / F_0 H_n$, $\ldots$, $E^\infty_{n,0} = F_n H_n / F_{n-1} H_n$, quindi H_n ha una filtrazione finita di lunghezza $n+1$:

$$0 = F_{-1} H_n \subset F_0 H_n \subset \cdots \subset F_{n-1} H_n \subset F_n H_n = H_n.$$

Inoltre, ogni freccia che atterra sull'"asse x" è zero, quindi $E^r_{0,n}$ è un quoziente di $E^a_{0,n}$, mentre ogni freccia che parte dall'asse y è zero, quindi $E^r_{n,0}$ è un sottooggetto di $E^a_{n,0}$. Ci sono quindi dei morfismi "proiezione"

$$E^\infty_{0,n} \longleftarrow \ldots \longleftarrow E^{a+1}_{n,0} \longleftarrow E^a_{n,0}$$

e analogamente dei morfismi "inclusione"

$$E^\infty_{n,0} \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^{a+1}_{0,n} \longrightarrow E^a_{0,n}$$

detti anche *omomorfismi di lato*.

Successioni collassanti. Una successione spettrale *collassa* in E^r, per qualche $r > 0$ se c'è esattamente una riga o una colonna non nulla nel reticolo $E^r_{*,*}$. Se una successione spettrale che collassa converge a H_*, si ricavano immediatamente gli H_n: infatti, H_n è l'unico $E^r_{p,q}$ non nullo tale che $p + q = n$.

Termini E^∞. Data una successione spettrale, ogni $E^{r+1}_{p,q}$ è un sottoquoziente del termine precedente $E^r_{p,q}$. Per induzione, si trova allora una famiglia di sottooggetti di $E^a_{p,q}$:

$$0 = B^a_{p,q} \subset \cdots \subset B^r_{p,q} \subset B^{r+1}_{p,q} \subset \cdots \subset Z^{r+1}_{p,q} \subset Z^r_{p,q} \subset \cdots \subset Z^a_{p,q} = E^a_{p,q}$$

tali che $E^r_{p,q} = Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}$. Introduciamo gli oggetti intermedi

$$B^\infty_{p,q} = \bigcup_{r=a}^{\infty} B^r_{p,q} \text{ e } Z^\infty_{p,q} = \bigcap_{r=a}^{\infty} Z^r_{p,q}$$

e definiamo $E^\infty_{p,q} = Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}$. In una successione spettrale limitata, queste unioni e intersezioni sono entrambe finite, cosicché $B^\infty_{p,q} = B^r_{p,q}$ e $Z^\infty_{p,q} = Z^r_{p,q}$ per r grande; ritroviamo quindi come caso particolare la definizione precedente di $E^\infty_{p,q}$.

Avvertenza. In una successione spettrale non limitata, assumeremo tacitamente che $B^\infty_{p,q}$, $Z^\infty_{p,q}$ e $E^\infty_{p,q}$ esistano in $\mathcal{A}$. Inoltre, nel seguito assumeremo anche l'esistenza di somme dirette arbitrarie in $\mathcal{A}$.

Successioni limitate inferiormente Una successione spettrale si dice *limitata inferiormente* se per ogni n esiste un intero $s = s(n)$ tale che i termini $E^a_{p,q}$ di grado totale n sono nulli per ogni $p < s$: vale a dire, si annullano per p molto piccolo. Ad esempio, una successione spettrale limitata è anche limitata inferiormente. Una successione spettrale nel primo e nel quarto quadrante è limitata inferiormente, ma non limitata.

Convergenza di successioni spettrali. Diamo la nozione di convergenza solo per le successioni spettrali inferiormente limitate, a cui noi siamo principalmente interessati.
Una successione spettrale limitata inferiormente E^r converge a una collezione di oggetti H_n in $\mathcal{A}$ se ogni H_n è provvisto di una filtrazione

$$\cdots \subset F_{p-1}H_n \subset F_pH_n \subset F_{p+1}H_n \subset \cdots$$

tale che:
1) $\bigcup_p F_pH_n = H_n$ e $\bigcap_p F_pH_n = 0$;
2) ci sono degli isomorfismi

$$\beta_{p,q} : E^\infty_{p,q} \cong \frac{F_pH_{p+q}}{F_{p-1}H_{p+q}}$$

(scriveremo anche piú brevemente $\beta_p : E^\infty_p \cong F_pH/F_{p-1}H$).
La nozione di convergenza è motivata dal cosiddetto teorema di comparazione, che enunciamo

qui sotto. Se E^r ed E'^r sono successioni spettrali limitate inferiormente che convergono ad H e H' rispettivamente, diciamo che una mappa $h : H \to H'$ è *compatibile* con un morfismo $f : E \to E'$ se:
1) $h(F_pH_n) \subset F_pH'_n$;
2) per ogni p, q, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} F_pH_{p+q}/F_{p-1}H_{p+q} & \xrightarrow{h_{p+q}} & F_pH'_{p+q}/F_{p-1}H'_{p+q} \\ \beta_{p,q}\big\downarrow\cong & & \beta'_{p,q}\big\downarrow\cong \\ E^\infty_{p,q} & \xrightarrow{f^\infty_{p,q}} & E'^\infty_{p,q}. \end{array}$$

(Con leggero abusto di notazione, abbiamo continuato ad indicare con h anche la mappa indotta sui quozienti).

Teorema 1.2 *Nelle ipotesi appena viste, supponiamo che $f^r : E^r_{p,q} \cong E'^r_{p,q}$ sia un isomorfismo per ogni p, q e per qualche r (quindi per $r = \infty$): allora anche h è un isomorfismo.*

DIM. La convergenza fornisce delle successioni esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_{p-1}H_n/F_sH_n & \longrightarrow & F_pH_n/F_sH_n & \longrightarrow & E^\infty_{p,n-p} & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow\cong & & \\ 0 & \longrightarrow & F_{p-1}H'_n/F_sH'_n & \longrightarrow & F_pH'_n/F_sH'_n & \longrightarrow & E'^\infty_{p,n-p} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Fissato s, partendo da $p = s+1$ si mostra per induzione (crescente e decrescente) che $F_pH_n/F_sH_n \cong F_pH'_n/F_sH'_n$ per ogni p. Dal momento che $H_n = \bigcup_p F_pH_n$, questo dimostra che $H_n/F_sH_n \cong H'_n/F_sH'_n$. A questo punto osserviamo che $\bigcap_p F_pH_n$ è il nucleo dela mappa da H_n al suo completamento $\varprojlim H_n/F_pH_n$, per cui $H_n = \varprojlim H_n/F_pH_n$; analogamente, $H'_n = \varprojlim H'_n/F_pH'_n$, da cui l'isomorfismo. □

2 Successione spettrale associata a una filtrazione

Una *filtrazione* F di un complesso di catene (C, d) (con d di grado -1) è una famiglia ordinata di sottocomplessi

$$\cdots \subset F_{p-1}C \subset F_pC \subset F_{p+1}C \subset \cdots$$

di C.
Una filtrazione è *esaustiva* se $C = \bigcup_p F_pC$. (Ovviamente si ha sempre $C \supset \bigcup_p F_pC$).

Teorema 2.1 (di costruzione) *Una filtrazione F di un complesso (C, d) determina in modo naturale una successione spettrale E con termini iniziali*

$$E^0_{p,q} = \frac{F_pC_{p+q}}{F_{p-1}C_{p+q}}$$

e isomorfismi naturali

$$E^1_{p,q} \cong H_{p+q}(E^0_{p,*}) = H_{p+q}\Big(\frac{F_pC}{F_{p-1}C}\Big).$$

DIM. Nel seguito, eviteremo di scrivere l'indice q per non appesantire la notazione: quindi, data una famiglia di oggetti $A_{p,q}$, indicheremo con A_p la sottofamiglia $A_{p,*}$, con la convenzione che se $B = B_*$ è un'altra famiglia (parametrizzata da un solo indice), un morfismo $A_p \to B$ è una collezione di morfismi $A_{p,q} \to B_{p+q}$. In particolare, gli isomorfismi del teorema si leggono $E^0_p = F_pC/F_{p-1}C$, e $E^1_p = H(E^0_p)$.
Nel seguito denoteremo η_p la suriezione $F_pC \to F_pC/F_{p-1}C = E^0_p$. Definiamo

$$A^r_p = \{c \in F_pC : dc \in F_{p-r}C\} \text{ (cioè, } A^r_{p,q} = \{c \in F_pC_{p+q} : dc \in F_{p-r}C_{p+q-1}\}).$$

Un elemento di A^r_p può essere visto come un "ciclo approssimativo a livello r": il suo bordo non è necessariamente 0, ma si trova r gradi piú in basso nella filtrazione. Poniamo

$$Z^r_p = \eta_p(A^r_p) = \frac{A^r_p}{A^r_p \cap F_{p-1}C} \subset E^0_p,$$

e

$$B^{r+1}_{p-r} = \eta_{p-r}(d(A^r_p)) \subset E^0_{p-r}.$$

(Gli indici sono scelti in modo tale che Z^r_p e $B^r_p = \eta_p(d(A^{r-1}_{p+r-1}))$ sono sottooggetti di E^0_p.)
Poniamo $Z^\infty_p = \bigcap_{r=1}^\infty Z^r_p$ e $B^\infty_p = \bigcup_{r=1}^\infty B^r_p$. Allora abbiamo definito una catena di inclusioni per ogni E^0_p:

$$0 = B^0_p \subset B^1_p \subset \cdots \subset B^r_p \subset B^{r+1}_p \subset \cdots \subset B^\infty_p \subset Z^\infty_p \subset \cdots \subset Z^{r+1}_p \subset Z^r_p \subset \cdots \subset Z^1_p \subset Z^0_p = E^0_p.$$

A questo punto i termini della successione spettrale sono definiti da

$$E^r_p = Z^r_p/B^r_p,$$

e le mappe $d^r_p : E^r_p \to E^r_{p-r}$ sono quelle indotte dal differenziale $d : A^r_p \to A^r_{p-r}$.
Per dimostrare che d^r_p è ben definita, notiamo innanzitutto che si ha $A^r_p \cap F_{p-1} = A^{r-1}_{p-1}$. Quindi, sfruttando ripetutamente l'isomorfismo $S/(U + (S \cap T)) \cong (S + T)/(U + T)$, si ottiene

$$\begin{aligned} E^r_p = \frac{Z^r_p}{B^r_p} &= \frac{A^r_p/(A^r_p \cap F_{p-1}C)}{d(A^{r-1}_{p+r-1})/(d(A^{r-1}_{p+r-1}) \cap F_{p-1}C)} \cong \frac{(A^r_p + F_{p-1}C)/F_{p-1}C}{(d(A^{r-1}_{p+r-1}) + F_{p-1}C)/F_{p-1}C} \cong \\ &\cong \frac{A^r_p}{d(A^{r-1}_{p+r-1}) + A^r_p \cap F_{p-1}C} \cong \frac{A^r_p}{d(A^{r-1}_{p+r-1}) + A^{r-1}_{p-1}}, \end{aligned}$$

e quindi $E^r_{p-r} = A^r_{p-r}/(d(A^{r-1}_{p-1}) + A^{r-1}_{p-r-1})$. Allora, se $a \in d(A^{r-1}_{p+r-1}) + A^{r-1}_{p-1}$, si ha $da \in d(A^{r-1}_{p-1})$, per cui d^r_{p-r} è ben definita.
Ora, per mostrare che abbiamo in mano una successione spettrale, dobbiamo solo esibire degli isomorfismi tra E^{r+1} e $H(E^r)$.

Lemma 2.2 *La mappa d determina degli isomorfismi*

$$\frac{Z^r_p}{Z^{r+1}_p} \cong \frac{B^{r+1}_{p-r}}{B^r_{p-r}}$$

DIM. Notiamo innanzitutto che $d(A_p^r) \cap F_{p-r-1}C = d(A_p^{r+1})$, quindi $B_{p-r}^{r+1} = d(A_p^r)/d(A_p^r) \cap F_{p-r-1}) = d(A_p^r)/d(A_p^{r+1})$ e

$$\frac{B_{p-r}^{r+1}}{B_{p-r}^r} = \frac{d(A_p^r)/d(A_p^{r+1})}{d(A_{p-1}^{r-1})/d(A_{p-1}^r)} = \frac{d(A_p^r)}{d(A_{p-1}^{r-1} + A_p^{r+1})}$$

dal momento che $A_{p-1}^r \subset A_p^{r+1}$ implica $d(A_{p-1}^r) \subset d(A_p^{r+1})$. D'altra parte,

$$\frac{Z_p^r}{Z_p^{r+1}} = \frac{\eta_p(A_p^r)}{\eta_p(A_p^{r+1})} = \eta_p\Big(\frac{A_p^r}{A_p^{r+1}}\Big) = \frac{A_p^r}{A_p^{r+1} + A_p^r \cap F_{p-1}C} = \frac{A_p^r}{A_p^{r+1} + A_{p-1}^{r-1}}$$

dal momento che $A_{p-1}^{r-1} = A_p^r \cap F_{p-1}C$. Poiché il nucleo di $d : A_r^p \to F_{p-r}C$ è contenuto in A_p^{r+1}, la mappa indotta da d

$$\frac{A_p^r}{A_p^{r+1} + A_{p-1}^{r-1}} \longrightarrow \frac{d(A_p^r)}{d(A_{p-1}^{r-1} + A_p^{r+1})}$$

è un monomorfismo; ma si riconosce subito che è anche suriettiva, per cui è un isomorfismo. $\square$

Tornando alla nostra situazione, si ha che

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\Big(E_p^r = \frac{A_p^r}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + A_{p-1}^{r-1}} \quad &\to \quad E_{p-r}^r = \frac{A_{p-r}^r}{d(A_{p-1}^{r-1}) + A_{p-r-1}^{r-1}}\Big) \\
&= \quad \frac{\{z \in A_p^r : \; dz \in d(A_{p-1}^{r-1}) + A_{p-r-1}^{r-1}\}}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + A_{p-1}^{r-1}} \\
&\overset{(1)}{\cong} \quad \frac{A_{p-1}^{r-1} + A_p^{r+1}}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + A_{p-1}^{r-1}} \\
&= \quad \frac{A_{p-r}^r}{d(A_{p+r-1}^{r-1}) + A_{p-1}^{r-1}} \overset{(2)}{\cong} \frac{Z_p^{r+1}}{B_p^r}
\end{aligned}$$

dove (1) è implicato da $da \in A_{p-r-1}^{r-1} \Leftrightarrow a \in A_p^{r+1}$, e (2) da isomorfismi simili a quelli usati per il lemma 2.2. Inoltre, notiamo che

$$\mathrm{Im}(d_p^r : E_p^r \to E_{p-r}^r) \cong \frac{E_p^r}{\mathrm{Ker} d_p^r} = \frac{Z_p^r/B_p^r}{Z_p^{r+1}/B_p^r} \cong \frac{Z_p^r}{Z_p^{r+1}} \cong \frac{B_{p-r}^{r+1}}{B_{p-r}^r},$$

quindi la mappa d_p^r si fattorizza:

$$E_p^r \to \frac{E_p^r}{\mathrm{Ker} d_p^r} \cong \frac{B_{p-r}^{r+1}}{B_{p-r}^r} \hookrightarrow \frac{Z_{p-r}^r}{B_{p-r}^r} = E_{p-r}^r.$$

Dunque l'immagine di d_p^r è $\frac{B_{p-r}^{r+1}}{B_{p-r}^r}$; rimpiazzando p con $p+r$, $\mathrm{Im}(d_{p+r}^r) = \frac{B_p^{r+1}}{B_p^r}$, per cui si trova un isomorfismo

$$E_p^{r+1} = \frac{Z_p^{r+1}}{B_p^{r+1}} \cong \frac{Z_p^{r+1}/B_p^r}{B_p^{r+1}/B_p^r} \cong \frac{\mathrm{Ker}(d_p^r)}{\mathrm{Im}(d_{p+r}^r)} = H_p(E^r)$$

cosicché abbiamo effettivamente costruito una successione spettrale. $\square$

Una filtrazione di un complesso di catene C induce una filtrazione sull'omologia di C nel seguente modo: definiamo $F_pH_n(C)$ come l'immagine della mappa $H_n(F_pC) \to H_n(C)$. Inoltre, se la filtrazione su C è esaustiva, anche la filtrazione indotta su $H_n(C)$ è esaustiva: infatti, preso un elemento $c \in H_n(C)$, c è rappresentato da qualche elemento in F_pC_n per qualche p: allora $c \in F_pH_n(C)$, e $H_n(C) \subset \bigcup_p F_pH_n(C)$.
Il prossimo teorema (di convergenza) fornisce dei criteri per la convergenza di successioni spettrali che nascono da filtrazioni inferiormente limitate

Teorema 2.3 (di convergenza) *1) Supponiamo che la filtrazione su C sia limitata. Allora la successione spettrale associata è limitata e converge ad $H_*(C)$:*

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_pC/F_{p-1}C) \Rightarrow H_{p+q}(C).$$

2) Supponiamo che la filtrazione su C sia limitata inferiormente ed esaustiva. Allora anche la successione spettrale associata è limitata inferiormente e converge ad $H_*(C)$.
Inoltre, la convergenza è naturale, nel senso che se $f : C \to C'$ è una mappa di complessi filtrati, allora la mappa indotta $H(C) \to H(C')$ è compatibile con le mappe corrispondenti tra le successioni spettrali associate.

DIM. Dimostreremo direttamente la 2), che è piú forte. Per quanto visto, anche la filtrazione indotta su H_* è esaustiva e inferiormente limitata: ne consegue che $\bigcup_p F_pH_n = H_n$ e $\bigcap_p F_pH_n = 0$ per ogni n. Inoltre, anche la successione spettrale associata è inferiormente limitata. Per dimostrare il teorema è quindi sufficiente esibire degli isomorfismi $\beta_p : E^\infty_p \cong F_pH/F_{p-1}H$. Per questo osserviamo che, poiché la filtrazione è limitata inferiormente, fissati p, n e $q = n - p$, nelle notazioni del teorema precedente

$$A^r_{p,q} = \{c \in F_pC_n : dc \in F_{p-r}C_{n-1}\}$$

si stabilizza per r grande: denotiamo con $A^\infty_{p,q}$ tale valore stabile (chiaramente $A^\infty_{p,q} = \{c \in F_pC_n : dc = 0\}$, e $Z^\infty_{p,q} = \eta_{p,q}(A^\infty_{p,q})$). Ora, $A^\infty_{p,q} = \mathrm{Ker}(d : F_pC_n \to F_pC_{n-1})$, mentre $(dC_{n+1}) \cap F_pC_n = \bigcup_r d(A^r_{p+r,q-r+1})$ ($\supset$ è ovvia; viceversa, preso $c \in (dC_n) \cap F_pC_{n-1}$, $c = da$ con $a \in F_{p+r}C_n$ per qualche r per l'esaustivitá, per cui $a \in A^r_{p+r,q-r+1}$).
Infine, $A^\infty_{p-1,q} = \{c \in F_{p-1}C_n : dc = 0\}$, mentre

$$\mathrm{Ker}(\eta_{p,q} : A^\infty_{p,q} \to E^0_{p,q}) = \{c \in F_pC_n : dc = 0 \text{ e } c \in F_{p-1}C_n\} = A^\infty_{p-1,q},$$

quindi

$$\begin{aligned}
\frac{F_pH_n(C)}{F_{p-1}H_n(C)} &= \frac{\mathrm{Ker}(d : F_pC_n \to F_pC_{n-1})/d(C_{n+1}) \cap F_pC_n}{\mathrm{Ker}(d : F_{p-1}C_n \to F_{p-1}C_{n-1})/d(C_{n+1}) \cap F_{p-1}C_n} \\
&= \frac{A^\infty_{p,q}/d(\bigcup_r A^r_{p+r,q-r+1})}{A^\infty_{p-1,q+1}/d(\bigcup_r A^r_{p+r+1,q-r})} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{A^\infty_{p,q}}{A^\infty_{p-1,q+1} + d(\bigcup_r A^r_{p+r,q-r+1})} \\
&= \frac{A^\infty_{p,q}}{A^\infty_{p,q} \cap F_{p-1}C_n + d(\bigcup_r A^r_{p+r,q-r+1})} \\
&= \frac{\eta_{p,q}A^\infty_{p,q}}{\eta_{p,q}(d(\bigcup_r A^r_{p+r,q-r+1}))} \overset{(2)}{=} \frac{Z^\infty_{p,q}}{B^\infty_{p,q}} = E^\infty_{p,q},
\end{aligned}$$

dove (1) è implicato da $\bigcup_r A^r_{p+r,q-r+1} \subset \bigcup_r A^r_{p+r+1,q-r}$, mentre (2) è implicato da $B^\infty_{p,q} = \bigcup_r B^r_{p,q} = \bigcup_r \eta_{p,q}(dA^r_{p+r,q-r+1})$.

□

3 Successione spettrale di un complesso doppio

Un *complesso doppio (di omologia)* (o *bicomplesso*) in $\mathcal{A}$ è una famiglia $\{C_{p,q}\}$ di oggetti in $\mathcal{A}$, con delle mappe

$$d^h : C_{p,q} \to C_{p-1,q} \text{ e } d^v : C_{p,q} \to C_{p,q-1}$$

tali che $d^h \circ d^h = d^v \circ d^v = d^h \circ d^v + d^v \circ d^h = 0$. È molto utile visualizzare il bicomplesso $C_{*,*}$ come un reticolo

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
{} & C_{p-1,q+1} \arrow[l] \arrow[d, "d^v"] & C_{p,q+1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"] & C_{p+1,q+1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"] & {} \arrow[l] \\
{} & C_{p-1,q} \arrow[l] \arrow[d, "d^v"] & C_{p,q} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"] & C_{p+1,q} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"] & {} \arrow[l] \\
{} & C_{p-1,q-1} \arrow[l] \arrow[d] & C_{p,q-1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d] & C_{p+1,q-1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

in cui le mappe d^h vanno in orizzontale, le mappe d^h vanno in verticale, e ogni quadrato è anticommutativo. Ogni riga $C_{*,q}$ è un complesso di catene rispetto al differenziale orizzontale d^h, e indicheremo con $H^h_p(C_{*,q})$ la sua p-esima omologia. Analogamente, ogni colonna $C_{p,*}$ è un complesso di catene rispetto al differenziale d^v, con omologia $H^v_q(C_{p,*})$.

Diremo che un complesso doppio C è *limitato* se C ha solo un numero finito di termini lungo ogni antidiagonale $p+q=n$. Un esempio di complesso doppio limitato è un *complesso doppio nel primo quadrante*, cioè tale che $C_{p,q} \neq 0$ solo per $p \geq 0, q \geq 0$.

Complessi totali. Ad ogni complesso doppio (di omologia) C è associato un complesso di catene $T_* = \mathrm{Tot}(C)_*$, detto *complesso totale* di C, i cui termini sono definiti da

$$\mathrm{Tot}(C)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$$

e con un differenziale $d : \mathrm{Tot}(C)_n \to \mathrm{Tot}(C)_{n-1}$ dato da $d = d^h + d^v$. (L'anticommutativitá di d^h e d^v serve a garantire che $d \circ d = 0$.)

Le tecniche sviluppate nei due capitoli precedenti consentono di approssimare l'omologia del complesso totale T_* attraverso i termini di una opportuna successione spettrale ricavata da $C_{*,*}$. Prima di tutto, dobbiamo inventarci un modo utile per filtrare il complesso totale, e lo faremo attraverso il complesso doppio.
Nel seguito, T sará sempre il complesso totale del complesso doppio C.

Filtrazione con colonne. Sia, per ogni h, $({}^I\tau_{\leq h}C)_{*,*}$ il sottocomplesso di $C_{*,*}$ ottenuto ponendo a zero tutte le colonne $C_{p,*}$ tali che $p > h$:

$$({}^I\tau_{\leq h}C)_{p,q} = \begin{cases} C_{p,q} & \text{se } p \leq h \\ 0 & \text{se } p > h \end{cases} \tag{1}$$

Il complesso totale associato a questo complesso doppio è chiaramente un sottocomplesso di T_*, e verrá denotato con ${}^IF_hT_*$. In altro modo,

$${}^IF_hT_n = \bigoplus_{p+q=n, p\leq h} C_{p,q}$$

Abbiamo quindi una filtrazione di T_n:

$$\cdots \subset^I F_{h-1}T_n \subset^I F_hT_n \subset^I F_{h+1}T_n \subset \cdots$$

che da' luogo a una successione spettrale ${}^IE^r_{p,q}$. I termini iniziali di questa successione spettrale sono per definizione

$${}^IE^0_{p,q} =^I F_pT_{p+q}/^IF_{p-1}T_{p+q} = C_{p,q},$$

e le mappe $d^0_{p,q}$ non sono altro che i differenziali verticali d^v, come è immediato verificare, quindi

$${}^IE^1_{p,q} = H^v_q(C_{p,*}).$$

Le mappe $d^1 : H^v_q(C_{p,*}) \to H^v_q(C_{p-1,*})$ sono indotte sull'omologia dai differenziali orizzontali d^h, per cui si ha

$${}^IE^2_{p,q} = H^h_p(H^v_q(C_{*,*})).$$

Se C è un complesso doppio nel primo quadrante, la filtrazione è limitata, e abbiamo una successione spettrale convergente:

$$^{I}E^2_{p,q} = H^h_p H^v_q(C) \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}(C)).$$

Piú in generale, questo risultato vale ogniqualvolta C è nullo nel secondo quadrante: in tal caso, infatti, la filtrazione sará limitata inferiormente, ed è ovvio che questa filtrazione è sempre esaustiva, dunque si può applicare il teorema 2.3.

Filtrazione con righe. In modo del tutto analogo, sia, per ogni h, $(^{II}\tau_{\leq h}C)_{*,*}$ il sottocomplesso di $C_{*,*}$ ottenuto ponendo a zero tutte le righe $C_{*,q}$ tali che $q > h$:

$$(^{II}\tau_{\leq h}C)_{p,q} = \begin{cases} C_{p,q} & \text{se } q \leq h \\ 0 & \text{se } q > h \end{cases} \tag{2}$$

Il complesso totale associato a questo complesso doppio è denotato con $^{II}F_hT_*$. In altro modo,

$$^{II}F_hT_n = \bigoplus_{p+q=n, q\leq h} C_{p,q}$$

Abbiamo quindi una filtrazione di T_n:

$$\cdots \subset^{II} F_{h-1}T_n \subset^{II} F_hT_n \subset^{II} F_{h+1}T_n \subset \cdots$$

che da' luogo a una successione spettrale $^{II}E^r_{p,q}$. Dal momento che $F_pT(C)/F_{p-1}T(C)$ è la riga $C_{*,p}$, si ha

$$^{II}E^0_{p,q} = C_{q,p}$$

(notare lo scambio degli indici!), e le mappe $d^0_{p,q}$ sono i differenziali orizzontali d^h, quindi

$$^{II}E^1_{p,q} = H^h_q(C_{*,p}).$$

Le mappe $d^1 : H^h_p(C_{*,q}) \to H^h_p(C_{*,q-1})$ sono indotte sull'omologia dai differenziali verticali d^v, per cui si ha

$$^{II}E^2_{p,q} = H^v_p H^h_q(C_{*,*}).$$

Notiamo che si si sarebbe potuti arrivare alla stessa conclusione osservando che scambiare i ruoli di p e q equivale a passare dalla filtrazione in righe a quella in colonne, e quindi dalla successione spettrale ^{I}E alla ^{II}E.

Se C è un complesso doppio nel primo quadrante (o piú in generale C è nullo nel quarto quadrante), la filtrazione è limitata, e abbiamo una successione spettrale convergente:

$$^{II}E^2_{p,q} = H^v_q H^h_p(C) \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}(C)).$$

Successione esatta dei termini di grado basso. Sia C un complesso doppio nel primo quadrante, $T = \mathrm{Tot}(C)$. Allora è immediato verificare che $E^2_{0,0} = H_0(T)$. Inoltre, c'è una successione esatta

$$H_2(T) \xrightarrow{\alpha} {}^I E^2_{2,0} \xrightarrow{d} {}^I E^2_{0,1} \xrightarrow{\beta} H_1(T) \xrightarrow{\gamma} {}^I E^2_{1,0} \longrightarrow 0$$

detta *successione esatta dei termini di grado basso*. Per capire come funziona questa successione, troviamo innanzitutto un modo esplicito per rappresentare i termini $E^2_{p,q}$: i primi passi della filtrazione del complesso totale sono

$$\begin{array}{ccccccc}
C_{0,3} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,3}\oplus C_{1,2} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,3}\oplus C_{1,2}\oplus C_{2,1} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,3}\oplus C_{1,2}\oplus C_{2,1}\oplus C_{3,0} \\
d\big\downarrow & & d\big\downarrow & & d\big\downarrow & & d\big\downarrow \\
C_{0,2} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,2}\oplus C_{1,1} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,2}\oplus C_{1,1}\oplus C_{2,0} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,2}\oplus C_{1,1}\oplus C_{2,0} \\
d\big\downarrow & & d\big\downarrow & & d\big\downarrow & & d\big\downarrow \\
C_{0,1} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,1}\oplus C_{1,0} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,1}\oplus C_{1,0} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,1}\oplus C_{1,0} \\
d\big\downarrow & & d\big\downarrow & & d\big\downarrow & & d\big\downarrow \\
C_{0,0} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,0} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,0} & \xrightarrow{\subset} & C_{0,0}
\end{array}$$

Allora

$$\begin{aligned}
Z^2_{2,0} &= \frac{\{(a,b,c) \in \overbrace{C_{0,2}\oplus C_{1,1}\oplus C_{2,0}}^{F_2T_2} : \overbrace{(d^v a + d^h b, d^v b + d^h c)}^{d(a,b,c)} \in \overbrace{C_{0,1}}^{F_0T_1}\}}{\underbrace{C_{0,2}\oplus C_{1,1}}_{A^2_{2,0}\cap F_1T_2}} \\
&= \frac{\{(b,c) \in C_{1,1}\oplus C_{2,0} : d^v b + d^h c = d^h c = 0\}}{\{(b,0) : b \in C_{1,1}\}}
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
B^2_{2,0} &= \frac{\{\overbrace{(d^v x + d^h y, d^v y + d^h z, d^v z + d^h t)}^{d(x,y,z,t)} \in C_{0,2}\oplus C_{1,1}\oplus C_{2,0} : (x,y,z,t) \in A^1_{3,0}\}}{C_{0,2}\oplus C_{1,1}} \\
&= \{(d^h z, d^v z), (0, d^h t) : (z,t) \in C_{2,1}\oplus C_{3,0}\}
\end{aligned}$$

(si noti che $A^1_{3,0} \subset C_{0,3}\oplus C_{1,2}\oplus C_{2,1}\oplus C_{3,0} = F_3T_3$), per cui

$${}^I E^2_{2,0} = \frac{\{(a,b) \in C_{1,1}\oplus C_{2,0} : d^v b = d^v a + d^h b = 0\}}{\{(a,0), (d^h x, d^v x), (0, d^h y) : a \in C_{1,1}, x \in C_{2,1}, y \in C_{3,0}\}}.$$

Analogamente,

$${}^I E^2_{1,0} = \frac{\{(a,b) \in C_{0,1}\oplus C_{1,0} : d^v b = d^v a + d^h b = 0\}}{\{(a,0), (d^h x, d^v x), (0, d^h y) : a \in C_{0,1}, x \in C_{1,1}, y \in C_{2,0}\}}$$

e per $E^2_{0,1}$ la formula diventa

$$^I E^2_{0,1} = \frac{\{a \in C_{0,1} : d^v a = 0\}}{\{d^v x, d^h y : x \in C_{0,2}, y \in C_{1,1}\}}.$$

Allora è facile vedere che $d :^I E^2_{2,0} \to^I E^2_{0,1}$ è data da $d(a,b) = d^h a$.
Le altre mappe sono definite nel modo seguente: se $\overline{a} \in H_2(T)$ è rappresentato da $(a,b,c) \in C_{0,2} \oplus C_{1,1} \oplus C_{2,0}$, $\alpha(a)$ è rappresentato da (b,c); se $\overline{b} \in E^2_{0,1}$ è rappresentato da $b \in C_{0,1}$, $\beta(\overline{b})$ è rappresentato da $(b,0) \in C_{0,1} \oplus C_{1,0}$; infine, γ è il morfismo indotto dall'identità sul.
L'esattezza si controlla facilmente cacciando sull complesso doppio:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
C_{0,2} \arrow[d, "d^v"'] & C_{1,2} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"'] & C_{2,2} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"'] & {} \arrow[l] \\
C_{0,1} \arrow[d, "d^v"'] & C_{1,1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"'] & C_{2,1} \arrow[l, "d^h"'] \arrow[d, "d^v"'] & {} \arrow[l] \\
C_{0,0} & C_{1,0} \arrow[l, "d^h"'] & C_{2,0} \arrow[l, "d^h"'] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Ad esempio, se $(a,b) \in^I E^2_{2,0}$, con $0 = d(a,b) = d^h a$, allora l'elemento rappresentato da $(0,a,b)$ in $H_2(T)$ è un ciclo, ben definito a meno di cobordi.
(La successione esatta dei termini di grado basso per $^{II}E^2$ si ottiene scambiando gli indici in basso dei $^I E^2$.)

4 Successione spettrale di Grothendieck

Successioni spettrali di coomologia. Tutte le discussioni fatte nelle pagine precedenti si possono dualizzare al caso di una successione spettrale di coomologia, e al caso di un complesso doppio di coomologia.
Una *successione spettrale di coomologia* in $\mathcal{A}$ è una famiglia $\{E^{p,q}_r\}$ di oggetti, con $r \geq a$, e di mappe

$$d^{p,q}_r : E^{p,q}_r \longrightarrow E^{p+r,q-r+1}_r$$

tali che $d_r \circ d_r = 0$, e tali che E_{r+1} è l'omologia di E_r.
In pratica, si tratta di una successione spettrale di omologia, solo che cambia l'indiciazione attraverso $E^{p,q}_r = E^r_{-p,-q}$, cosicché stavolta d_r aumenta il grado totale $p+q$ di $E^r_{p,q}$ di una unità.
Una successione spettrale di coomologia viene detta *limitata* se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ c'è solo un numero finito di termini non nulli di grado totale n in $E^{*,*}_a$. In una successione spettrale di coomologia limitata, denotiamo $E^{p,q}_\infty$ il valore stabile dei termini $E^{p,q}_r$, e diciamo che la successione converge ad H^* se c'è una filtrzione finita

$$0 = F^t H^n \subset \cdots \subset F^{p+1} H^n \subset F^p H^n \subset F^{p-1} H^n \subset \cdots \subset F^r H^n = H^n$$

tale che $E_\infty^{p,q} \cong F^p H^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q}$. (Notare che gli indici crescono).

Come prima, se una successione spettrale di coomologia nel primo quadrante converge ad H^*, allora H^n ha una filtrazione finita:

$$0 = F^{n+1}H^n \subset F^n H^n \subset \cdots \subset F^1 H^n \subset F^0 H^n = H^n.$$

In questo caso, il sottooggetto $F^n H^n \cong E_\infty^{n,0}$ si trova sull'asse x, mentre il quoziente piú piccolo $H^n/F^1H^n \cong E_\infty^{0,n}$ è situato sull'asse y. Gli omomorfismi di lato sono le mappe $E_a^{n,0} \to E_\infty^{n,0} \subset H^n$ e $H^n \to E_\infty^{0,n} \subset E_a^{0,n}$.

Una successione spettrale di coomologia si dice *limitata inferiormente* se per ogni n i termini di grado totale n si annullano per p molto grande. Ad esempio, una successione spettrale di coomologia nel semipiano sinistro è limitata inferiormente, ma non limitata. La nozione di *convergenza* di una successione spettrale di coomologia limitata inferiormente è identica al quella per le successioni di omologia.

Le filtrazioni di complessi di cocatene, con relative proprietà (limitatezza inferiore, esaustività) si definiscono in modo del tutto analogo a quelle dei complessi di catene (con la precauzione che stavolta gli indici crescono), e vale il teorema fondamentale:

Teorema 4.1 *Una filtrazione F di un complesso di cocatene C determina in modo naturale una successione spettrale di coomologia con termini iniziali*

$$E_0^{p,q} = F^p C^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}$$

e con

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(E_0^{p,*}).$$

Se la filtrazione è limitata (risp. limitata inferiormente ed esaustiva), anche la successione spettrale è limitata (risp, limitata inferiormente), e converge in modo naturale ad $H^*(C)$:

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^pC/F^{p+1}C) \Rightarrow H^{p+q}(C).$$

Un *complesso doppio di coomologia* (o *bicomplesso di coomologia*) in $\mathcal{A}$ è una famiglia $\{C^{p,q}\}$ di oggetti di $\mathcal{A}$, con delle mappe

$$d^h : C^{p,q} \to C^{p+1,q} \text{ e } d^v : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$$

tali che $d^h d^h = d^v d^v = d^h d^v + d^v d^h = 0$.
Ad ogni complesso doppio di coomologia C è associato un complesso di cocatene $T^* = \mathrm{Tot}(C)^*$, detto *complesso totale* di C, i cui termini sono definiti da

$$\mathrm{Tot}(C)^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q}$$

e con un differenziale $d : \mathrm{Tot}(C)^n \to \mathrm{Tot}(C)^{n+1}$ dato da $d = d^h + d^v$.
Come nelle successioni spettrali, non c'è nulla di nuovo: anche qui siamo di fronte a un complesso doppio di omologia, solo che cambia l'indiciazione attraverso $C_r^{p,q} = C_{-p,-q}$, cosicché

stavolta d aumenta il grado totale $p+q$ di $C^{p,q}$ di una unità.

Le filtrazioni con righe e con colonne si applicano al contesto dei complessi doppi di coomologia nello stesso modo descritto per i complessi doppi di omologia. Noi saremo interessati in particolare ai complessi nel primo quadrante, per cui ne riassumiamo le proprietà nel seguente teorema:

Teorema 4.2 *Sia C un complesso doppio di coomologia nel primo quadrante. Allora ci sono due successioni spettrali di coomologia:*
1) Filtrando con colonne, con termini iniziali ${}^IE_0^{p,q} = C^{p,q}$ e con

$$ {}^IE_1^{p,q} = H_v^q(C^{p,*}), \quad {}^IE_2^{p,q} = H_h^pH_v^q(C) $$

che converge in modo naturale alla coomologia del complesso totale:

$$ {}^IE_2^{p,q} = H_h^pH_v^q(C) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}(C)). $$

Inoltre, si ha ${}^IE_2^{0,0} = H^0(\mathrm{Tot}(C))$, e c'è una successione esatta

$$ 0 \longrightarrow^I E_2^{1,0} \longrightarrow H^1(\mathrm{Tot}(C)) \longrightarrow^I E_2^{0,1} \xrightarrow{d} {}^I E_2^{2,0} \longrightarrow H^2(\mathrm{Tot}(C)), $$

detta successione esatta dei termini di grado basso.
2) Filtrando con righe,con termini iniziali ${}^{II}E_0^{p,q} = C^{q,p}$ e con

$$ {}^{II}E_1^{p,q} = H_h^q(C^{*,p}), \quad {}^{II}E_2^{p,q} = H_v^pH_h^q(C) $$

che converge in modo naturale alla coomologia del complesso totale:

$$ {}^{II}E_2^{p,q} = H_v^pH_h^q(C) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}(C)). $$

Infine, la successione esatta dei termini di grado basso è

$$ 0 \longrightarrow^{II} E_2^{1,0} \longrightarrow H^1(\mathrm{Tot}(C)) \longrightarrow^{II} E_2^{0,1} \xrightarrow{d} {}^{II} E_2^{2,0} \longrightarrow^I H^2(\mathrm{Tot}(C)). $$

Risoluzioni di Cartan-Eilenberg. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana che possieda sufficienti iniettivi. Una *risoluzione di Cartan-Eilenberg (a destra)* (o *pienamente iniettiva*) di un complesso di cocatene (A^*, d) in $\mathcal{A}$ è un complesso doppio (di coomologia) nel semipiano superiore $(I^{*,*}, d^h, d^v)$ costituito da oggetti iniettivi in $\mathcal{A}$, con una mappa di aumentazione

$$ A^* \xrightarrow{\varepsilon} I^{*,0} $$

che soddisfa le seguenti condizioni:
1) se $A^p = 0$, la colonna $I^{p,*}$ è zero;
2) definiamo i seguenti oggetti:
• $B^{p,*}(I, d^h) = d^h(I^{p-1,*})$, $B^p(A) = d(A^{p-1})$;
• $Z^{p,*}(I, d^h) = \mathrm{Ker}(d^h : I^{p,*} \to I^{p+1,*})$, $Z^p(A) = \mathrm{Ker}(d : A^p \to A^{p+1})$;

• $H^{p,*}(I,d^h) = Z^p(I,d^h)/B^p(I,d^h)$, $H^p(A) = Z^p(A)/B^p(A)$;
si ha allora che le mappe indotte dall'aumentazione

$$\begin{array}{rcl} A^p & \xrightarrow{\varepsilon} & I^{p,*} \\ Z^p(A) & \xrightarrow{\varepsilon} & Z^{p,*}(I,d^h) \\ B^p(A) & \xrightarrow{\varepsilon} & B^{p,*}(I,d^h) \\ H^p(A) & \xrightarrow{\varepsilon} & H^{p,*}(I,d^h) \end{array}$$

sono delle risoluzioni iniettive in $\mathcal{A}$.

Lemma 4.3 *In una categoria abeliana con sufficienti iniettivi esistono sempre risoluzioni di Cartan-Eilenberg di complessi di cocatene, e due risoluzioni siffatte sono omotopicamente equivalenti.*

Una omotopia di catene tra due mappe di complessi doppi di cocatene $f, g : D \to E$ consiste di una famiglia di mappe $s_h^{p,q} : D^{p,q} \to E^{p-1,q}$ e $s_v^{p,q} : D^{p,q} \to E^{p,q-1}$ tali che

$$\begin{aligned} &g - f = (d_h s_h + s_h d_h) + (d_v s_v + s_v d_v), \\ &s_v d_h + d_h s_v = s_h d_v + d_v s_h = 0. \end{aligned}$$

La definizione è data in modo tale che $s^h + s^v : \mathrm{Tot}(D)^n \to \mathrm{Tot}(E)^{n-1}$ formano una omotopia di cocatene tra le mappe indotte $\mathrm{Tot}(f)$ e $\mathrm{Tot}(g)$ da $\mathrm{Tot}(D)$ a $\mathrm{Tot}(E)$.

Lemma 4.4 *Sia I una risoluzione di Cartan-Eilenberg di un complesso di cocatene A in $\mathcal{A}$. Allora la mappa data dall'aumentazione $A \to \mathrm{Tot}(I)$ induce degli isomorfismi*

$$H^n(A) \cong H^n(\mathrm{Tot}(I)).$$

DIM. I è un complesso doppio di cocatene nel semipiano superiore, quindi si può filtrare con righe e ottenere una successione spettrale convergente

$$E_2^{p,q} = H_v^p H_h^q(I) \to H^{p+q}(\mathrm{Tot}(I)).$$

Tuttavia, dal momento che I è una risoluzione di Cartan-Eilenberg, ogni colonna $H_h^*(I^{*,p}) = H^{p,*}(I,d^h)$ è esatta fuorché nel punto $(p,0)$, per cui la successione collassa a E_2; la sola riga che sopravvive è l'asse x, i cui termini sono proprio $H^q(A)$, da cui l'isomorfismo cercato. □

Successione spettrale di Grothendieck Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ categorie abeliane tali che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno sufficienti iniettivi, e supponiamo di avere dei funtori esatti a sinistra $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Viene spontaneo chiedersi che relazione ci sia tra i funtori derivati di G e F, e i funtori derivati di $F \circ G$: la risposta è che questi questi funtori derivati sono collegati da una successione spettrale, detta successione spettrale di Grothendieck.
Dato un funtore esatto a sinistra $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, diremo che un oggetto B di $\mathcal{B}$ è F-*aciclico* se i funtori derivati a destra di F si annullano su B, cioè $R^iF(B) = 0$ per ogni $i \neq 0$.

Teorema 4.5 (successione spettrale di Grothendieck) *Siano $\mathcal{A} \xrightarrow{G} \mathcal{B} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ funtori esatti a sinistra tra categorie abeliane, tali che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno sufficienti iniettivi, e tali che G manda oggetti iniettivi di $\mathcal{A}$ in oggetti F-aciclici di $\mathcal{B}$. Allora, per ogni A in $\mathcal{A}$, esiste una successione spettrale di coomologia nel primo quadrante, con termini iniziali:*

$$^{II}E_2^{p,q} = (R^pF)(R^qG)(A)$$

che converge ai funtori derivati di FG:

$$(R^pF)(R^qG)(A) \Rightarrow R^{p+q}(FG)(A).$$

Gli omomorfismi di lato di questa successione spettrale sono le mappe naturali

$$(R^pF)(GA) \to R^p(FG)(A) \ \text{ e } \ R^q(FG)(A) \to F(R^qG(A)).$$

Infine, la successione esatta dei termini di grado basso è

$$0 \to (R^1F)(GA) \to R^1(FG)(A) \to F(R^1G(A)) \to (R^2F)(GA) \to R^2(FG)(A).$$

DIM. Preso A in $\mathcal{A}$, sia $A \to I$ una risoluzione iniettiva di A in $\mathcal{A}$: applicando G, si ottiene un complesso di cocatene GI in $\mathcal{B}$. Sia J una risoluzione di Cartan-Eilenberg di GI: applicando il funtore F, si ottiene un complesso doppio di coomologia FJ, e sia $\mathbb{R}^nF(GI) = H^n(\mathrm{Tot}(FJ))$ (gli $\mathbb{R}^nF(GI)$ sono detti anche *funtori iperderivati* di F, applicati alla cocatena GI). A questo punto applichiamo il teorema 4.2: filtrando FJ con colonne, si ottiene una successione spettrale con termini iniziali $^IE_0^{p,q} = F(J^{p,q})$ e con

$$^IE_2^{p,q} = H_h^pH_v^q(FJ) \Rightarrow (\mathbb{R}^{p+q}F)(GI).$$

Ora, dal momento che ogni colonna $J^{p,*}$ è una risoluzione iniettiva di GI^p, $H_v^q(FJ) = (R^qF)(GI)$. D'altra parte, per ipotesi ogni GI^p è F-aciclico, per cui dev'essere $(R^qF)(GI^p) = 0$ per $q \neq 0$, mentre per $q = 0$ si ha $R^0F = F$: quindi la successione spettrale collassa in $^IE_2$, e si ottiene

$$(\mathbb{R}^pF)(GI) \cong H^p((FG)I) = R^p(FG)(A).$$

Ora applichiamo la seconda parte del teorema: otteniamo una successione spettrale con termini iniziali $^{II}E_0^{p,q} = F(J^{q,p})$ e con

$$^{II}E_2^{p,q} = H_v^pH_h^q(FJ) = (R^pF)(H^q(GI));$$

dal momento che $H^q(GI) = R^q(GA)$, si ha $^{II}E_2^{p,q} = (R^pF)(R^qG)(A)$, e questa successione converge anch'essa a $\mathbb{R}^nF(GI) = H^n(\mathrm{Tot}(FJ))$: quindi si ha

$$^{II}E_2^{p,q} = (R^pF)(R^qG)(A) \Rightarrow \mathbb{R}^{p+q}F(GI) \cong R^{p+q}(FG)(A).$$

Gli omomorfismi di lato sono le mappe $E_2^{p,0} = (R^pF)(GA) \to E_\infty^{n,0} = R^p(FG)(A)$ e $E_\infty^{0,q} = R^q(FG)(A) \subset E_2^{0,q} = F(R^qGA)$.
La successione dei termini di grado basso è semplicemente una traduzione:

$$\begin{array}{ccccccccc}
^IE_2^{1,0} & \longrightarrow & H^1(\mathrm{Tot}(FJ)) & \longrightarrow & ^IE_2^{0,1} & \longrightarrow & ^IE_2^{2,0} & \longrightarrow & H^2(\mathrm{Tot}(FJ)) \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
0(R^1F)(GA) & \longrightarrow & R^1(FG)A & \longrightarrow & F(R^1GA) & \longrightarrow & (R^2F)(GA) & \longrightarrow & R^2(FG)A
\end{array}$$

e la dimostrazione è conclusa.

□