1. Calcolare

(i)
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\det\begin{pmatrix} 100 & 73 \\ 137 & 100 \end{pmatrix}$$

(iii)
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(iv)
$$\det\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad (\varphi \in \mathbf{R})$$

2. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare $\det(A)$ e $\det(B)$.
(ii) Calcolare $\det(AB)$, $\det(BA)$ e $\det(A^{-1})$.
(iii) Calcolare $\det(A+B)$.

3. Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ tre vettori in $\mathbf{R}^2$.
Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

4. Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$.

(i) Calcolare il prodotto vettoriale $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.
(ii) Calcolare $\mathbf{x} \times (-\mathbf{y})$.
(iii) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

5. Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
(ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $2\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.
(iii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

6. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della matrice $n \times n$ data da
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Calcolare i polinomi caratteristici delle matrici

(i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autovettori corrispondenti.

(i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(iv)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

9. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

10. Sia $A$ la matrice $6 \times 6$
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Far vedere che $\lambda = 2$ è autovalore di $A$. Determinare la dimensione dell'autospazio corrispondente.
(ii) Determinare il polinomio caratteristico di $A$.

11. Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare che soddisfa $A^2 = 0$.
(i) Determinare gli autovalori di $A$.
(ii) Calcolare $\mathrm{Tr}(A)$.

12. Sia $W \subset \mathbf{R}^3$ un sottospazio di dimensione 2. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la proiezione ortogonale su $W$. Determinare autovalori ed autospazi di $f$.

13. Sia $W \subset \mathbf{R}^3$ un sottospazio di dimensione 1. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la proiezione ortogonale su $W$. Determinare autovalori ed autospazi di $g$.