1. Calcolare le seguenti prodotti di matrici

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

2. Quali applicazioni A sono mappe lineari?
   (i) $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da $A(x) = |x|$.
   (ii) $A : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ data da $A(f(X)) = (f(X) - f(0))/X$.
   (iii) $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ data da

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

3. Calcolare le dimensioni di $\ker(A)$ ed $\mathrm{im}(A)$ per le applicazioni lineari:
   (i) $A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data, rispetto alla base standard, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

   (ii) $A : V \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dove $V = \{f \in \mathbf{R}[X] : \deg(f) \leq 2\}$ e $A(f(X)) = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(-2) \end{pmatrix}$.

4. Tutte le applicazioni lineari sono date rispetto alle basi standard di $\mathbf{R}^n$.
   (i) Calcolare la mappa AB dove $B : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ e $A : \mathbf{R}^3 :\longrightarrow \mathbf{R}^2$ sono date da

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (ii) Calcolare i prodotti AB e BA dove $B : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^4$ e $A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}$ sono date da

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare i prodotti AB e BA dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Calcolare il rango dei seguenti matrici

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

6. Quali applicazioni $A : V \longrightarrow V$ sono iniettive, suriettive o biettive? Per le applicazioni che sono biettive, calcolarne la mappa inverse A^{-1}.
   (i) $V = \mathbf{R}[X]$ e $A(f(X)) = Xf(X)$.
   (ii) $V = \mathbf{R}[X]$ e $A(f(X)) = (f(X) - f(0))/X$.
   (iii) $V = \mathbf{R}^3$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Sia A la matrice n per n data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   (i) Sia $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ la base standard di $\mathbf{R}^n$. Far vedere che

$$\begin{aligned} A(e_1) &= 0. \\ A(e_i) &= e_{i-1}; \qquad \text{per ogni } i > 1, \end{aligned}$$

   (ii) Calcolare A^2.
   (iii) Per ogni $n > 0$ calcolare A^n e determinarne il nucleo e l'immagine.