1. Risolvere il seguente sistema di quattro equazioni in tre incognite $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +8x_3 & = 0, \\ -x_1 & +\ x_2 & -5x_3 & = 0, \\ 3x_1 & & +6x_3 & = 0, \\ 2x_1 & +\ x_2 & +\ x_3 & = 0. \end{cases}$$

2. Risolvere il seguente sistema di tre equazioni in quattro incognite $x, y, z, u \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x & +\ y & +z & = 1, \\ 2x & +y & -3z & = 0, \\ 3x & +2y & -5z & = 1. \end{cases}$$

3. Trovare le soluzioni $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbf{R}$ del sistema di equazioni lineari che corrisponde alla matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 11 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 18 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

4. Risolvere il sistema di equazioni omogenee associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

5. per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ risolvere il sistema lineare associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

6. Siano $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbf{R}$ una soluzione del sistema associato alla matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -88\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Calcolare la somma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

7. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ e controllare se sono sottospazi lineari reali:
   (i) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2x_2\} \quad \subset \mathbf{R}^2$;
   (ii) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2\} \quad \subset \mathbf{R}^2$;
   (iii) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0\} \quad \subset \mathbf{R}^2$;
   (iv) $\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \quad \subset \mathbf{R}^2$.

8. Decidere se sono sottospazi o meno i seguenti sottoinsiemi W di $\mathbf{R}^3$:
   (i) $W = \{\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : 0 < t < 1\}$;
   (ii) $W = \{(0,0,0)\}$;
   (iii) $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + z = 1\}$.

9. Scrivere i seguenti sottospazi W come $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ per dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.
   (i) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases}\} \quad \subset \mathbf{R}^5$;
   (ii) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0\} \quad \subset \mathbf{R}^4$;
   (iii) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}\} \quad \subset \mathbf{R}^3$.

10. Trovere equazioni cartesiane per i sottospazi W:
   (i) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$;
   (ii) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^3$;
   (iii) $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^2$.

11. Sia $V = \mathbf{R}[X]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali. Siano $W_1 = \{f \in V : \deg(f) \leq 2\}$, $W_2 = \mathrm{Span}\{X^2 - X, X + 2\}$.
   (i) Decidere se W_1, W_2 sono sottospazi o meno.
   (ii) Decidere se $W_1 \subset W_2$ oppure $W_2 \subset W_1$.