THEOREMA 10

Nullus cubus, ne quidem numeris fractis exceptis, unitate auctus quadratum efficere potest praeter unicum casum, quo cubus est 8

DEMONSTRATIO

Propositio ergo huc redit, ut $\frac{a^3}{b^3}+1$ numquam esse possit quadratum praeter casum, quo $\frac{a}{b}=2$. Quocirca demonstrandum erit hanc formulam a^3b+b^4 nunquam fieri posse quadratum, nisi sit $a=2b$.

Haec autem expressio resolvitur in istos tres factores $b(a+b)(aa-ab+bb)$, qui primo quadratum constituere possunt, si esse posset $b(a+b)=aa-ab+bb$, unde prodit $a=2b$, qui erit casus, quem excepimus. Pono autem, ut ulterius pergam, $a+b=c$ seu $a=c-b$, qua facta substitutione habebitur

$$bc(cc-3bc+3bb),$$

quam demonstrandum est quadratum esse non posse, nisi sit $c=3b$; sunt autem b et c numeri inter se primi. Hic autem duo occurrunt casus considerandi, prout c vel multiplum est ternarii vel secus; illo enim casu factores c et $cc-3bc+3bb$ communem divisorem habebunt 3, hoc vero omnes tres inter se erunt primi.

Sit primo c non divisibile per 3; necessese erit, ut singuli illi tres factores sint quadrata, scilicet b et c et $cc-3bc+3bb$ seorsim. Fiat ergo $cc-3bc+3bb=\left(\frac{m}{n}b-c\right)^2$; erit

$$\frac{b}{c}=\frac{3nn-2mn}{3nn-mm}, \quad \text{vel} \quad \frac{b}{c}=\frac{2mn-3nn}{mm-3nn},$$

cuius fractionis termini erunt primi inter se, nisi m sit multiplum ternarii. Sit ergo m per 3 non divisibile; erit vel $c=3nn-mm$ vel $c=mm-3nn$ et vel $b=3nn-2mn$ vel $b=2mn-3nn$. At cum $3nn-mm$ quadratum esse nequeat, ponatur $c=mm-3nn$, quad quadratum fiat radicis $m-\frac{p}{q}n$, hincque oritur $\frac{m}{n}=\frac{3qq+pp}{2pq}$ atque

$$\frac{b}{nn}=\frac{2m}{n}-3=\frac{3qq-3pq+pp}{pq}.$$

Quadratum ergo esset haec formula $pq(3qq-3pq+pp)$, quae omnino similis est propositae $bc(3bb-3bc+cc)$ et ex multo minoribus numeris constat. At sit m multiplum ternarii, puta $m=3k$; erit $\frac{b}{c}=\frac{nn-2kn}{nn-3kk}$, unde erit vel $c=nn-3kk$ vel $c=3kk-nn$; quia autem $3kk-nn$ quadratum esse nequit, ponatur $c=nn-3kk$ eiusque radix $n-\frac{p}{q}k$, unde fiet $\frac{n}{k}=\frac{3qq+pp}{2pq}$ seu $\frac{k}{n}=\frac{2pq}{3qq+pp}$ atque

$$\frac{b}{nn}=1-\frac{2k}{n}=\frac{pp+3qq-4pq}{3qq+pp}.$$

Quadratum ergo essere esse deberet $(pp+3qq)(p-q)(p-3q)$. Ponatur $p-q=t$ et $p-3q=u$; erit $q=\frac{t-u}{2}$ et $p=\frac{3t-u}{2}$ illaque formula abit in hanc $tu(3tt-3tu+uu)$, quae iterum similis est priori $bc(3bb-3bc+cc)$.

Restat ergo posterior casus, quo est c multiplum ternarii, puta $c=3d$, atque quadratum esse debet $bd(bb-3bd+3dd)$; quae cum iterum similis sit priori, manifestum est utroque casu evenire non posse, ut formula proposita sit quadratum. Quamobrem praeter cubum 8 alius ne in fractis quidem datur, qui cum unitate faciat quadratum. Q. E. D.

Leonhardi Euleri: Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes, in *COMMENTATIONES ARITHMETICAE*, Volumen I, Ed. Ferdinand Rudio, Lipsiae et Berolini, B.G. Teubner, MCMXV.