COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, accompagnandole con *spiegazioni chiare ed essenziali.* NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Sia P l'insieme dei numeri primi ≤ 17. Per $p, q \in P$ definiamo $p \leq q$ quando ogni cifra binaria di p è minore o uguale alla cifra corrispondente di q.
   (a) Dimostrare che si tratta di un ordinamento parziale.
   (b) Determinare gli elementi minimali e massimali di P; determinare $\inf(3, 11)$ e $\sup(2, 5)$.

Abbiamo che $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$. In notazione binaria (base 2) l'insieme P è quindi uguale a $\{10, 11, 101, 111, 1011, 1101, 10001\}$. Gli elementi minimali sono 2, 5 e 17. Gli elementi massimali sono 7, 11, 13 e 17. Abbiamo che $\inf(3, 11) = 3$, mentre $\sup(2, 5) = 7$.

2. Determinare quanti sono i numeri $0 \leq n < 2000$ le cui cifre hanno somma uguale a 9.

Ogni numero con questa proprietà ha tre cifre o ha la prima cifra uguale a 1. Ci sono $\binom{9+3-1}{9} = \binom{11}{2}$ numeri del primo tipo e $\binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{2}$ del secondo. Ci sono quindi $\binom{11}{2} + \binom{10}{2} = 100$ numeri con la proprietà richiesta.

3. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$. Determinare la chiusura transitiva della relazione R che consiste nelle coppie (a, b), (a, e), (b, c), (c, d), (d, b).

La matrice A associata alla relazione e le sue "potenze" $A^{[2]}$ e $A^{[3]}$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome le matrici $A^{[4]}$ e $A^{[5]}$ contengono solo ripetizioni, la chiusura transitiva di R è l'unione di R e l'insieme $\{(a, c), (b, d), (c, b), (d, c), (a, d), (b, b), (c, c), (d, d)\}$.

4. Siano x, y variabili booleane. L'operatore NAND è definito da x NAND $y = \overline{(xy)}$. Usando solo porte NAND costruire un circuito con input x e y e output $\overline{x}$ e $x + y$.

Abbiamo che $\overline{x} = x \,\mathrm{NAND}\, x$ e $xy = \overline{\overline{(xy)}} = \overline{(xy)} \,\mathrm{NAND}\, \overline{(xy)} = (x \,\mathrm{NAND}\, y) \,\mathrm{NAND}\, (x \,\mathrm{NAND}\, y)$.

5. I grafi.

Il grafo "cubo" Q_3 è bipartito. Nelle altre versioni del compito, i due grafi sono sempre isomorfi, eccetto nel caso dei due grafi "ottagonali". Essi non sono isomorfi perché un grafo contiene un vertice di grado 2 con due vertici vicini di grado 3, ma l'altro no.