1. *(coppie di punti armonici)* Sia l una retta e siano A, B, C e D quattro punti su l. Supponiamo che il birapporto $(ABCD)$ sia uguale a -1. Dimostrare che i birapporti $(ABDC)$, $(BACD)$, $(BADC)$, $(CDAB)$, $(CDBA)$, $(DCAB)$ e $(DCBA)$ sono tutti uguali a -1. Concludere che la proprietà "avere birapporto -1" dipende solo dalle due coppie A, B e C, D e non dall'ordine dei punti. Due coppie di punti A, B e C, D si dicono *armonici* se $(ABCD) = -1$.

2. Siano A, B, C, D i vertici di un quadranoglo in $\mathbf{P}^2$. Sia Q il punto di intersezione delle due diagonali, sia P il punto di intersezione dei lati AB e CD e sia R il punto di intersezione dei lati AD e BC. Sia S il punto di intereszione di PQ e AD. Calcolare il birapporto $(ADSR)$ (Sugg. Scegliere coordinate tali che $A = (0:0:1)$, $B = (0:1:0)$, $C = (1:0:0)$ e $D = (1:1:1)$).

3. Siano $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ e $C_1C_2C_3$ tre triangoli in $\mathbf{P}^2$ tali che i vertici A_1, B_1, C_1 stanno su una retta , i vertici A_2, B_2, C_2 stanno su una retta e i vertici A_3, B_3, C_3 stanno su una retta. Applicando il Teorema di Desargues ai triangoli $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$ vediamo che i punti di intersezione dei lati corrispondenti ($A_1A_2 \cap B_1B_2$, $A_1A_3 \cap B_1B_3$ e $A_2A_3 \cap B_2B_3$) stanno su una retta l_{AB}. Similmente c'è una retta l_{BC} per i triangoli $B_1B_2B_3$ e $C_1C_2C_3$ e c'è una retta per i triangoli $A_1A_2A_3$ e $C_1C_2C_3$.
   Dimostrare che le tre rette l_{AB}, l_{BC} e l_{AC} passano per un stesso punto.

4. *(Dimostrazione alternativa del Teorema di Desargues)* Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli in $\mathbf{P}^2$ con la proprietà che le rette AA', BB' e CC' passano per un punto P. Scegliamo coordinate tali che $A = (1:0:0)$, $B = (0:1:0)$, $C = (0:0:1)$ e $P = (1:1:1)$.
   (i) Calcolare equazioni per le rette AA', BB' e CC'.
   (ii) Far vedere che $A' = (a:1:1)$, $B' = (1:b:1)$ e $C' = (1:1:c)$ per certi $a, b, c \in \mathbf{R}$.
   (iii) Far vedere che i punti di intersezione $P = AB \cap A'B'$, $Q = BC \cap B'C'$ e $R = AC \cap A'C'$ sono rispettivamente $(a-1:1-b:0)$, $(1-a:0:c-1)$ e $(0:b-1:1-c)$.
   (iv) Calcolare un'equazione della retta che passa per P, Q ed R.