1. Dimostrare che per cinque punti in $\mathbf{P}^2$ passa sempre una conica. Fa vedere che la conica è unica e non degenere quando non ci sono terne di punti allineati. (Sugg. Scegliere coordinate in cui i punti sono $(0:0:1)$, $(0:1:0)$, $\ldots$)

2. (*Lezione del 21 Giugno*) Sia X la conica di equazione $z^2 - xy = 0$ e siano $P = (1:0:0)$ e $Q = (0:1:0)$ due punti su X.
   (i) Far vedere che il fascio $\mathcal{F}_P$ delle rette che passano per P è dato da $\{\lambda y + \mu z = 0\colon\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$. Similmente il fascio $\mathcal{F}_Q$ delle rette che passano per Q è dato da $\{\rho x + \sigma z = 0\colon\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$.
   (ii) Far vedere che la mappa proiettiva $\varphi : F_P \longrightarrow \mathcal{F}_Q$ che manda una retta $a \in \mathcal{F}_P$ di equazione $\lambda y + \mu z = 0$ nella retta $\varphi(a) \in \mathcal{F}_Q$ di equazione $\mu x + \lambda z = 0$ ha la proprietà che i punti di intersezione $a \cap \varphi(a)$ sono esattamente i punti della conica X .
   (iii) Sia $t_P \in \mathcal{F}_P$ la retta tangente di X al punto P e sia $t_Q \in \mathcal{F}_Q$ la retta tangente di X al punto Q. Dimostrare che la mappa φ della parte (ii) soddisfa $\varphi(t_P) = PQ$ e $\varphi(PQ) = t_Q$.

3. Dati cinque punti distinti A, B, C, D e E in $\mathbf{P}^2$ e data una retta l che passa per A, costruire l'altro punto di intersezione della retta l con la conica X che passa per i punti A, B, C, D e E (senza mai disegnare la conica).

3. (*Teorema di Pascal per cinque punti)* Siano A, B, C, D, E cinque punti su una conica X non degenere in $\mathbf{P}^2$. Sia t la retta tangente di X nel punto A. Far vedere che i punti di intersezione $P = t \cap CD$, $Q = AB \cap DE$ e $R = BC \cap EA$ stanno su una retta (Sugg. Considerare l'esagono "degenere" $AABCDE$; nella dimostrazione del Teorema di Pascal usuale, usare la tangente di X in A al posto della lato "AA"; usare l'Eserc. 2)

4. Dati cinque punti distinti A, B, C, D e E in $\mathbf{P}^2$, costruire la tangente nel punto A alla conica X che passa per i punti A, B, C, D e E (senza mai disegnare la conica). (Sugg. Usare l'Eserc.2)

5. (*Teorema di Pascal per quattro punti)* Siano A, B, C, D quattro punti su una conica X non degenere in $\mathbf{P}^2$. Sia t la retta tangente ad X nel punto A.
   (i) Sia s la retta tangente ad X nel punto B. Dimostrare che i punti di intersezione $P = t \cap BC$, $Q = AB \cap CD$ e $R = s \cap AD$ stanno su una retta. (Sugg. Considerare l'esagono degenere $AABBCD$; nella dimostrazione del Teorema di Pascal usuale, usare le tangenti ad X in A e B al posto delle rette "AA" e "BB"; usare l'Eserc. 2)
   (ii) Sia s la retta tangente di X nel punto C. Dimostrare che i punti di intersezione $P = t \cap s$, $Q = AB \cap CD$, $R = BC \cap AD$. stanno su una retta. (Sugg. Considerare l'esagono degenerato $AABCCD$; nella dimostrazione del Teorema di Pascal usuale usare i tangenti di X in A e C nel posto delle rette "AA" e "CC"; usare l'Eserc. 2)

6. (*Teorema di Pascal per tre punti)* Sia ABC un triangolo con i vertici su una conica X non degenere in $\mathbf{P}^2$. Siano t_A, t_B e t_C le rette tangenti ad X nei punti A, B e C.
   (i) Far vedere che per una scelta opportuna di coordinate abbiamo che $A = (0:0:1)$, $B = (0:1:0)$ e $t_A \cap t_B = (1:0:0)$ e $C = (1:1:1)$.
   (ii) Far vedere che in termini delle coordinate della parte (i), la conica ha equazione $x^2 - yz = 0$.
   (iii) Dimostrare che i punti di intersezione $P = t_A \cap BC$, $Q = t_B \cap AC$ e $t_C \cap AB$ stanno su una retta.

7. Dati quattro punti distinti A, B, C, D ad una conica X in $\mathbf{P}^2$ e data la retta tangente di X nel punto A, costruire le rette tangenti ad X nei punti B, C e D (senza mai disegnare la conica).