1. Dimostrare che per cinque punti in $\mathbf{P}^2$ passa sempre una conica. Fa vedere che la conica è unica e non degenere quando non ci sono terne di punti allineati. (Sugg. Scegliere coordinate in cui i punti sono $(0:0:1)$, $(0:1:0)$, ...)

2. (*Lezione del 21 Giugno*) Sia $X$ la conica di equazione $z^2 - xy = 0$ e siano $P = (1:0:0)$ e $Q = (0:1:0)$ due punti su $X$.
   (i) Far vedere che il fascio $\mathcal{F}_P$ delle rette che passano per $P$ è dato da $\{\lambda y + \mu z = 0\colon\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$. Similmente il fascio $\mathcal{F}_Q$ delle rette che passano per $Q$ è dato da $\{\rho x + \sigma z = 0\colon\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$.
   (ii) Far vedere che la mappa proiettiva $\varphi : F_P \longrightarrow \mathcal{F}_Q$ che manda una retta $a \in \mathcal{F}_P$ di equazione $\lambda y + \mu z = 0$ nella retta $\varphi(a) \in \mathcal{F}_Q$ di equazione $\mu x + \lambda z = 0$ ha la proprietà che i punti di intersezione $a \cap \varphi(a)$ sono esattamente i punti della conica $X$ .
   (iii) Sia $t_P \in \mathcal{F}_P$ la retta tangente di $X$ al punto $P$ e sia $t_Q \in \mathcal{F}_Q$ la retta tangente di $X$ al punto $Q$. Dimostrare che la mappa $\varphi$ della parte (ii) soddisfa $\varphi(t_P) = PQ$ e $\varphi(PQ) = t_Q$.

3. Dati cinque punti distinti $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$ in $\mathbf{P}^2$ e data una retta $l$ che passa per $A$, costruire l'altro punto di intersezione della retta $l$ con la conica $X$ che passa per i punti $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$ (senza mai disegnare la conica).

3. (*Teorema di Pascal per cinque punti*) Siano $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ cinque punti su una conica $X$ non degenere in $\mathbf{P}^2$. Sia $t$ la retta tangente di $X$ nel punto $A$. Far vedere che i punti di intersezione $P = t \cap CD$, $Q = AB \cap DE$ e $R = BC \cap EA$ stanno su una retta (Sugg. Considerare l'esagono "degenere" $AABCDE$; nella dimostrazione del Teorema di Pascal usuale, usare la tangente di $X$ in $A$ al posto della lato "$AA$"; usare l'Eserc. 2)

4. Dati cinque punti distinti $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$ in $\mathbf{P}^2$, costruire la tangente nel punto $A$ alla conica $X$ che passa per i punti $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$ (senza mai disegnare la conica). (Sugg. Usare l'Eserc.2)

5. (*Teorema di Pascal per quattro punti*) Siano $A$, $B$, $C$, $D$ quattro punti su una conica $X$ non degenere in $\mathbf{P}^2$. Sia $t$ la retta tangente ad $X$ nel punto $A$.
   (i) Sia $s$ la retta tangente ad $X$ nel punto $B$. Dimostrare che i punti di intersezione $P = t \cap BC$, $Q = AB \cap CD$ e $R = s \cap AD$ stanno su una retta. (Sugg. Considerare l'esagono degenere $AABBCD$; nella dimostrazione del Teorema di Pascal usuale, usare le tangenti ad $X$ in $A$ e $B$ al posto delle rette "$AA$" e "$BB$"; usare l'Eserc. 2)
   (ii) Sia $s$ la retta tangente di $X$ nel punto $C$. Dimostrare che i punti di intersezione $P = t \cap s$, $Q = AB \cap CD$, $R = BC \cap AD$. stanno su una retta. (Sugg. Considerare l'esagono degenerato $AABCCD$; nella dimostrazione del Teorema di Pascal usuale usare i tangenti di $X$ in $A$ e $C$ nel posto delle rette "$AA$" e "$CC$"; usare l'Eserc. 2)

6. (*Teorema di Pascal per tre punti*) Sia $ABC$ un triangolo con i vertici su una conica $X$ non degenere in $\mathbf{P}^2$. Siano $t_A$, $t_B$ e $t_C$ le rette tangenti ad $X$ nei punti $A$, $B$ e $C$.
   (i) Far vedere che per una scelta opportuna di coordinate abbiamo che $A = (0:0:1)$, $B = (0:1:0)$ e $t_A \cap t_B = (1:0:0)$ e $C = (1:1:1)$.
   (ii) Far vedere che in termini delle coordinate della parte (i), la conica ha equazione $x^2 - yz = 0$.
   (iii) Dimostrare che i punti di intersezione $P = t_A \cap BC$, $Q = t_B \cap AC$ e $t_C \cap AB$ stanno su una retta.

7. Dati quattro punti distinti $A$, $B$, $C$, $D$ ad una conica $X$ in $\mathbf{P}^2$ e data la retta tangente di $X$ nel punto $A$, costruire le rette tangenti ad $X$ nei punti $B$, $C$ e $D$ (senza mai disegnare la conica).