1. Disegnare le seguenti coniche:
   (i) $X^2 + Y^2 + XY + X + Y = 1$;
   (ii) $5X^2 - 26XY + 5Y^2 + 72 = 0$;
   (iii) $X^2 + Y^2 - 2XY - 2Y = 0$;
   (iv) $3X^2 - 8XY - 3Y^2 + 10 = 0$;
   (v) $2Y^2 + 2\sqrt{3}XY - 2\sqrt{3}X + 2Y = 5$;
   (vi) $9X^2 + 16Y^2 + 24XY - 40X + 30Y = 0$;
   (vii) $3X^2 + 2XY + 3Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y = 0$;
   (viii) $2X^2 + 4XY + 5Y^2 - 12 = 0$.

2. Portare le seguenti quadriche in forma "canonica metrica" mediante una isometria.
   (i) $4Z^2 + 2X + 3Y + 8Z = 0$;
   (ii) $3X^2 + 6Y^2 + 2Z^2 + 12X + 12Y + 12Z + 42 = 0$;
   (iii) $-3X^2 + 3Y^2 - 12XZ + 12YZ + 4X + 4Y - 2Z = 0$;
   (iv) $7X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 - 20XY + 4XZ - 16YZ + 6X + 3Y - 6Z = 0$;
   (v) $40X^2 + 13Y^2 + 45Z^2 + 36XY - 12XZ + 24YZ + 15X - 30Y + 10Z + 7 = 0$.

3. Sia C la conica data dall'equazione $Y^2 = X$.
   (i) Determinare l'equazione della conica dopo la traslazione di passo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sia C' la conica traslata. Far vedere che il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene a C'.
   (ii) Determinare l'equazione della conica C' dopo una rotazione di 60 gradi intorne all'origine. Far vedere che l'immagine del punto P è $\begin{pmatrix} 1/2 - \sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix}$.

4. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ determinare il tipo della quadrica:
   (i) $X^2 + tXY + Y^2 + Z^2 + 2X - 2Y = 0$;
   (ii) $X^2 + tXY + Y^2 - 4YZ + Z^2 + 2X - 4Z = 0$;
   (iii) $X^2 + Y^2 - Z^2 - 2X - 2Y - 2Z = tXY$.

5. Sia $a \in \mathbf{R}_{>0}$ e sia C la parabola data da $Y = aX^2$ e sia $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2a} \end{pmatrix}$ il "fuoco" di C.
   (i) Calcolare l'equazione della retta passante per F e un punto $P = (x, ax^2)$ su C.
   (ii) Adesso vediamo la retta come "un raggio di luce" uscente da F. Calcolare l'equazione del "raggio riflesso" sulla parabola. Far vedere che per ogni punto P il "raggio riflesso" è una retta verticale.

6. (i) Far vedere che i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ appartengono all'iperbole data da $Y^2 - 7X^2 = 1$. Trovare altri punti sull'iperbole con coordinate intere.
   (ii) Trovare punti $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ con coordinate intere e positive sull'iperbole
$$Y^2 - 19X^2 = 1.$$