Versione preliminare
27 settembre 1999

TOR VERGATA

II Università degli
Studi di Roma

Dispense di Geometria. Capitolo 1.

1. Geometria di $\mathbf{R}^2$.

In questo paragrafo discutiamo le proprietà geometriche elementari del piano. Per avere a disposizione delle *coordinate* nel piano, fissiamo un punto $\mathbf{0}$, che chiamiamo *l'origine.* Scegliamo poi due rette perpendicolari che si incontrano in $\mathbf{0}$: una retta come asse delle ascisse e l'altra come asse delle ordinate. Fissiamo su di esse un verso ed un'unità di misura. Adesso possiamo introdurre le coordinate nel solito modo: ad un arbitrario punto P del piano associamo un coppia di numeri reali $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, ove x_1 indica la proiezione di P sull'asse delle ascisse e x_2 la proiezione di P sull'asse delle ordinate.

Fig.1 Il piano $\mathbf{R}^2$.

Le coordinate x_1 e x_2 individuano il punto P in modo unico, così possiamo *identificare* i punti P del piano con le coppie $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Per esempio, i punti sull'asse delle ascisse sono quelli che soddisfano l'equazione $x_2 = 0$, mentre i punti sull'asse delle ordinate sono quelli che soddisfano l'equazione $x_1 = 0$. L'origine $\mathbf{0}$ è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'insieme delle coppie ordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ si chiama piano cartesiano e si indica con $\mathbf{R}^2$:

$$\mathbf{R}^2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbf{R} \}.$$

In seguito, indicheremo con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ anche il *vettore* $\mathbf{x}$ uscente dall'origine e di estremo il punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Per *vettore* si intende un segmento orientato, di cui un estremo rappresenta l'inizio e l'altro la fine. Un vettore può essere raffigurato mediante una freccia. Il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, di lunghezza zero, si chiama *vettore nullo.*

Fig.2 Il vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Sarà chiaro dal contesto se $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ andrà visto come un punto del piano o come un vettore uscente da $\mathbf{0}$ di estremo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Per semplicità di notazione, scriveremo spesso $\mathbf{x}$ sottointendendo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, e similmente $\mathbf{y}$ per $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, etc ... I numeri reali λ verranno anche chiamati *scalari,* per distinguerli dagli "oggetti vettoriali".

Definizione. Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due vettori in $\mathbf{R}^2$. Allora la *somma* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore dato da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Il *vettore opposto* del vettore $\mathbf{x}$ è il vettore

$$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

La *differenza* $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ dei vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$.

Definizione. Per $\lambda \in \mathbf{R}$, il *prodotto* di $\mathbf{x}$ per λ è il vettore dato da

$$\lambda\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda > 0$, il vettore $\lambda\mathbf{x}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\mathbf{x}$; se $\lambda < 0$, il vettore $\lambda\mathbf{x}$ ha la stessa direzione ma verso opposto a quello di $\mathbf{x}$. Se infine $\lambda = 0$, allora $\lambda\mathbf{x}$ è il *vettore nullo* $\mathbf{0}$.

La somma di due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ha un'interpretazione geometrica: traslando il vettore $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ fino a farlo uscire dall'estremo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{x}$, si ha che il vettore risultante ha come secondo estremo il punto di coordinate $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$.

Fig.3 La somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Questo procedimento per trovare la somma di due vettori si chiama *regola del parallelogramma:* infatti, il vettore somma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ coincide con la diagonale del parallelogramma costruito sui vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Fig.4 La regola del parallelogramma.

Similmente, la differenza di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ si trova traslando il vettore $-\mathbf{y}$ fino a farlo uscire dall'estremo $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{x}$. Nota che il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è parallelo al segmento congiungente $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ed ha la sua stessa lunghezza.

Fig.5 La differenza $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

La somma fra vettori e la moltiplicazione dei vettori per gli scalari godono delle seguenti proprietà:

Proposizione 1.1.
(i) (Proprietà associativa della somma) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z});$$

(ii) (Proprietà commutativa) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$$

(iii) (Proprietà associativa del prodotto) Per ogni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x};$$

(iv) (Proprietà distributiva) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},$$
$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}.$$

Dimostrazione. Queste proprietà sono semplici conseguenze delle analoghe proprietà dei numeri reali.

Definizione. (*Prodotto scalare.*) Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^2$ il *prodotto scalare* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ è il numero reale dato da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Il prodotto scalare è molto importante nello studio della geometria del piano $\mathbf{R}^2$. Esso gode delle seguenti proprietà

Proposizione 1.2.
(i) (Proprietà commutativa) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x};$$

(ii) (Proprietà distributiva) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z};$$

(iii) (Omogeneità) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ *ed ogni* $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y});$$

(iv) (Positività) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \\ &\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \textit{se e soltanto se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Il punto *(i)* segue da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Il punto *(ii)* segue da

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) = \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 z_1 + x_2 z_2 = \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Confrontando le quantità

$$\begin{aligned} &\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \lambda(x_1 y_1 + x_2 y_2) = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2, \\ &(\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (\lambda x_1) y_1 + (\lambda x_2) y_2 = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2, \\ &\mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y}) = x_1(\lambda y_1) + x_2(\lambda y_2) = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2, \end{aligned}$$

otteniamo *(iii)*. Per dimostrare *(iv)*, osserviamo che

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2.$$

Poiché i quadrati di numeri reali sono sempre non negativi, si ha che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$. Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, chiaramente $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$. Viceversa, se per un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ vale $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, allora $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Ciò è possibile solo se $x_1 = x_2 = 0$ e la dimostrazione della proposizione è completa.

Definizione. La norma $\|\mathbf{x}\|$ di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ è definita da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Per il Teorema di Pitagora, la norma del vettore $\mathbf{x}$ è uguale alla lunghezza del segmento congiungente i suoi estremi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Equivalentemente, la norma di $\mathbf{x}$ è la distanza del punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dall'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Fig.6 Il Teorema di Pitagora.

Analogamente, dalla Fig.5 vediamo che $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ è la distanza fra i punti $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Usando la norma, diamo un'interpretazione geometrica del prodotto scalare fra vettori (per le definizioni di *seno* e *coseno* si veda l'Eserc. 1.B).

Proposizione 1.3. *Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due vettori in $\mathbf{R}^2$.*
(i) Allora

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\cos\varphi,$$

dove φ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(ii) I vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono perpendicolari se e soltanto se $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$.

Dimostrazione. Consideriamo il triangolo di vertici i punti $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Fig.7 La regola del coseno.

Dalla Fig.5, vediamo che i lati del triangolo hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Applicando la regola del coseno (vedi Eserc.1.C), troviamo

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|\cos\varphi.$$

Dalla definizione stessa della norma abbiamo

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos\varphi$$

e quindi

$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 = -2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos\varphi$$

come richiesto. Per la parte *(ii)*, osserviamo che $\cos\varphi = 0$ se e soltanto se $\varphi = \pm\pi/2$, cioè se e soltanto se φ è un angolo retto.

Corollario 1.4. *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vettori in* $\mathbf{R}^2$. *Allora*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Dimostrazione. Questo segue dal fatto che $|\cos\varphi| \leq 1$. (Vedi l'Eserc.1.B).

Proposizione 1.5. *Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vettori in* $\mathbf{R}^2$. *Allora*

(i) (Disugualianza triangolare)

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|;$$

(ii) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Dimostrazione. Diamo due dimostrazioni del punto *(i)*. La prima è geometrica e la seconda è algebrica. Dalla Fig.3 segue che il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ha lati di lunghezza $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ rispettivamente. È chiaro che la somma delle lunghezze di due qualunque dei lati di un triangolo è maggiore o uguale della lunghezza del terzo lato: se non fosse così, il triangolo non si "chiuderebbe". In particolare

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

come richiesto. La seconda dimostrazione usa la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz del Cor.1.4. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

Poiché $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ sono numeri non negativi, possiamo estrarne le radici quadrate e ottenere la disuguaglianza triangolare.

Per la parte *(ii)*, calcoliamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\|^2 = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 = \lambda^2(x_1^2 + x_2^2) = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2.$$

Estraendo la radici quadrate, troviamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

come richiesto.

Come applicazione del prodotto scalare, determiniamo adesso la *proiezione ortogonale* di un vettore $\mathbf{x}$ su una retta l, passante per $\mathbf{0}$ e per un vettore non nullo $\mathbf{y}$.

Fig.8 La proiezione su l.

Proposizione 1.6. *Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vettori in* $\mathbf{R}^2$. *Supponiamo che* $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. *La proiezione ortogonale* $\pi(\mathbf{x})$ *di* $\mathbf{x}$ *sulla retta passante per* $\mathbf{0}$ *e* $\mathbf{y}$ *è un multiplo* $c\mathbf{y}$ *di* $\mathbf{y}$. *Il valore dello scalare* $c \in \mathbf{R}$ *è*

$$c \;=\; \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|}\cos\varphi \;=\; \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}.$$

Dimostrazione. Poiché la proiezione è ortogonale, abbiamo che

$$(\pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Con la sostituzione $\pi(\mathbf{x}) = c\mathbf{y}$, troviamo

$$0 = (\pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (c\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = c\|\mathbf{y}\|^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

da cui $c = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})/\|\mathbf{y}\|^2$ come richiesto. Poiché $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi$, la costante c è anche uguale a $c = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi/\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|/\|\mathbf{y}\| \cdot \cos\varphi$. Questo conclude la dimostrazione della proposizione.

Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, calcoliamo infine l'*area del triangolo* di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Fig.9. Il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Proposizione 1.7. *L'area del triangolo di vertici* $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *è data da*

$$\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|.$$

Dimostrazione. Sia A l'area del triangolo. Poiché l'altezza del triangolo è uguale a $\|\mathbf{y}\| \operatorname{sen} \varphi$, l'area è dunque uguale a

$$A = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \operatorname{sen} \varphi.$$

Allora

$$\begin{aligned}
(2A)^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 - (\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \varphi)^2 \\
&= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)^2.
\end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate troviamo

$$2A = |x_1y_2 - x_2y_1|$$

come richiesto.

Osserviamo che l'espressione $2A = |x_1y_2 - x_2y_1|$ è uguale all'area del paralellogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Fig.10. Il paralellogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Osserviamo infine che l'espressione $x_1y_2 - x_2y_1$ è uguale al *determinante* della matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.

Esercizi.

(1.A) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- (i) Calcolare e disegnare i vettori $\mathbf{x}$, $2\mathbf{x}$, $-\mathbf{x}$, $0\mathbf{x}$.
- (ii) Calcolare e disegnare i vettori $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $3\mathbf{y}$, $-\mathbf{x}$ e $3\mathbf{x} - \mathbf{y}$.
- (iii) Calcolare $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ e $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

(1.B) (*Trigonometria elementare*) Sia $\varphi \in \mathbf{R}$ un angolo. Il *seno* ed il *coseno* di φ sono, per definizione, le coordinate del vettore $\mathbf{x}$ di norma $\|\mathbf{x}\| = 1$, che forma un angolo φ con l'asse delle ascisse positive.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}.$$

Fig.11 Seno e coseno.

(i) Dimostrare che $|\operatorname{sen}\varphi| \leq 1$ e $|\cos\varphi| \leq 1$.
(ii) Dimostrare che $\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1$.

(1.C) (*La regola del coseno*) Sia ABC un triangolo con lati di lunghezza a, b c ed angoli α, β e γ. Sia Q la proiezione ortogonale di C sul lato AB.

Fig.12 La regola del coseno.

(i) Far vedere che $|CQ| = b \operatorname{sen}\alpha$ e $|AQ| = b\cos\alpha$.
(ii) Applicare il Teorema di Pitagora al triangolo CQB e dedurre la relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

(1.D) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(ii) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori $\mathbf{x}$ e $-\mathbf{y}$.
(iii) Calcolare il coseno dell'angolo φ fra i vettori $\mathbf{x}$ e $-2\mathbf{y}$.

(1.E) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Trovare un vettore $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ tale che l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sia uguale a $\pi/3$.

(1.F) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(ii) Calcolare l'area del paralellogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.
(iii) Calcolare l'area del paralellogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $-\mathbf{y}$ e $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

(1.G) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(1.H) Trovare $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ non nulli tali che

(i) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

(ii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 0$.

(iii) $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$.

(1.I) Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ e sia $\mathbf{p}$ il vettore

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)/2 \\ (x_2 + y_2)/2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare la distanza $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ di $\mathbf{p}$ da $\mathbf{x}$ e la distanza $\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\|$ di $\mathbf{p}$ da $\mathbf{y}$.

(ii) Calcolare la distanza $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Far vedere che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

(iii) Dedurre che $\mathbf{p}$ è il punto medio fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(1.J) Sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \operatorname{sen}\psi \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

(ii) Dimostrare che

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi.$$

(1.K) Dimostrare che

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi, \\ \operatorname{sen}(\varphi - \psi) &= \operatorname{sen}\varphi\cos\psi - \cos\varphi\operatorname{sen}\psi, \\ \sin(\varphi + \psi) &= \operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\operatorname{sen}\psi. \end{aligned}$$

(Suggerimento: usare l'Eserc.2.A).

(1.L) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 55 \\ 89 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 144 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(ii) Trovare $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$ con $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 > 1000$ tali che il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ abbia area 1.

(1.M) Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ un vettore non nullo. Dimostrare che $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ è un vettore di norma 1.

2. Rette in $\mathbf{R}^2$; circonferenze.

In questo paragrafo studiamo le rette e le circonferenze in $\mathbf{R}^2$. Ci sono due modi per descrivere una retta in $\mathbf{R}^2$: mediante una *equazione cartesiana* oppure mediante una *equazione parametrica.*

Una *equazione cartesiana* di una retta ha la forma

$$ax_1 + bx_2 + c = 0,$$

dove $a, b, c \in \mathbf{R}$ ed a, b non sono entrambi nulli. La retta consiste nei punti $\mathbf{x}$ le cui coordinate soddisfano l'equazione suddetta. Per esempio, per $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$ abbiamo la retta

$$r: \quad 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0.$$

Fig.13 La retta $r:\ 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$.

Per ogni $x_1 \in \mathbf{R}$, c'è un unico punto $\mathbf{x}$ sulla retta r con la prima coordinata uguale a x_1. L'altra coordinata di $\mathbf{x}$ è data da $x_2 = (2x_1 + 1)/3$. Per esempio, i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ stanno tutti sulla retta r. Nota bene che due equazioni distinte possono descrivere la stessa retta: per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ non nullo, le equazioni

$$ax_1 + bx_2 + c = 0 \quad \text{e} \quad \lambda a x_1 + \lambda b x_2 + \lambda c = 0$$

descrivono la stessa retta. Sia l'equazione $20x_1 - 30x_2 + 10 = 0$ che l'equazione $2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$ descrivono la retta r.

Una *equazione parametrica* di una retta ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + tv_1 \\ p_2 + tv_2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

ove $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ è un punto sulla retta e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ è un vettore parallelo alla retta.

Al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$, il punto $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ varia fra tutti i punti della retta; il punto $\mathbf{p}$ corrisponde a $t = 0$. Per $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ troviamo ad esempio la retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

Fig.14 La retta $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Assegnando al parametro $t \in \mathbf{R}$ i valori $t = 0$, $t = 1$ e $t = -1/3$ troviamo rispettivamente i punti di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che due equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \ t \in \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \mathbf{p}' + s\mathbf{v}', \ s \in \mathbf{R}$$

descrivono la stessa retta l, ogni volta che $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ sono punti di l ed i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ sono paralleli ad l. Ciò accade precisamente quando $\mathbf{v}' = \lambda\mathbf{v}$ per qualche $\lambda \in \mathbf{R}$, non nullo. Per esempio, le equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}$$

descrivono la retta r.

Definizione. Un vettore *normale* ad una retta è un vettore $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ che è perpendicolare alla retta.

Fig.15 La retta $r: \ 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$; un vettore normale ad r.

Proposizione 2.1. *Sia l la retta di equazione cartesiana*

$$ax_1 + bx_2 = c.$$

Allora, il vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *è un vettore normale ad l.*

Dimostrazione. Notiamo che $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ non è zero perchè a, b non sono entrambi nulli. Verifichiamo che $\mathbf{n}$ è perpendicolare alla retta. Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due punti distinti della retta. Allora il vettore $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ è parallelo alla retta.

Fig.16 Il vettore $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ è parallelo alla retta.

Calcolando il prodotto scalare $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}$, troviamo

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (x_1 - y_1)a + (x_2 - y_2)b \\ &= (ax_1 + bx_2) - (ay_1 + by_2) = c - c = 0.\end{aligned}$$

Dunque la retta l ed il vettore $\mathbf{n}$ sono perpendicolari, come richiesto.

Dalla proposizione segue in particolare che il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ è parallelo alla retta l.

Negli esempi che seguono, applichiamo i concetti fin qui esposti alla risoluzione di alcuni problemi geometrici nel piano.

Esempio 2.2. (*La retta per due punti distinti*) Siano dati due punti distinti $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ in $\mathbf{R}^2$. Come calcolare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana della retta l passante per $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$? Per ottenere un'equazione parametrica di l, basta trovare un punto $\mathbf{p}$ su l e un vettore $\mathbf{v}$ parallelo ad l. Ad esempio, dati i punti

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

prendiamo

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo così l'equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per trovare un'equazione cartesiana della retta l, determinamo $a,\ b,\ c$ in modo che l'equazione $ax_1 + bx_2 = c$ sia soddisfatta dai punti dati. Nel caso in questione, dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a + 2b = c \\ -2a + 4b = c. \end{cases}$$

Troviamo $a = c/4$ e $b = 3c/8$, ed un'equazione cartesiana di l è per esempio

$$2x_1 + 3x_2 = 8.$$

Osservazione. Possiamo anche ricavare un'equazione cartesiana di l a partire da quella parametrica, eliminando t dalle due equazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 3t, \\ y_1 &= 2 - 2t. \end{aligned}$$

In questo modo, troviamo $t = (x_1 - 1)/3 = (y_1 - 2)/(-2)$ e quindi $2x_1 + 3y_1 - 8 = 0$.

Osservazione. Per passare da un'equazione cartesiana ad un'equazione parametrica di una data retta, basta scegliere due punti distinti sulla retta e fare il calcolo dell'Esempio 2.2.

Date due rette in $\mathbf{R}^2$ ci sono tre possibilità: le rette si intersecano in un punto, sono parallele oppure coincidono. Per determinare quale situazione si verifichi, ci si riduce sempre a studiare un sistema di equazioni lineari. Se il sistema non ha soluzioni, le due rette sono parallele; se ha un'unica soluzione, le due rette si intersecano in un unico punto e se il sistema ammette infinite soluzioni, le due rette coincidono.

Esempio 2.3. (*Intersezioni fra rette*)

1. Siano l e m due rette di equazioni cartesiane

$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0, \qquad 4x_1 - 6x_2 = 0.$$

   Per trovarne l'intersezione risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 &= -1 \\ 4x_1 - 6x_2 &= 0. \end{cases}$$

   Vediamo che 2 volte la prima equazione meno la seconda ci da $2(2x_1 - 3x_2) - (4x_1 - 6x_2) = 2 \cdot -1 - 0$, cioè $0 = -1$. Siccome questo è assurdo, il sistema non ha soluzioni e le due rette sono parallele.
2. Siano l e m due rette di equazioni

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbf{R}.$$

   Per calcolarne l'intersezione, imponiamo ad un generico punto $\mathbf{x}$ di appartenere sia ad l che a m; cerchiamo dunque t ed s tali che

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s \\ 1 - 2s \end{pmatrix}.$$

Questo ci dà un sistema di due equazioni nelle due incognite t ed s

$$\begin{cases} 3s & =1 \\ t+2s & =\text{-}1. \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'unica soluzione è data da $t = -5/3$ ed $s = 1/3$, corrispondente al punto in comune $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

3. Sia l la retta di equazione cartesiana $x_1 - 3x_2 + 2 = 0$ e sia m la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per trovare l'intersezione fra l ed m, sostituiamo il generico punto di m, di coordinate $x_1 = 1+3t$ e $x_2 = 1 + t$ nell'equazione di l. Troviamo $(1 + 3t) - 3(1 + t) + 2 = 0$, cioè $0 = 0$. Questa equazione è dunque soddisfatta per *ogni* valore di t. In altre parole, tutti i punti di m soddisfano l'equazione di l e le due rette coincidono.

Esempio 2.4. (*Rette ortogonali*) Data una retta l e un punto $\mathbf{q}$, come calcolare un'equazione della retta m perpendicolare a l e passante per $\mathbf{q}$? Per avere un'equazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ di m, abbiamo bisogno di un punto $\mathbf{p}$ su m e di un vettore parallelo ad m. Poiché m deve passare per $\mathbf{q}$, possiamo prendere $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ e, poiché m deve essere perpendicolare ad l, il vettore $\mathbf{v}$ deve essere perpendicolare ad m.

Ad esempio, sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e sia $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. In questo caso, prendiamo $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ per $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, che è ortogonale a $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e ad l. Un'equazione parametrica per la retta m è dunque

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Fig.17 La retta per $\mathbf{q}$ perpendicolare ad l.

Osservazione. Se nell'Esempio 2.4 la retta l fosse stata in forma cartesiana $ax_1 + bx_2 + c = 0$, sarebbe stato ancora più facile trovare un vettore $\mathbf{v}$ normale ad l: per la Prop.2.1, avremmo potuto prendere direttamente $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Esempio 2.5. (*Distanza di un punto da una retta*) Dati una retta l e un punto $\mathbf{q}$, come calcolare la distanza di $\mathbf{q}$ da l? Per trovare la distanza fra $\mathbf{q}$ ed l, calcoliamo la proiezione $\mathbf{q}'$ del punto $\mathbf{q}$ su l. Il punto $\mathbf{q}'$ non è altro che l'intersezione di l con la retta perpendicolare ad l passante per $\mathbf{q}$. La distanza di $\mathbf{q}$ da l è data esattamente da

$$d(\mathbf{q}, l) = d(\mathbf{q}, \mathbf{q}').$$

Se prendiamo, ad esempio, $\mathbf{q}$ ed l come nell'Esempio 2.4, il punto $\mathbf{q}'$ è dato dall'intersezione di l con la retta m. Basta dunque calcolare questa intersezione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 1+3t & \text{=1+4s} \\ 2+4t & \text{=-3-3s.} \end{cases}$$

La soluzione è data da $t = -4/5$ e $s = -3/5$, corrispondente al punto $\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} -7/5 \\ -6/5 \end{pmatrix}$; la distanza fra $\mathbf{q}$ ed l è dunque

$$d(\mathbf{q}, l) = d(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \sqrt{(1+7/5)^2 + (-3+6/5)^2} = 3.$$

Fig.18 La distanza fra $\mathbf{q}$ ed l.

Osservazione.(*Formula della distanza punto retta*) Se la retta l è data in forma cartesiana

$$ax_1 + bx_2 + c = 0,$$

un'equazione parametrica della retta m, perpendicolare ad l e passante per $\mathbf{q}$, è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

L'intersezione $l \cap m$ è data dal punto

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} q_1 - a\frac{aq_1+bq_2+c}{a^2+b^2} \\ q_2 - b\frac{aq_1+bq_2+c}{a^2+b^2} \end{pmatrix},$$

corrispondente al valore del parametro

$$t = -\frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2}.$$

Risulta così che la distanza di $\mathbf{q}$ da l è data dalla formula

$$d(\mathbf{q}, l) = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Osservazione. Analogamente, per calcolare la distanza fra due rette parallele, basta scegliere un punto P su una delle due rette e calcolare la distanza di P dall'altra retta.

Definizione. Una *circonferenza* in $\mathbf{R}^2$ di centro $\mathbf{c}$ e raggio r è l'insieme dei punti che ha distanza uguale ad r da $\mathbf{c}$.

Fig.19 La circonferenza di centro $\mathbf{c}$ e raggio r.

Poiché i punti $\mathbf{x}$ sulla circonferenza di centro $\mathbf{c}$ e raggio r sono esattamente quelli che soddisfano

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = r,$$

e l'equazione della circonferenza risulta

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2.$$

Date una retta ed una circonferenza nel piano, ci sono tre possibilità: si intersecano in due punti, si intersecano in un unico punto e la retta è tangente alla circonferenza, oppure non si intersecano affatto. Se la circonferenza ha equazione $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ e la retta ha equazione $ax_1 + bx_2 = c$, si tratta di risolvere il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2 \\ ax_1 + bx_2 = c. \end{cases}$$

Esempio 2.6. (*Intersezione fra una retta e una circonferenza*) Consideriamo, ad esempio, la circonferenza C di equazione

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9$$

e la retta l di equazione $x_1 - x_2 + 2 = 0$. L'intersezione $C \cap l$ è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione la relazione $x_1 = x_2 - 2$, troviamo $x_2 = 4$ e $x_2 = 1$. I due punti di intersezione corrispondenti sono quindi

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo adesso l'intersezione di C con la retta m di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Sostituendo il punto generico della retta m nell'equazione della circonferenza, troviamo $(-t-2)^2 + ((t-10)-1)^2 = 9$, ossia l'equazione

$$t^2 - 9t + 58 = 0.$$

Poiché questa equazione non ha soluzioni reali, la circonferenza C e la retta m non si incontrano.

Fig.20. La circonferenza C e le rette l ed m.

Osservazione. (*Intersezione di due circonferenze*) Per calcolare l'intersezione di due circonferenze C di equazione $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ e C' di equazione $(x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2 = R^2$, bisogna risolvere il sistema non lineare

$$\begin{aligned} (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 &= r^2 \\ (x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2 &= R^2. \end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che, se le circonferenze hanno lo stesso centro, o coincidono o non si incontrano mai. Supponiamo allora che le circonferenze non abbiano lo stesso centro. Sottraendo le due equazioni una dall'altra otteniamo un'equazione di primo grado

$$2(g_1 - c_1)x_1 + 2(g_2 - c_2)x_2 = r^2 - R^2 + (g_1^2 - c_1^2) + (g_2^2 - c_2^2).$$

Geometricamente, questa equazione definisce una retta l, perpendicolare al vettore $\mathbf{g} - \mathbf{c}$. I punti di intersezione fra le due circonferenze sono esattamente i punti di intersezione di l con una di esse.

Proposizione 2.7. *Sia $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ una circonferenza C in $\mathbf{R}^2$ di centro $\mathbf{c}$ e raggio r. Un'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto $\mathbf{q} \in C$ è data da*

$$(q_1 - c_1)(x_1 - q_1) + (q_2 - c_2)(x_2 - q_2) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}$ un punto arbitrario su detta tangente. Poiché la tangente in $\mathbf{q}$ è perpendicolare alla retta passante per $\mathbf{q}$ ed il centro della circonferenza $\mathbf{c}$, si ha che

$$(\mathbf{q}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{x})=0$$

come richiesto.

Fig.21 La retta tangente alla circonferenza nel punto $\mathbf{q}$.

Esempio 2.8. (*Rette tangenti ad una circoferenza*) Siano dati una circonferenza C e un punto $\mathbf{p}\in\mathbf{R}^2$ che non appartiene a C. Come calcolare le tangenti a C uscenti da $\mathbf{p}$? Osserviamo innanzitutto che se $\mathbf{p}$ è interno alla circonferenza, di tangenti a C uscenti da $\mathbf{p}$ non ne esistono; se invece $\mathbf{p}$ è esterno alla circonferenza, esistono esattamente due rette tangenti a C uscenti da $\mathbf{p}$. Siano $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ i corrispondenti punti di tangenza. Allora $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ devono stare sulla circonferenza C e al tempo stesso sulla circonferenza C', di centro $\mathbf{p}$ e raggio $R=\sqrt{d(\mathbf{c},\mathbf{p})^2-r^2}$. In altre parole, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ sono i punti di intersezione di $C\cap C'$.

Sia ad esempio C la circonferenza data da

$$(x_1-2)^2+(x_2-1)^2=9$$

e sia $\mathbf{p}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$, un punto esterno a C. Allora le tangenti a C uscenti da $\mathbf{p}$ sono le rette r_1, per $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, ed r_2, per $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}'$, ove $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ sono dati dall'intersezione delle circonferenze C e C'

$$\begin{cases}(x_1-2)^2+(x_2-1)^2=9\\(x_1+1)^2+(x_2-5)^2=16.\end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni una dall'altra, troviamo l'equazione della retta l

$$3x_1-4x_2+7=0$$

che incontra C e C' nei punti $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$. Per esempio, intersecando l con C, troviamo

$$\mathbf{q}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad\mathbf{q}'=\begin{pmatrix}71/25\\97/25\end{pmatrix}.$$

Le tangenti cercate sono così

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix},\ t\in\mathbf{R}\qquad\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}96/25\\-28/25\end{pmatrix},\ s\in\mathbf{R}.$$

Fig.22 Le tangenti alla circonferenza C uscenti da $\mathbf{p}$.

Osservazione. Per la Prop.2.7, la tangente a C in un generico punto $\mathbf{q} \in C$ è data da

$$(q_1 - 2)(x_1 - q_1) + (q_2 - 1)(x_2 - q_2) = 0.$$

Poiché le tangenti cercate devono passare per il punto dato $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, le coordinate di $\mathbf{q}$ devono anche soddisfare la relazione

$$(q_1 - 2)(-1 - q_1) + (q_2 - 1)(5 - q_2) = 0.$$

E' facile verificare che questa non è altro che la condizione $\mathbf{q} \in C'$.

Esercizi.

(2.A) Sia $\mathbf{x}$ il vettore dell'Eserc.1.B: $\mathbf{x}$ ha norma $\|\mathbf{x}\| = 1$ e forma un angolo φ con l'asse delle ascisse.
  (i) Sia $\mathbf{y}$ la riflessione del vettore $\mathbf{x}$ rispetto alla retta $x_1 = x_2$. Far vedere che l'angolo che $\mathbf{y}$ forma con l'asse delle ascisse è uguale a $\pi/2 - \varphi$.
  (ii) Dimostrare che

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \operatorname{sen} \varphi,$$
$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos \varphi.$$

(2.B) Sia $\mathbf{x}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Trovare altri tre punti sulla retta r che passa per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x}$.

(2.C) Sia T il triangolo di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

  (i) Calcolare le coordinate dei punti medi M_1, M_2 ed M_3 dei lati di T.
  (ii) Calcolare le equazioni delle tre rette l_1, l_2, l_3 passanti per un vertice del triangolo e per il punto medio M_i ad esso opposto.
  (iii) Calcolare i punti di intersezione fra le tre rette l_1, l_2 e l_3.

(2.D) Siano l e m le rette in $\mathbf{R}^2$ date dalle equazioni cartesiane

$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0, \qquad 3x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

(i) Trovare equazioni parametriche per l ed m.
(ii) Calcolare l'intersezione di l ed m.

(2.E) Siano l e m le rette in $\mathbf{R}^2$ date dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

(i) Trovare equazioni cartesiane per l ed m.
(ii) Calcolare l'intersezione di l ed m.

(2.F) Sia l la retta in $\mathbf{R}^2$ di equazione $x_1 = 3$.
(i) Trovare un vettore normale ad l.
(ii) Trovare un altro vettore normale ad l.
(iii) Calcolare un'equazione parametrica per l.
(iv) Calcolare un'altra equazione parametrica per l.

(2.G) Sia l la retta data dall'equazione $x_1 - x_2 = 7$. Sia m la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare il punto di intersezione di l ed m.

(2.H) Sia l la retta di equazione $2x_1 + 2x_2 + 3 = 0$. Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare un'equazione cartesiana per la retta m_1 che passa per $\mathbf{p}$ ed è parallela ad l.
(ii) Calcolare un'equazione cartesiana per la retta m_2 che passa per $\mathbf{p}$ ed è ortogonale ad l.
(iii) Trovare il punto di intersezione di m_1 ed m_2.

(2.I) Sia $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare la proiezone ortogonale del punto $\mathbf{q}$ sulla retta l.
(ii) Calcolare la distanza fra $\mathbf{q}$ ed l.

(2.J) Siano

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare equazioni cartesiane per le tre rette, passanti per due dei tre punti $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$.
(ii) Trovare vettori normali ad ognuna delle tre rette.

(2.K) Sia C la circonferenza data da $x_1^2+x_2^2 = 8$ e siano l_1, l_2 e l_3 le rette date da $x_1+x_2 = 4$, da $x_1+x_2 = 3$ e da $x_1 + x_2 = 5$. Calcolare le intersezioni $C \cap l_i$ per $i = 1, 2, 3$. Fare un disegno di C e delle tre rette.

(2.L) Sia C_1 la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{2}$ e sia C_2 la circonferenza di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 + 4x_2 = 0.$$

Calcolare l'intersezione $C_1 \cap C_2$. Fare un disegno.

(2.M) Sia C_1 la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $\sqrt{2}$ e sia C_2 la circonferenza di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 = 20.$$

Calcolare l'intersezione $C_1 \cap C_2$. Fare un disegno.

(2.N) Sia C la circonferenza data da

$$x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 8x_2 + 7 = 0.$$

Calcolare le tangenti a C uscenti dai punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2.O) Sia C la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e raggio 37 e sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 102 \\ -97 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare il punto $\mathbf{q}_1 \in C$ più vicino a $\mathbf{p}$.
(ii) Calcolare il punto $\mathbf{q}_2 \in C$ più lontano da $\mathbf{p}$.
(iii) Calcolare la distanza fra $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$.

(2.P) Dati due punti P e Q in $\mathbf{R}^2$, determinare l'insieme dei punti equidistanti da P e Q.

3. Trasformazioni di $\mathbf{R}^2$.

In questo paragrafo studiamo alcune trasformazioni geometriche del piano $\mathbf{R}^2$. Per trasformazioni si intendono sempre delle applicazioni bigettive $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Le trasformazioni del piano si possono *comporre* tra loro: se f e g sono due applicazioni bigettive da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$, allora la composizione $f \circ g$, definita da

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})),$$

è ancora un'applicazione bigettiva da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$. Nota bene che $f \circ g$ si legge "*f composto g*", a indicare che prima si applica g al vettore $\mathbf{x}$ e poi si applica f al vettore $g(\mathbf{x})$. In generale, $f \circ g$ è diversa dall'applicazione $g \circ f$.

La composizione fra applicazioni gode della *proprietà associativa:*

$$(f \circ (g \circ h))(\mathbf{x}) = f(g(h(\mathbf{x}))) = ((f \circ g) \circ h)(\mathbf{x}).$$

Definizione. Sia $\mathbf{p}$ un vettore di $\mathbf{R}^2$. La *traslazione* $T_\mathbf{p}$ di passo $\mathbf{p}$ è l'applicazione $T_\mathbf{p} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$T_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_\mathbf{p}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}.$$

Fig.23 La traslazione $T_\mathbf{p}$.

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

Proposizione 3.1.

(i) *Siano* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2$. *Allora* $T_\mathbf{p} \circ T_\mathbf{q} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_\mathbf{q} \circ T_\mathbf{p}$. *In particolare, la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione.*

(ii) *La traslazione* $T_\mathbf{0}$ *è l'applicazione identica.*

(iii) *La traslazione* $T_{-\mathbf{p}}$ *è l'inversa di* $T_\mathbf{p}$.

Dimostrazione. *(i)* Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, vale

$$T_\mathbf{p} \circ T_\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (T_\mathbf{p}(T_\mathbf{q}(\mathbf{x})) = T_\mathbf{p}(\mathbf{x} + \mathbf{q}) = \mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\mathbf{x}).$$

D'altra parte, per la commutatività della somma fra vettori, vale anche

$$\mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{x} + \mathbf{q} + \mathbf{p} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_\mathbf{q} \circ T_\mathbf{p}(\mathbf{x}).$$

(ii) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, si ha che

$$T_\mathbf{0}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x},$$

ossia $T_\mathbf{0}$ è proprio l'applicazione identità di $\mathbf{R}^2$.
(iii) Dal punto (i) segue che

$$T_\mathbf{p} \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{-\mathbf{p}} \circ T_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = T_\mathbf{0}(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

cioè $T_\mathbf{p}$ e $T_{-\mathbf{p}}$ sono una l'inversa dell'altra.

Un'altra famiglia di trasformazioni di $\mathbf{R}^2$ sono le *dilatazioni.*

Definizione. Siano $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda, \mu > 0$. La dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ di $\mathbf{R}^2$ è l'applicazione $D_{\lambda,\mu} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definita da

$$D_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Fig.24 La dilatazione $D_{2,3}$.

Se $\lambda = \mu > 0$, la dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ è semplicemente un "ingrandimento" di fattore $\lambda = \mu$. Se λ e μ sono numeri positivi distinti, $D_{\lambda,\mu}$ è un ingrandimento di fattore λ nella direzione dell'asse delle ascisse e di fattore μ nella direzione dell'asse delle ordinate.

Introduciamo adesso la famiglia delle *rotazioni.*

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $R_\varphi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ associa il vettore ottenuto da $\mathbf{x}$ dopo la rotazione di un angolo φ intorno all'origine. Se $\varphi > 0$, la rotazione va intesa in senso "antiorario". Se $\varphi < 0$, la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso "orario".

Fig.25 La rotazione R_φ.

Teorema 3.2. *Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ e sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Le coordinate del punto $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ sono date da*

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos\varphi x_1 - \operatorname{sen}\varphi x_2, \\ y_2 &= \operatorname{sen}\varphi x_1 + \cos\varphi x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia α l'angolo fra il vettore $\mathbf{x}$ e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos\alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

Il vettore $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ forma un angolo $\varphi + \alpha$ con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(\varphi + \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos\varphi \cos\alpha - \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(\varphi + \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos\varphi \operatorname{sen}\alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\varphi \cos\alpha. \end{aligned}$$

La sostituzione $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos\alpha$ e $x_2 = \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha$ conclude la dimostrazione.

Esempio. Per esempio, la rotazione $R_{\pi/4}$ di centro $\mathbf{0}$ e di angolo $\varphi = \pi/4$ è l'applicazione

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Le rotazioni godono delle seguenti proprietà.

Proposizione 3.3.
(i) La composizione di due rotazioni R_φ *e* R_ψ *intorno all'origine è una rotazione di angolo* $\varphi+\psi$:

$$R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi} = R_\psi \circ R_\varphi.$$

(ii) La rotazione di un angolo $\varphi = 0$ *è l'applicazione identica, ossia* $R_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, *per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$.
(iii) La rotazione inversa di R_φ *è* $R_{-\varphi}$.

Dimostrazione. Tutte queste proprietà sono geometricamente evidenti, ma si possono anche ottenere dalle formule del Teorema 3.2.

Osservazione. Come ottenere le formule di una rotazione $R_{\varphi,\mathbf{p}}$ di angolo φ intorno ad un punto $\mathbf{p}$ diverso dall'origine? Un modo di procedere è il seguente: prima si fa una traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ di passo $-\mathbf{p}$, che porti il punto $\mathbf{p}$ in $\mathbf{0}$; poi si fa una rotazione R_φ intorno a $\mathbf{0}$ e poi si fa una traslazione $T_\mathbf{p}$ che riporti $\mathbf{0}$ in $\mathbf{p}$:

$$R_{\varphi,\mathbf{p}} = T_\mathbf{p} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}.$$

Esempio 3.4. Calcoliamo, ad esempio, le formule della rotazione $R_{\varphi,\mathbf{p}}$ di un angolo φ attorno al punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} R_{\varphi,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) &= T_\mathbf{p} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \\ &= T_\mathbf{p} \circ R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= T_\mathbf{p} \begin{pmatrix} \cos\varphi(x_1-5) - \operatorname{sen}\varphi(x_2-4) \\ \operatorname{sen}\varphi(x_1-5) + \cos\varphi(x_2-4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi(x_1-5) - \operatorname{sen}\varphi(x_2-4) + 5 \\ \operatorname{sen}\varphi(x_1-5) + \cos\varphi(x_2-4) + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Introduciamo infine le *riflessioni.*

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $S_\varphi \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ associa il vettore ottenuto da $\mathbf{x}$ dopo la riflessione rispetto alla retta che passa per $\mathbf{0}$ e forma un angolo φ con l'asse delle ascisse.

Fig.26 La riflessione S_φ.

Teorema 3.5. *Sia* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ *e sia* $\varphi \in \mathbf{R}$. *Le coordinate del punto* $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$ *sono date da*

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos(2\varphi)x_1 + \operatorname{sen}(2\varphi)x_2, \\ y_2 &= \operatorname{sen}(2\varphi)x_1 - \cos(2\varphi)x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$S_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia α l'angolo fra il vettore $\mathbf{x}$ e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos\alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

Si vede dalla Fig.28 che il vettore $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$ forma un angolo $2\varphi - \alpha$ con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi - \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi)\cos\alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi)\operatorname{sen}\alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi - \alpha) = -\|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi)\operatorname{sen}\alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi)\cos\alpha. \end{aligned}$$

La sostituizione $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos\alpha$ e $x_2 = \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}\alpha$ conclude la dimostrazione.

Esempio. Per esempio, la retta l data da $x_1 = x_2$ forma un angolo di $\pi/4$ con l'asse delle ascisse. La riflessione rispetto ad l è l'applicazione $S_{\pi/4}$ data dalle formule

$$S_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 3.6.
(i) La composizione $S_\varphi \circ S_\varphi$ *è l'applicazione identica.*
(ii) La composizione $S_\varphi \circ S_\psi$ *di due riflessioni rispetto a rette distinte passanti per* $\mathbf{0}$ *(con* $\varphi \neq \psi$*) è una rotazione di angolo* $2(\varphi - \psi)$.

Dimostrazione. Calcoliamo

$$\begin{aligned} (S_\varphi \circ S_\psi)(\mathbf{x}) &= \left(\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\psi) & \operatorname{sen}(2\psi) \\ \operatorname{sen}(2\psi) & -\cos(2\psi) \end{pmatrix} \right) (\mathbf{x}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi)\cos(2\psi) + \operatorname{sen}(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) & \cos(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) - \operatorname{sen}(2\varphi)\cos(2\psi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi)\cos(2\psi) - \cos(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) & \operatorname{sen}(2\varphi)\operatorname{sen}(2\psi) + \cos(2\varphi)\cos(2\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\varphi - \psi)) & -\operatorname{sen}(2(\varphi - \psi)) \\ \operatorname{sen}(2(\varphi - \psi)) & \cos(2(\varphi - \psi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= R_{2(\varphi - \psi)}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

In particolare, se $\varphi = \psi + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ otteniamo l'applicazione identità.

Osservazione. Dalle formule del teorema precedente si vede anche che, in generale,

$$S_\varphi \circ S_\psi \neq S_\psi \circ S_\varphi.$$

Osservazione. Se $\varphi = 0$, l'applicazione S_0 è una riflessione rispetto all'asse delle ascisse; se $\varphi = \pi/2$, l'applicazione $S_{\pi/2}$ è una riflessione rispetto all'asse delle ordinate.

Fig.27 La riflessione rispetto all'asse delle ascisse S_0.

La composizione delle riflessioni S_0 ed $S_{\pi/2}$ è una rotazione di angolo π, ossia la riflessione rispetto all'origine $\mathbf{0}$.

Fig.28 La riflessione rispetto all'origine $R_\pi = S_0 \circ S_{\pi/2}$.

Osservazione. Come calcolare le formule della riflessione S rispetto ad una retta l che non passa per l'origine? Se la retta l non passa per l'origine, non possiamo usare direttamente le formule del Teorema 3.5, ma possiamo procedere nel seguente modo. Fissiamo un punto arbitrario $\mathbf{p}$ sulla retta l e applichiamo la traslazione $T_{-\mathbf{p}}$. La trasformata della retta l, tramite $T_{-\mathbf{p}}$, è la retta l', parallela ad l e passante per $\mathbf{0}$; applichiamo adesso la riflessione S_φ rispetto ad l', ove φ è l'angolo formato da l' con l'asse delle ascisse. Applichiamo infine la traslazione inversa $T_{\mathbf{p}}$, che "riporta la retta l al suo posto". In totale, la riflessione rispetto ad l è data dalla composizione

$$S = T_{\mathbf{p}} \circ S_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}$$

e non dipende dalla scelta di $\mathbf{p} \in l$.

Esempio 3.7. Calcoliamo ad esempio la riflessione rispetto alla retta l di equazione $x_1 + 1 = 0$. Il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene ad l e quindi la traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ di passo $-\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ porta l nella retta l', ad essa parallela e passante per l'origine. l' è data dall'equazione $x_1 = 0$ e forma un angolo uguale a $\pi/2$ con l'asse delle ascisse. La trasformazione cercata è data dunque dalla composizione

$$S = T_{-\binom{1}{0}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\binom{1}{0}}.$$

In coordinate S risulta

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}) &= T_{-\binom{1}{0}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\binom{1}{0}}(\mathbf{x}) \\ &= T_{-\binom{1}{0}} \circ S_{\pi/2} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= T_{-\binom{1}{0}} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= T_{-\binom{1}{0}} \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Concludiamo questo paragrafo introducendo l'orientazione di una coppia di vettori in $\mathbf{R}^2$.

Definizione. *L'orientazione* $\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ di una coppia di vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2$ è il *segno* del determinante

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

In altre parole

$$\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{cases} +1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 > 0; \\ 0 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0; \\ -1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 < 0. \end{cases}$$

Si dice che una coppia di vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è orientata *positivamente* se $\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$. Geometricamente, ciò accade se, ruotando il vettore $\mathbf{v}$ in senso antiorario fino a sovrapporlo alla retta passante per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{w}$, allora $\mathbf{v}$ ha la stesso verso di $\mathbf{w}$ (e non quello opposto).

Fig.29 Orientazione.

L'orientazione $\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ *cambia* se cambia l'ordine dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Si ha infatti che

$$\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathrm{Or}(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Siano $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allora si ha che

$$\mathrm{Or}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = +1, \qquad \mathrm{Or}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = -1.$$

Una qualunque rotazione R_φ conserva l'orientazione di ogni coppia di vettori. Si dice anche che le rotazioni conservano l'orientazione del piano. Una riflessione, invece, cambia l'orientazione di ogni coppia di vettori. Una dilatazione $D_{\lambda,\mu},\ \lambda,\mu > 0$ conserva sempre l'orientazione:

$$\begin{aligned}\mathrm{Or}(D_{\lambda,\mu}(\mathbf{v}), D_{\lambda,\mu}(\mathbf{w})) &= \mathrm{Or}\left(\begin{pmatrix}\lambda v_1\\ \mu v_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda w_1\\ \mu w_2\end{pmatrix}\right),\\ &= \lambda v_1 \mu w_2 - \lambda w_1 \mu v_2,\\ &= \lambda\mu \mathrm{Or}(\mathbf{v},\mathbf{w}).\end{aligned}$$

In generale, un'applicazione lineare f di $\mathbf{R}^2$ conserva l'orientazione se e soltanto se $\det(f) > 0$.

Esercizi.

(3.A) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la traslazione $T_\mathbf{p}$.

(ii) Calcolare $T_\mathbf{p}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $T_\mathbf{p}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

(iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $T_{3\mathbf{p}}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

(iv) Calcolare $(T_\mathbf{q} \circ T_{3\mathbf{p}})\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}})\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

(3.B) Sia Q il trapezio in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di Q dopo la traslazione $T_{\left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)}$.

(ii) Disegnare l'immagine di Q dopo la dilatazione $D_{2,2}$ data dalla matrice $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

(iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la riflessione S_0 data dalla matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(iv) Disegnare l'immagine di Q dopo la rrotazione R_π data dalla matrice $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(3.C) Sia $D_{2,5}$ la dilatazione data dalla matrice $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

(i) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ tale che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{2,5}$ sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu}$ tale che $D_{2,5} \circ D_{\lambda,\mu}$ sia l'applicazione identica.

(3.D) Per quali dilatazioni $D_{\lambda,\mu}$ abbiamo che $D_{\lambda,\mu} \circ D_{\lambda,\mu}$ è l'applicazione identica?

(3.E) Sia Q il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.

(ii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione R_π.

(iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$.

(3.F) Sia Q il quadrato in $\mathbf{R}^2$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/2}$.
(ii) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda il quadrato in se stesso?
(iii) Disegnare l'immagine di Q dopo la rotazione $R_{\pi/4}$.

(3.G) Siano $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ i punti di $\mathbf{R}^2$ di coordinate

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

(i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda l'esagono di vertici $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ in se stesso?

(3.H) Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.
(i) Trovare le formule per la rotazione R di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $\pi/2$.
(ii) Trovare le formule per la rotazione R' di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $-\pi/4$.
(iii) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando R ad l.
(iv) Sia m la retta di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando R' ad l.

(3.I) Sia l la retta di equazione $x_1 + x_2 = 0$.
(i) Calcolare le formule della riflessione rispetto ad l.
(ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(3.J) Sia Q il quadrato dell'Eserc.3.E. Calcolare l'immagine di Q dopo la riflessione rispetto
(i) all'asse delle ascisse.
(ii) all'asse delle ordinate.
(iii) alla retta di equazione $x_1 = x_2$.

(3.K) Sia Q il quadrato dell'Eserc.3.F. Calcolare l'immagine di Q dopo la riflessione rispetto
(i) all'asse delle ascisse.
(ii) all'asse delle ordinate.
(iii) alla retta di equazione $x_1 = x_2$.
(iv) Trovare tutte le riflessioni S_φ che mandano Q in se stesso.

(3.L) Siano $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ i punti dell'Eserc.3.G. Calcolare l'immagine dell'esagono di vertici Q_i dopo la riflessione rispetto

(i) all'asse delle ascisse.
(ii) all'asse delle ordinate.
(iii) la retta di equazione $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$.
(iv) Trovare tutte le riflessioni S_φ che mandano l'esagono in se stesso.

(3.M) Sia S la riflessione rispetto alla retta l di equazione cartesiana $3x_1 + 4x_2 = 0$.

(i) Calcolare la tangente dell'angolo φ formato da l con l'asse delle ascisse.
(ii) Calcolare le formule per S.

(3.N) Sia S la riflessione rispetto alla retta l di equazione cartesiana $3x_1 + 4x_2 = 0$.

(i) Calcolare le formule della riflessione S_0 rispetto all'asse delle ascisse.
(ii) Far vedere che

$$S = R_{-\varphi} \circ S_0 \circ R_\varphi.$$

(Suggerimento: calcolare le formule per R_φ e per S).

(3.O) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}$$

e sia m la retta di equazione $x_1 = 0$.

(i) Trovare le formule della riflessione S rispetto ad l.
(ii) Calcolare le formule della riflessione S' rispetto ad m.
(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

(3.P)) Sia l la retta di equazione $x_1 = 1$ e sia m la retta di equazione $x_2 = 2$.

(i) Calcolare le formule della riflessione S rispetto ad l.
(ii) Calcolare le formule della riflessione S' rispetto ad m.
(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

(iv) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno $S \circ S'$ e $S' \circ S$?

(3.Q) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare l'orientazione di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.
(ii) Calcolare l'orientazione di $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$.
(iii) Sia S_0 la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Calcolare $\mathrm{Or}(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$.
(iv) Sia S_φ la riflessione rispetto alla retta passante per $\mathbf{0}$ e formante un angolo φ con l'asse delle ascisse. Calcolare $\mathrm{Or}(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w}))$.

(3.R) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Sia $R_{\pi/2}$ la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo $\pi/2$. Calcolare $\mathrm{Or}(R_{\pi/2}(\mathbf{v}), R_{\pi/2}(\mathbf{w}))$.

(ii) Sia R_φ la rotazione di centro $\mathbf{0}$ e angolo φ. Calcolare $\mathrm{Or}(R_\varphi(\mathbf{v}), R_\varphi(\mathbf{w}))$.

(3.S) Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Siano $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(t)}$ le riflessioni rispetto a delle rette passanti per $\mathbf{0}$. Sia $S = S^{(1)} \circ S^{(2)} \circ \ldots \circ S^{(t)}$. Calcolare l'orientazione $\mathrm{Or}(S(\mathbf{v}), S(\mathbf{w}))$.

Versione preliminare
27 settembre 1999

II Università degli
Studi di Roma
TOR VERGATA

Dispense di Geometria. Capitolo 2.

4. Geometria di $\mathbf{R}^3$.

Questo paragrafo è molto simile al paragrafo 1: tratta infatti delle proprietà geometriche elementari dello spazio $\mathbf{R}^3$. Per assegnare delle *coordinate* nello spazio, fissiamo innanzitutto un punto $\mathbf{0}$, che chiamiamo *l'origine.* Scegliamo poi tre rette perpendicolari che si incontrano in $\mathbf{0}$: due rette "orizzontali" come assi delle x_1 e delle x_2, e la terza "verticale" come asse delle x_3. Fissiamo su di esse un verso ed un'unità di misura. Adesso, ad un arbitrario punto P dello spazio associamo una terna di numeri reali $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, che indicano rispettivamente le proiezioni di P sugli assi delle x_1, x_2 e x_3.

Fig.1. Lo spazio $\mathbf{R}^3$

Le coordinate x_1, x_2 e x_3 individuano il punto P in modo unico. Si possono identificare quindi i punti P dello spazio con le terne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, i punti sull'asse delle x_1 sono quelli che soddisfano $x_2 = x_3 = 0$, i punti sull'asse delle x_2 quelli che soddisfano $x_1 = x_3 = 0$ e i punti sull'asse delle x_3 quelli che soddisfano $x_1 = x_2 = 0$. L'origine $\mathbf{0}$ è il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'insieme delle terne ordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ si chiama "spazio cartesiano" e si indica con $\mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{R}^3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}.$$

Nello spazio $\mathbf{R}^3$, insieme agli assi coordinati, si considerano anche i piani coordinati: sono i tre piani ortogonali che si intersecano nell'origine, ognuno dei quali contiene due dei 3 assi coordinati. Essi sono: il piano (x_1, x_2) i cui punti soddisfano $x_3 = 0$, il piano (x_2, x_3) i cui punti soddisfano $x_1 = 0$ ed il piano (x_1, x_3) i cui punti soddisfano $x_2 = 0$.

Fig.2. I piani coordinati in $\mathbf{R}^3$

Come nel caso del piano, indicheremo in seguito con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ anche il *vettore* $\mathbf{x}$ uscente dall'origine e di estremo il punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Fig.3. Il vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Il vettore $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di lunghezza zero, si chiama *vettore nullo.* Per semplicità di notazione, scriveremo spesso $\mathbf{x}$ sottointendendo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; similmente scriveremo $\mathbf{y}$ per $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, etc ...

Definizione. Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$. Allora la *somma* $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore dato da

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}.$$

Il *vettore opposto* del vettore $\mathbf{x}$ è il vettore

$$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}.$$

La *differenza* $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ dei vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ x_3-y_3 \end{pmatrix}$.

Definizione. Sia $\lambda \in \mathbf{R}$. Il *prodotto* di $\mathbf{x}$ per λ è il vettore dato da

$$\lambda\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}.$$

Come nel piano, anche nello spazio la somma tra vettori ha un'interpretazione geometrica. Osserviamo che due vettori qualunque $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^3$ sono contenuti in un piano π passante per $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$

e $\mathbf{y}$. Il vettore somma $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ si trova applicando la regola del parallelogramma ai vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sul piano π. Per costruzione, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ è contenuto nel piano π. Resta solo da verificare che le coordinate di $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ così ottenute sono effettivamente

$$\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}.$$

Anche in $\mathbf{R}^3$, il vettore differenza $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ è paralello alla retta passante per $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$; la lunghezza di $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ è uguale alla distanza fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Fig.4. La somma $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, la differenza $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Osservazione. La costruzione appena discussa è utile perché riconduce la somma di vettori nello spazio ad una somma di vettori sul piano. Ci permette inoltre di definire l'angolo ϑ fra due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dello spazio, come l'angolo da essi formato nel piano π che li contiene. Nel caso in cui $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono uno multiplo dell'altro, il piano π non è unico ed i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ stanno tutti sulla stessa retta. In questo caso, l'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è $\vartheta=0$.

Fig.5 L'angolo ϑ fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

La somma fra vettori gode delle seguenti proprietà:

Proposizione 4.1.
(i) (Proprietà associativa della somma) Per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{R}^3$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z});$$

(ii) (Proprietà commutativa) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$$

(iii) (Proprietà associativa del prodotto) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x};$$

(iv) (Proprietà distributiva) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \\ (\lambda + \mu)\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Anche in questo caso, le proprietà *(i)*, *(ii)*, *(iii)* e *(iv)* sono semplici conseguenze delle analoghe proprietà dei numeri reali.

Definizione. (*Prodotto scalare.*) Dati due vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ in $\mathbf{R}^3$ il *prodotto scalare* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ è il numero reale dato da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà

Proposizione 4.2.

(i) (Proprietà commutativa) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x};$$

(ii) (Proprietà distributiva) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z};$$

(iii) (Omogeneità) Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ *ed ogni* $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y});$$

(iv) (Positività) Per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \\ &\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \textit{se e soltanto se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è molto simile a quella della Prop.1.2 ed è lasciata al lettore.

Definizione. La norma $\|\mathbf{x}\|$ di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ è definita da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Per il Teorema di Pitagora, la norma del vettore $\mathbf{x}$ è uguale alla lunghezza del segmento congiungente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Equivalentemente, la norma di $\mathbf{x}$ è la distanza del punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dall'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Fig.6. Il Teorema di Pitagora in $\mathbf{R}^3$.

Analogamente, dalla Fig.4 vediamo che $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ è la distanza fra i punti $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Usando la norma, diamo un'interpretazione geometrica del prodotto scalare.

Proposizione 4.3. *Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *due vettori in* $\mathbf{R}^3$.
(i) Allora

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos\varphi$$

dove φ *è l'angolo fra i vettori* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$.
(ii) I vettori $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *sono perpendicolari se e soltanto se* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Dimostrazione. Sia π un piano che passa per $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Consideriamo in π il triangolo di vertici i punti $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Dalla Fig.4, vediamo che i lati del triangolo hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Applicando la regola del coseno troviamo

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos\varphi.$$

Dalla definizione stessa della norma abbiamo

$$(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos\varphi$$

e quindi

$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 - 2x_3y_3 = -2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos\varphi$$

come richiesto. Per la parte *(ii)*, osserviamo che $\cos\varphi = 0$ se e soltanto se $\varphi = \pm\pi/2$, cioè se e soltanto se φ è un angolo retto.

Corollario 4.4. *(Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vettori in* $\mathbf{R}^3$. *Allora*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

Dimostrazione. Questo segue dal fatto che $|\cos\varphi| \leq 1$. (Vedi l'Eserc.1.B).

Proposizione 4.5. *Siano* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *vettori in* $\mathbf{R}^3$. *Allora*

(i) (Disugualianza triangolare)
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|;$$
(ii) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$
$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Dimostrazione. *(i)* Sia π un piano che passa per $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. In π c'è il triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$. Poiché i lati hanno lunghezze $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$, la disuguaglianza triangolare in $\mathbf{R}^3$ segue dalla disuguaglianza triangolare nel piano. Una seconda dimostrazione dello stesso fatto si può ottenere anche usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz del Cor.4.4:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 + (x_3+y_3)^2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}, \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

Poiché $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ sono numeri non negativi, possiamo estrarne le radici quadrate ottenendo la disuguaglianza cercata.
(ii) Direttamente dalla definizione della norma troviamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\|^2 = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + (\lambda x_3)^2 = \lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2.$$

Estraendo le radici quadrate, otteniamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$$

come richiesto.

Come applicazione del prodotto scalare, calcoliamo le proiezioni ortogonali di un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ su una retta l o su un piano β, passanti per l'origine.

Proposizione 4.6. *Sia* $\mathbf{x}$ *un vettore in* $\mathbf{R}^3$.

(i) La proiezione ortogonale $\pi(\mathbf{x})$ *di* $\mathbf{x}$ *sulla retta* l *passante per l'origine e parallela al vettore* $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ *è data da*
$$\pi(\mathbf{x}) = c\mathbf{y}, \quad \text{ove } c = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2};$$
(ii) La proiezione ortogonale $\pi(\mathbf{x})$ *di* $\mathbf{x}$ *sul piano* β *passante per l'origine di equazione* $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *è data da*
$$\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \lambda\mathbf{n}, \quad \text{ove } \lambda = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}.$$

Dimostrazione. *(i)* La dimostrazione è del tutto simile a quella della Proposizione 1.6 ed è lasciata al lettore.
(ii) Sia $\pi(\mathbf{x})$ la proiezione ortogonale di $\mathbf{x}$ sul piano β. Allora $\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x})$ è un vettore perpendicolare a β e dunque soddisfa
$$\mathbf{x} - \pi(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{n}$$
per un opportuno scalare λ. Poiché $\pi(\mathbf{x})$ appartiene a β vale $\mathbf{n}\cdot\pi(\mathbf{x}) = 0$, da cui si ricava $\lambda\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}$ e quindi
$$\lambda = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}$$

come richiesto.

Fig.7. La proiezione del vettore $\mathbf{x}$ sul piano β.

Introduciamo adesso il *prodotto vettoriale* in $\mathbf{R}^3$: si noti che il *prodotto vettoriale* non è definito nel piano $\mathbf{R}^2$, né in $\mathbf{R}^n$ per $n > 3$. È una nozione che *esiste solo in* $\mathbf{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* è un'applicazione che ad una coppia di vettori $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ associa un terzo vettore $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$.

Definizione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è il vettore di $\mathbf{R}^3$ definito da

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 4.7. *Siano* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$. *Il prodotto vettoriale* $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ *gode delle seguenti proprietà:*

(i)

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y};$$

(ii) Il vettore $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ *è perpendicolare sia ad* $\mathbf{x}$ *che a* $\mathbf{y}$*:*

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0,$$
$$\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0;$$

(iii) La norma di $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ *soddisfa*

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\||\operatorname{sen}\varphi|,$$

dove φ *è l'angolo fra* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$.

Dimostrazione. *(i)* Direttamente dalla definizione, abbiamo

$$\mathbf{y} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_2x_3 - y_3x_2 \\ y_3x_1 - y_1x_3 \\ y_1x_2 - y_2x_1 \end{pmatrix} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y}.$$

Per dimostrare *(ii)*, calcoliamo

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Similmente troviamo $\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$.
Per la parte *(iii)* abbiamo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \operatorname{sen}^2\varphi &= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2(1-\cos^2\varphi) \\
&= \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \\
&= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 \\
&= x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_2x_3y_2y_3 \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 \\
&= \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate, troviamo l'uguaglianza cercata. Questo conclude la dimostrazione della proposizione.

Proposizione 4.8. *Il parallelepipedo di spigoli i vettori* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *e* $\mathbf{z}$ *ha volume* V *dato da*

$$\begin{aligned}
V &= |x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3 - z_1y_2x_3| \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\right|.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Il volume V del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ è uguale all'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ moltiplicata per l'altezza. L'altezza è uguale alla lunghezza della proiezione del vettore $\mathbf{z}$ sulla retta che passa per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$.

Fig.8. Il parallelepipedo di spigoli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

Per la Prop.1.7, l'area del parallelogramma è uguale a $\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\||\operatorname{sen}\varphi|$, ove φ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, e la lunghezza della proiezione di $\mathbf{z}$ sulla retta per $\mathbf{0}$ e $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ è uguale a $\|\mathbf{z}\||\cos\vartheta|$, ove ϑ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{z}$ e $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$. Il volume V è quindi dato da

$$\begin{aligned}
V &= \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\||\operatorname{sen}\varphi|\|\mathbf{z}\||\cos\vartheta| \\
&= \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|\|\mathbf{z}\||\cos\vartheta| \\
&= \|\mathbf{z}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\| \\
&= |z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)|.
\end{aligned}$$

Osserviamo infine che l'espressione $z_1(x_2y_3 - x_3y_2) + z_2(x_3y_1 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1)$ coincide col determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix},$$

e ciò completa la dimostrazione della Proposizione.

Definizione. *L'orientazione* $\mathrm{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ di tre vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$ è il segno del determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Si dice che $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono orientati *positivamente* se $\mathrm{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) > 0$.

Per esempio, i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ sono orientati positivamente perchè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1.$$

Scambiare due vettori cambia il segno dell'orientazione:

$$\mathrm{Or}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = -\mathrm{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Geometricamente, tre vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono orientati positivamente se possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano destra. Altrimenti sono orientati negativamente e possono essere identificati rispettivamente con il medio, il pollice e l'indice della mano sinistra.

Mano sinistra; $\mathrm{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -1$. Mano destra; $\mathrm{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = +1$.

Fig.9. L'orientazione.

Osservazione. I vettori $\{\mathbf{x}, \ \mathbf{y}$ e $\mathbf{x} \times \mathbf{y}\}$ formano una terna di vettori orientata positivamente.

Esercizi.

(4.A) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$.

(i) Calcolare $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$ e $-2\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

(ii) Calcolare le lunghezze di questi vettori.

(4.B) Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ i vettori dell'Eserc.4.A.

(i) Calcolare i prodotti scalari $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ e anche $\mathbf{x} \cdot (5\mathbf{x} + 7\mathbf{y})$.

(ii) Calcolare il coseno dell'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(iii) Calcolare il coseno dell'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

(4.C) Sia $\mathbf{x}$ il vettore dell'Eserc.4.A.

(i) Trovare un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$.

(ii) Trovare un vettore $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tale che

$$\begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} & = 0, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} & = 0. \end{cases}$$

(4.D) Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ un vettore non nullo. Sia $\lambda = \|\mathbf{v}\|$.

(i) Calcolare la lunghezza di $\frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$.

(ii) Trovare un vettore parallelo a $\mathbf{v}$ che abbia lunghezza $1/\lambda$.

(4.E) Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$. Sia

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)/2 \\ (x_2 + y_2)/2 \\ (x_3 + y_3)/2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare le distanze $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$.

(ii) Far vedere che $\mathbf{v}$ è il punto medio fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(4.F) Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ i due vettori dell'Eserc.4.A.

(i) Calcolare $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

(ii) Calcolare $\mathbf{x} \times (-\mathbf{y})$.

(iii) Calcolare l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(4.G) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Trovare un vettore $\mathbf{v}$ perpendicolare sia a $\mathbf{x}$ che a $\mathbf{y}$.

(ii) Trovare un vettore come nella parte (i), di lunghezza 1.

(4.H) Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $2\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(iii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(iv) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x} + 5\mathbf{y} + 7\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(4.I) Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori in $\mathbf{R}^3$ dati da

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare le lunghezze di $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ e gli angoli fra $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{x} + 5\mathbf{y} + 7\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

(4.J) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare i vettori $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z}$ ed $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$.
(ii) Calcolare $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$ ed $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$.

(4.K) Siano $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ i vettori dell'Eserc.4.H.
(i) Calcolare l'orientazione $\mathrm{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.
(ii) Calcolare l'orientazione $\mathrm{Or}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})$.
(iii) Calcolare l'orientazione $\mathrm{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y})$.

(4.L) Siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_8 \in \mathbf{R}^3$ gli otto punti in $\mathbf{R}^3$ dati da

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_7 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_8 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Far vedere che $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_4$ sono i vertici di un parallelogramma.
(ii) Far vedere che $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_5 = \mathbf{x}_{i+4}$ per ogni i, $1 \leq i \leq 4$.
(iii) Far vedere che $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_8$ formano i vertici di un parallelepipedo. Calcolarne il volume.

(4.M) Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^3$ e supponiamo che $\mathrm{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = +1$.
(i) Far vedere che i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ si possono mettere in ordine in *sei* modi diversi: $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}$ oppure $\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ ecc.
(ii) Per tutti i sei modi calcolare l'orientazione: $\mathrm{Or}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y})$, $\mathrm{Or}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ ... ecc.

(4.N) Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ numeri non nulli che soddisfano $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Consideriamo i seguenti vettori in $\mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta\gamma \\ \gamma\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \beta\gamma \\ \gamma\alpha \\ \alpha\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \gamma\alpha \\ \alpha\beta \\ \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare gli angoli fra i vettori $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$.
(ii) Calcolare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$.

5. Rette e piani in $\mathbf{R}^3$; sfere.

In questo paragrafo studiamo le rette, i piani e le sfere in $\mathbf{R}^3$. Ci sono due modi per descrivere piani e rette in $\mathbf{R}^3$: mediante *equazioni cartesiane* oppure mediante *equazioni parametriche.* Cominciamo con le equazioni parametriche delle rette. La situazione è molto simile a quella in $\mathbf{R}^2$. Un'*equazione parametrica* di una retta in $\mathbf{R}^3$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + tv_1 \\ p_2 + tv_2 \\ p_3 + tv_3 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

ossia

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

ponendo come al solito $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Il vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ è un *vettore parallelo* alla retta e il punto $\mathbf{p}$ è un punto sulla retta. Al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$ vengono descritti tutti i punti della retta: il punto $\mathbf{p}$ corrisponde a $t = 0$. Ad esempio, al punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ corrisponde la retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Fig.10. La retta $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per $t = 0$, $t = 1$ e $t = -1/3$ troviamo rispettivamente i punti della retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Come nel caso di $\mathbf{R}^2$ due equazioni parametriche distinte possono descrivere la stessa retta: se $\mathbf{p}'$ è un altro punto sulla retta e $\mathbf{v}'$ è un vettore parallelo a $\mathbf{v}$, le equazioni

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v},\ t \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{x} = \mathbf{p}' + s\mathbf{v}',\ s \in \mathbf{R}$$

descrivono la stessa retta.

Similmente si hanno equazioni parametriche per i piani in $\mathbf{R}^3$. Un'*equazione parametrica* di un piano in $\mathbf{R}^3$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + tv_1 + sw_1 \\ p_2 + tv_2 + sw_2 \\ p_3 + tv_3 + sw_3 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R},$$

ossia

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \qquad t, s \in \mathbf{R},$$

ponendo come al solito $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$. Il punto $\mathbf{p}$ è un punto del piano, i vettori $\mathbf{v} \neq 0$ e $\mathbf{w} \neq 0$ sono *vettori paralleli* al piano. Per ottenere effettivamente un piano è necessario che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, oltre ad essere non nulli, *non* siano uno multiplo dell'altro, cioè $\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{w}$. Al variare dei parametri t ed $s \in \mathbf{R}$ vengono descritti tutti i punti del piano: il punto $\mathbf{p}$ corrisponde a $t = s = 0$. Ad esempio, per $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ troviamo il piano

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R}.$$

Fig.11. Il piano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Assegnando ai parametri i valori $t = s = 0$, oppure $t = 1$, $s = 0$, oppure $t = -1/3$, $s = -2$ si trovano rispettivamente i punti del piano

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso, due equazioni parametriche distinte possono descrivere lo stesso piano: se $\mathbf{p}'$ è un altro punto del piano e $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ sono vettori tali che $\mathrm{span}\{\mathbf{v}', \mathbf{w}'\} = \mathrm{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, allora

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}' + t'\mathbf{v}' + s'\mathbf{w}', \quad t', s' \in \mathbf{R}$$

è un'altra equazione dello stesso piano.

Le rette ed i piani nello spazio si possono anche rappresentare mediante *equazioni cartesiane.* I punti $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ che soddisfano un'equazione lineare

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \tag{$*$}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ed a, b, c non sono tutti nulli, formano un piano. Questo si vede facilmente "risolvendo il sistema lineare" di una sola equazione in tre incognite (*). Le soluzioni dipendono da due parametri liberi. Per esempio, risolvendo l'equazione $x_2 + 2x_3 = 4$ possiamo scegliere come parametri liberi x_1 e x_3. Se chiamiamo $x_1 = s$ ed $x_3 = t$, allora $x_2 = 4 - 2x_3 = 4 - 2t$ e troviamo il piano di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 4-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione cartesiana di un piano non è unica. Se λ è un numero reale non nullo, le equazioni

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \quad \text{e} \quad \lambda a x_1 + \lambda b x_2 + \lambda c x_3 = \lambda d$$

definiscono lo stesso piano.

Definizione. Un vettore *normale* ad un piano è un vettore $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ che è perpendicolare al piano.

Proposizione 5.1. *Sia π il piano di equazione cartesiana*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d.$$

Allora, il vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *è un vettore normale a* π.

Dimostrazione. Notiamo che $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non è zero perchè a, b, c non sono tutti nulli. Controlliamo che $\mathbf{n}$ è perpendicolare al piano. Dati due punti distinti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ del piano, il vettore $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ è parallelo al piano. Calcolando

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= (x_1 - y_1)a + (x_2 - y_2)b + (x_3 - y_3)c \\ &= (ax_1 + bx_2 + cx_3) - (ay_1 + by_2 + cy_3) = d - d = 0\end{aligned}$$

troviamo che, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \pi$, il prodotto scalare $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}$ è zero. Poiché tutti i vettori paralleli al piano π sono di questa forma, si ha che $\mathbf{n}$ è perpendicolare a π, come richiesto.

Fig.12. $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ è parallelo al piano.

Osservazione. Se

$$ax+by+cz=d \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{v}+s\mathbf{w}, \qquad t,s \in \mathbf{R}$$

sono rispettivamente un'equazione cartesiana ed un'equazione parametrica dello stesso piano, allora il vettore normale $\mathbf{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è perpendicolare ai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

I punti di $\mathbf{R}^3$ che soddisfano un sistema lineare di *due* equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d', \end{cases} \qquad (**)$$

ove le terne a,b,c e a',b',c' sono entrambe non nulle, sono precisamente i punti contenuti sia nel piano di equazione $ax_1+bx_2+cx_3=d$ che nel piano di equazione $a'x_1+b'x_2+c'x_3=d'$.

Quando l'intersezione dei due piani è una retta, si dice che le equazioni del sistema sono *equazioni cartesiane* per la retta. Per esempio, i punti $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ tali che

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \phantom{x_1 - {}} 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

formano una retta in $\mathbf{R}^3$. Poiché il sistema è già "a scala", ponendo $x_3=s$ come parametro libero, ricaviamo $x_2=(4-x_3)/2=2-s/2$ ed $x_1=1-3s+2(2-s/2)=5-4s$. Troviamo così la retta

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 5-4s \\ 2-s/2 \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} -4 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Come si intuisce facilmente, le equazioni cartesiane di una retta non sono uniche: ci sono infatti infinite coppie di piani che si incontrano in una data retta.

Proposizione 5.2. *Siano*

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d', \end{cases}$$

equazioni cartesiane di una retta r in $\mathbf{R}^3$. Allora i vettori $\mathbf{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{n}'=\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ generano un piano ν perpendicolare ad r.

Dimostrazione. Poiché la retta r è contenuta sia nel piano di equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ che in quello di equazione $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = d'$, essa è ortogonale sia ad $\mathbf{n}$ che a $\mathbf{n}'$. Sia $\mathbf{x}$ un generico punto di r. Poiché

$$\mathbf{x} \cdot (t\mathbf{n} + s\mathbf{n}') = t\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} + s\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}' = 0, \qquad \text{per ogni } s, t \in \mathbf{R}$$

si ha che la retta r è perpendicolare a ν come richiesto.

Osservazione. Come conseguenza della Proposizione 5.2, il prodotto vettoriale $\mathbf{n} \times \mathbf{n}'$ definisce un vettore parallelo ad r.

Abbiamo visto i due modi per descrivere rette e piani in $\mathbf{R}^3$. Abbiamo spiegato come passare da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche. Vediamo adesso, mediante esempi espliciti, come passare da equazioni parametriche ad equazioni cartesiane.

Esempio 5.3. Sia l la retta data da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Per trovare delle equazioni cartesiane di l, eliminiamo il parametro s dal sistema

$$\begin{cases} x_1 = & 1 & + & 2s \\ x_2 = & -1 & + & s \\ x_3 = & & - & 2s. \end{cases}$$

Il parametro s si può eliminare in diversi modi. Ricavando ad esempio s dalla seconda equazione, troviamo $s = x_2 + 1$, che sostituito nelle altre due equazioni, ci dà:

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 & + & 2(x_2+1) & = & 2x_2 + 3 \\ x_3 & = & & - & 2(x_2+1) & = & -2x_2 - 2. \end{cases}$$

Queste sono delle equazioni cartesiane della retta l.

Esempio 5.4. Sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbf{R}.$$

Per scrivere un'equazione cartesiana

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

di π abbiamo bisogno innanzitutto di un vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ortogonale a π ed, in particolare, ortogonale a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le coordinate di $\mathbf{n}$ devono dunque soddisfare le condizioni

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2a + b - 2c = 0,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = b + 2c = 0,$$

ossia il sistema lineare

$$\begin{cases} 2a + b - 2c = 0 \\ \phantom{2a +{}} b + 2c = 0. \end{cases}$$

Poiché il sistema è a scala, possiamo ricavare $b = -2c$ ed $a = (2c - b)/2 = (2c + 2c)/2 = 2c$ in funzione del parametro libero c, cosicché

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

Ponendo ad esempio $c = 1$, troviamo $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determiniamo infine il termine noto d sostituendo nell'equazione un punto del piano. Usando per esempio il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dell'equazione parametrica, troviamo $2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 0 = d$ e quindi $d = 4$. L'equazione cercata è

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4.$$

Osservazione. Un altro modo per ottenere il vettore $\mathbf{n}$ è quello di calcolare il prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esempio 5.5. (*piano per 3 punti*) Come determinare il piano π passante per tre punti dati in $\mathbf{R}^3$? C'è da osservare che il piano è unico se e solo se i tre punti non stanno sulla stessa retta. Siano dati, per esempio,

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Allora i vettori $\mathbf{v} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{p} - \mathbf{r}$ dati da

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

sono lineramente indipendenti e paralleli al piano π cercato. Un'equazione parametrica di π è data dunque da $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$, per $s, t \in \mathbf{R}$, ossia

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbf{R}.$$

Esempio 5.6 (*Intersezioni*)

1. Siano dati due piani π_1 e π_2. Come calcolare l'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2$? Se π_1 e π_2 sono dati mediante equazioni cartesiane, c'è da risolvere un sistema lineare di due equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3. Se l'intersezione di due piani non è una retta, ci sono due possibilità:

– *i due piani sono paralleli.* Questo corrisponde al caso in cui il sistema corrispondente non ha soluzioni. Ad esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{cases}$$

è incompatibile e i due piani $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$ e $2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3$ sono paralleli.

– *I due piani coincidono.* Questo corrisponde al caso in cui le equazioni del sistema corrispondente hanno esattamente le stesse soluzioni, dipendenti da due parametri liberi. Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{cases}$$

è equivalente al sistema "a scala"

$$\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni hanno x_2 ed x_3 come parametri liberi. Se uno dei due piani è dato in forma parametrica, ci si può ricondurre al caso di due equazioni cartesiane con i metodi sopra esposti. Per esempio, sia π_1 il piano di equazione

$$x_1 + 2x_3 = 2$$

e sia π_2 il piano dato da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbf{R}.$$

Allora un vettore normale a π_2 è dato da $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, per cui un'equazione cartesiana di π_2 è

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1.$$

Per calcolare l'intersezione dei due piani, risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 & + & & + & 2x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1. \end{cases}$$

Sommando due volte la prima equazione alla seconda, troviamo il sistema "a scala"

$$\begin{cases} x_1 & + & & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 3. \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = s$ come parametro libero, ricaviamo $x_2 = (3-5s)/2 = 3/2 - 5s/2$ ed $x_1 = 2 - 2s$. In conclusione, l'intersezione è una retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 - 2s \\ 3/2 - 5/2 \cdot s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -5/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbf{R}.$$

2. Sia π un piano in $\mathbf{R}^3$ dato in forma cartesiana e sia l una retta in forma parametrica. La loro intersezione consiste nei punti della retta l che soddisfano l'equazione di π. Per esempio, sia π il piano di equazione $2x_1 - 3x_3 = 1$ e sia l la retta data da

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Allora un punto $\mathbf{x}$ della retta l è contenuto in π se e soltanto se

$$2(1 + 2s) + 0(1 + 5) - 3(-1 + s) = 1,$$

cioè se e solo se $s = -4$. Questo valore di s corrisponde all'unico punto di intersezione $\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Può succedere che la retta sia paralella a π oppure contenuta in π. Nel primo caso nessun punto della retta soddisfa l'equazione del piano, nel secondo la soddisfano tutti.

3. Siano l ed m due rette in $\mathbf{R}^3$. Ci sono tre possibilità: le rette si intersecano in un punto, le rette coincidono, le rette sono parallele oppure sono "sghembe". Due rette sono sghembe se non hanno punti in comune e non sono parallele.

Fig.13. Due rette sghembe.

Consideriamo, ad esempio, le rette l ed m di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Le rette l ed m non sono parallele. Per trovare l'intersezione di l ed m poniamo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e risolviamo il sistema lineare di tre equazioni nelle incognite s e t. Si verifica facilmente che il sistema non ha soluzioni e le due rette sono sghembe.

Lasciamo al lettore il compito di trovare metodi per calcolare l'intersezione di due rette l ed m quando non sono date entrambe in forma parametrica. Il principio è sempre quello di trovare i punti che soddisfano sia le equazioni di l che quelle di m. Alla fine ci si riconduce sempre a risolvere un sistema lineare.

Teorema 5.7. *Sia* $\mathbf{p}$ *un punto in* $\mathbf{R}^3$ *e sia* π *il piano di equazione*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Allora, la distanza di $\mathbf{p}$ *dal piano* π *è data da*

$$\frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è un vettore normale a π, la retta l perpendicolare a π e passante per $\mathbf{p}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Per calcolare il punto di intersezione $\mathbf{q}$ fra l e π, sostituiamo il punto generico di l nell'equazione del piano

$$a(p_1 + sa) + b(p_2 + sb) + c(p_3 + sc) + d = 0$$

e ricaviamo s

$$s = -\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il punto $\mathbf{q}$ corrispondente è:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

La distanza fra $\mathbf{p}$ e il piano π è uguale alla distanza fra $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$

$$d(\mathbf{p}, \pi) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \| \frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \| = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

come richiesto.

Esempio 5.8. (*distanza fra due rette sghembe*) Come calcolare la distanza fra due rette sghembe l ed m in $\mathbf{R}^3$? Un metodo è quello di calcolare un'equazione cartesiana di un piano π che *passa* per una delle due rette ed *è parallelo* all'altra. Dopodiché la distanza $d(l, m)$ è uguale alla distanza fra π e un qualsiasi punto dell'altra retta. Per esempio, siano l ed m le rette date da

$$l : \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad m : \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Per trovare un'equazione parametrica del piano π contenente m e parallelo ad l, calcoliamo prima un'equazione parametrica di l:

$$l: \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Il piano π ha vettore normale $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e contiene il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; dunque un'equazione cartesiana di π è data da $-x_1 + 2x_2 = 2$. Prendiamo infine il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sulla retta l. Allora la distanza $d(l, m)$ è uguale alla distanza fra π e $\mathbf{p}$, cioè

$$d(l, m) = d(\mathbf{p}, \pi) = \frac{|-1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Fig.14. La distanza fra l ed m.

Definizione. Una *sfera* in $\mathbf{R}^3$ di centro $\mathbf{c}$ e raggio r è l'insieme dei punti che ha distanza uguale ad r da $\mathbf{c}$.

Siccome i punti $\mathbf{x}$ sulla sfera di centro $\mathbf{c}$ e raggio r sono i punti che soddisfano

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = r,$$

l'equazione della sfera è data da

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = r^2.$$

Proposizione 5.9. *Sia $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = r^2$ una sfera S in $\mathbf{R}^3$ di centro $\mathbf{c}$ e raggio r. Un'equazione del piano tangente alla sfera nel punto $\mathbf{q} \in S$ è data da*

$$(q_1 - c_1)(x_1 - q_1) + (q_2 - c_2)(x_2 - q_2) + (q_3 - c_3)(x_3 - q_3) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x}$ un punto arbitrario su detta tangente. Poiché il piano tangente in $\mathbf{q}$ è perpendicolare alla retta passante per $\mathbf{q}$ ed il centro della sfera $\mathbf{c}$, si ha che:

$$(\mathbf{q}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{q})=0$$

come richiesto.

Fig.15. Il piano tangente alla sfera nel punto $\mathbf{q}$.

Esempio 5.10. (*Intersezione fra una retta e una sfera*) Consideriamo ora il problema di calcolare l'intersezione fra una retta ed una sfera tramite un esempio esplicito. Sia S la sfera di equazione

$$(x_1-2)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2=9$$

e sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\qquad t\in\mathbf{R}.$$

Per calcolare l'intersezione $S\cap l$ sostituiamo il punto generico della retta l nell'equazione della sfera S:

$$((1+t)-2)^2+((3+t)-1)^2+((1+2t)-1)^2=9.$$

L'equazione diventa $6t^2+2t-4=0$. Risolvendo troviamo $t=-1$ oppure $t=2/3$, corrispondenti ai punti di intersezione

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad\mathbf{y}=\begin{pmatrix}5/3\\11/3\\7/3\end{pmatrix}.$$

In generale, a seconda che l'equazione quadratica in t ammetta due, una o nessuna soluzione reale, si ha rispettivamente che la retta interseca la sfera in due punti, un punto (in questo caso la retta è tangente alla sfera) o nessun punto.

Analogamente, l'intersezione di una sfera con un *piano* può essere una circonferenza in $\mathbf{R}^3$, un punto (caso di un piano tangente), o può essere vuota. Osserviamo che è impossibile descrivere una circonferenza in $\mathbf{R}^3$ tramite una sola equazione di grado 2.

Esempio 5.11. Dati un piano π ed una sfera S in $\mathbf{R}^3$, come calcolare il *raggio* della circonferenza $\pi \cap S$? Basterà calcolare la distanza d fra il centro $\mathbf{c}$ della sfera ed il piano π e poi applicare il Teorema di Pitagora come nella Figura 16.

Fig.16. Il raggio della circonferenza $\pi \cap S$.

Per esempio, consideriamo π il piano di equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 1$ e la sfera S di equazione $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 = 5$. La distanza d fra il centro della sfera $\mathbf{c}$ ed il piano π è

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Il raggio della sfera è uguala a $\sqrt{5}$. Il raggio r della circonferenza $\pi \cap S$ soddisfa

$$r^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = (\sqrt{5})^2,$$

da cui si ricava $r = \sqrt{11/3}$.

Esercizi.

(5.A) Sia $\mathbf{x}$ il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Trovare altri tre punti sulla retta r passante per $\mathbf{0}$ ed $\mathbf{x}$.

(5.B) Siano $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ due vettori in $\mathbf{R}^3$.

(i) Calcolare il punto medio fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(ii) Trovare altri tre punti sul piano che passa per $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(iii) Trovare un'equazione parametrica della retta passante per $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$.

(5.C) Siano π e π' due piani in $\mathbf{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0, \qquad 3x_1 + x_3 - 2 = 0.$$

(i) Trovare equazioni parametriche per π e π'.
(ii) Calcolare un'equazione parametrica per la retta intersezione $\pi \cap \pi'$.

(5.D) Siano π_1 e π_2 due piani in $\mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbf{R}$$

e

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u, v \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare un'equazione cartesiana dell'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2$.
(ii) Calcolare un'equazione parametrica dell'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2$.

(5.E) Siano l e m le rette in $\mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare l'intersezione $l \cap m$.
(ii) Trovare una retta che incontra sia l che m.

(5.F) Sia π il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x_1 - 2x_3 = 3$.
(i) Trovare un vettore normale a π.
(ii) Trovare un altro vettore normale a π.
(iii) Calcolare un'equazione parametrica per π.
(iv) Calcolare un'altra equazione parametrica per π.

(5.G) Sia l la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Sia m la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare l'intersezione di l ed m.
(ii) Calcolare l'angolo fra l ed m.

(5.H) Sia π il piano di equazione $2x_1 + x_2 - x_3 + 3 = 0$. Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(i) Calcolare un'equazione cartesiana per il piano π_1 che passa per $\mathbf{p}$ ed è parallelo a π.
(ii) Calcolare un'equazione parametrica per la retta l che passa per $\mathbf{p}$ ed è ortogonale a π.
(iii) Trovare i punti di intersezione $\pi \cap l$ e $\pi_1 \cap l$.
(iv) Calcolare la distanza fra i due punti nella parte (iii).

(5.I) Sia $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare la proiezione ortogonale del punto $\mathbf{q}$ sul piano π
(ii) Calcolare la distanza fra $\mathbf{q}$ e π.

(5.J) Sia $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R}.$$

(i) Calcolare la distanza fra $\mathbf{p}$ e π.
(ii) Calcolare la proiezione ortogonale di $\mathbf{p}$ su π.
(iii) Calcolare le coordinate del punto $\mathbf{q}$ simmetrico di $\mathbf{p}$ rispetto a π.

(5.K) Sia S la sfera di equazione $(x_1+1)^2+x_2^2+(x_3+2)^2=4$.
(i) Far vedere che $\mathbf{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ sta sulla sfera S. Trovare un altro punto sulla sfera.
(ii) Calcolare il piano π tangente ad S nel punto $\mathbf{p}$.
(iii) Calcolare il piano π' tangente ad S nel punto $\mathbf{q}$.

(5.L) Sia S la sfera di equazione $(x_1-1)^2+(x_2-2)^2+(x_3+2)^2=4$. Sia π il piano di equazione $x_1+x_2+x_3=2$.
(i) Calcolare la distanza fra π e il centro di S.
(ii) Far vedere che l'intersezione $S\cap\pi$ è una circonferenza. Calcolarne il raggio.

(5.M) Sia $\mathbf{p}\in\mathbf{R}^3$ il punto di coordinate $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ e sia m la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad s\in\mathbf{R}.$$

(i) Calcolare un'equazione cartesiana del piano che passa per m e $\mathbf{p}$.
(ii) Calcolare un'equazione parametrica della retta l passante per $\mathbf{p}$ e perpendicolare ad m.
(iii) Calcolare il punto di intersezione $l\cap m$.
(iv) Calcolare la distanza fra $\mathbf{p}$ e la retta m.

6. Trasformazioni in $\mathbf{R}^3$.

In questo paragrafo studiamo alcune trasformazioni geometriche dello spazio $\mathbf{R}^3$. Per trasformazioni si intendono sempre delle applicazioni bigettive $f:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3$.

Definizione. Sia $\mathbf{p}$ un vettore di $\mathbf{R}^3$. La *traslazione* $T_{\mathbf{p}}$ di passo $\mathbf{p}$ è l'applicazione $T_{\mathbf{p}}:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3$ data da

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+p_1\\x_2+p_2\\x_3+p_3\end{pmatrix}.$$

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

Proposizione 6.1.
(i) Siano $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{R}^3$. Allora $T_{\mathbf{p}}\circ T_{\mathbf{q}}=T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}=T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}=T_{\mathbf{q}}\circ T_{\mathbf{p}}$. In particolare, la composizione di due traslazioni è una traslazione.
(ii) La traslazione $T_{\mathbf{0}}$ è l'applicazione identica.
(iii) La traslazione $T_{-\mathbf{p}}$ è l'inversa di $T_{\mathbf{p}}$, ossia $T_{\mathbf{p}}\circ T_{-\mathbf{p}}=(T_{-\mathbf{p}}\circ T_{\mathbf{p}})=T_{\mathbf{0}}$ è l'applicazione identica.

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella della Prop.3.1 ed è lasciata al lettore.

Un'altra famiglia di trasformazioni di $\mathbf{R}^3$ sono le *dilatazioni.*

Definizione. Siano $\lambda,\mu,\rho\in\mathbf{R}$, $\lambda,\mu,\rho>0$. La dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ di $\mathbf{R}^3$ è l'applicazione $D_{\lambda,\mu,\rho}:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3$ definita da

$$D_{\lambda,\mu,\rho}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\mu x_2\\\rho x_3\end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda,\mu,\rho}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Se $\lambda = \mu = \rho > 0$, la dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ è semplicemente un "ingrandimento" di fattore $\lambda = \mu = \rho$. In generale, $D_{\lambda,\mu,\rho}$ è un ingrandimento di fattore λ nella direzione dell'asse delle x_1, di fattore μ nella direzione dell'asse delle x_2 e di fattore ρ nella direzione dell'asse delle x_3.

Introduciamo adesso le *rotazioni* e le riflessioni in $\mathbf{R}^3$. La teoria è un po' più complicata di quella in $\mathbf{R}^2$. Cominciamo con le rotazioni e le riflessioni in forma standard e poi trattiamo il caso generale.

Definizione. Sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Indichiamo con $R_\varphi\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione che ad un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ associa il vettore $\mathbf{x}$ ruotato di un angolo φ intorno al vettore $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $\varphi > 0$, la rotazione indotta sul piano (x_2, x_3) va intesa in senso antiorario (vedi Cap. 3). Se $\varphi < 0$, la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso "orario".

Fig.17. La rotazione R_φ.

Teorema 6.2. *Sia $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ e sia $\varphi \in \mathbf{R}$. Le coordinate del punto $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$ sono date da*

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \cos(\varphi)x_2 - \operatorname{sen}(\varphi)x_3, \\ y_3 &= \operatorname{sen}(\varphi)x_2 + \cos(\varphi)x_3. \end{aligned}$$

In notazione matriciale

$$R_\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Questa formula segue dalla formula del Teorema 3.2 per la rotazione R_φ in $\mathbf{R}^2$ di centro $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^2$ e angolo φ.

Per esempio, la rotazione $R_{\pi/4}$ in $\mathbf{R}^3$ è data da

$$R_{\pi/4}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_3 \end{pmatrix}.$$

Osservazione. Come ottenere le formule della rotazione di un angolo φ intorno ad una retta arbitraria che passa per $\mathbf{0}$? Inanzitutto, notiamo che il problema non è ben posto se la retta non è orientata: non è chiaro infatti in quale direzione si deve fare la rotazione. Se la retta è orientata, per fissare il *senso* della rotazione parleremo di *rotazione di un angolo* φ *intorno ad un vettore* $\mathbf{v}$ con direzione e verso uguali a quelli della retta. Un metodo naturale per ottenere le formule di una rotazione $R_{\varphi,\mathbf{v}}$ di angolo φ intorno ad una vettore $\mathbf{v}$ diverso da $\mathbf{e}_1$, è il seguente.

Sia $\mathbf{e}'_1$ un vettore parallelo a $\mathbf{v}$ e *di lunghezza* 1. Scegliamo poi due vettori $\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 \in \mathbf{R}^3$ di lunghezza 1, in modo che $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ siano ortogonali fra loro ed orientati positivamente. I vettori $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ formano in particolare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$. I vettori $\mathbf{e}'_2$ e $\mathbf{e}'_3$ con queste proprietà possono essere scelti in infiniti modi. Siano $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ le coordinate di un generico vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, rispetto a questa base. Per il teorema 6.2, rispetto a questa base, la rotazione è data da

$$R_{\varphi,\mathbf{v}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cos(\varphi)x'_2 - \operatorname{sen}(\varphi)x'_3 \\ \operatorname{sen}(\varphi)x'_2 + \cos(\varphi)x'_3 \end{pmatrix} = A'_\varphi \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

dove

$$A'_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

è la matrice rappresentativa corrispondente. Sia M la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$; le colonne di M sono i vettori della base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ espressi nella base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. La matrice rappresentativa $A_{\varphi,\mathbf{v}}$ di $R_{\varphi,\mathbf{v}}$ rispetto alla base canonica è data dunque da

$$A_{\varphi,\mathbf{v}} = MA'_{\varphi,\mathbf{v}}M^{-1}.$$

Esempio 6.3. Calcoliamo le formule della rotazione di un angolo $\pi/4$ intorno al vettore

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale per $\mathbf{R}^3$, orientata positivamente. La matrice rappresentativa della rotazione $R_{\pi/4}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ è data da

$$A'_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice M del cambiamento di base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} \to \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è data da

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice rappresentativa $A_{\pi/4}$ della rotazione rispetto alla base canonica è quindi data da

$$A_{\pi/4} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Osservazione. Come calcolare le formule della rotazione R di un angolo φ rispetto ad una retta orientata l che non passa per l'origine? La strategia è di traslare la retta l nell'origine, di ruotare di un angolo φ intorno ad un vettore $\mathbf{v}$ con direzione e verso uguali ad l, e di ritraslare infine la retta "dov'era".

Esempio 6.7. Calcoliamo ad esempio la rotazione di un angolo $\pi/3$ rispetto alla retta l di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Cominciamo con una traslazione che porta l in una retta per l'origine $\mathbf{0}$. Per esempio la traslazione $T_{\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}$ di passo $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ porta l nella retta m, parallela ad l e passante per l'origine. La retta m ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

e coincide con l'asse delle x_2. Fissiamo il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ paralello ad m. Rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$, orientata positivamente, la matrice rappresentativa della rotazione $R_{\pi/3}$ è data da

$$R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa della rotazione intorno a $\mathbf{v}$ risulta

$$R_{\pi/3,\mathbf{v}} = MR_{\pi/3}M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad l sono quindi

$$R = T_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} R_{\pi/3,\mathbf{v}} T_{\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}$$

ossia

$$R\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo adesso che la retta l, e quindi la retta m, abbia l'orientazione opposta. Il vettore $\mathbf{v}' = -\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha la direzione e il verso di m. In questo caso, la base $\mathcal{B}'' = \{-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ è ortonormale ed orientata positivamente ed il cambiamento di base da $\mathcal{B}''$ alla base canonica è dato dalla matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rispetto alla base $\mathcal{B}''$ la matrice rappresentativa della rotazione è ancora $R_{\pi/3}$, ma rispetto alla base canonica troviamo adesso la matrice

$$R_{\pi/3,\mathbf{v}'} = NR_{\pi/3}N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

In totale, le formule della rotazione intorno ad l risultano quindi

$$R'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Definizione. Sia $S : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione rispetto al piano di equazione $x_3 = 0$. Abbiamo

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix},$$

ed in forma matriciale,

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Fig.18. La riflessione S rispetto al piano $x_3 = 0$.

La riflessione rispetto ad una retta l è un particolare tipo di rotazione, precisamente la rotazione di un angolo di 180 gradi intorno alla retta stessa. In questo caso, il risultato non dipende dall'orientazione di l.

Definizione. La riflessione U rispetto all'origine $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^3$ è data dalla formula

$$U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix},$$

oppure, in notazione matriciale, da

$$U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Fig.19. La riflessione U rispetto all'origine $\mathbf{0}$.

Esempio. (*riflessione rispetto ad un piano arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula per la riflessione S_π rispetto ad un arbitrario piano π mediante un esempio esplicito. Sia π il piano di equazione $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$. Sia $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ un punto arbitrario. La retta l che passa per $\mathbf{p}$ ed è perpendicolare a π è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

L'intersezione $l \cap \pi$ è un punto $\mathbf{q}$ che corrisponde al valore del parametro

$$t = t_0 = \frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9}.$$

Siccome $\mathbf{p}$ corrisponde a $t = 0$, il punto $S_\pi(\mathbf{p})$, simmetrico di $\mathbf{p}$ rispetto a π, corrisponde a $t = 2t_0$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} S_\pi\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2t_0\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + 2\frac{4 - p_1 + 2p_2 - 2p_3}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8/9 \\ -16/9 \\ 16/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fig.20. La riflessione S_π rispetto al piano π.

Osservazione In generale, la riflessione S_π rispetto ad un piano π non è un'applicazione lineare, ma è una applicazione lineare seguita da una traslazione. La riflessione S_π è lineare se e soltanto se π passa per l'origine $\mathbf{0}$.

Esempio. (*riflessione rispetto ad un punto arbitrario*) Spieghiamo adesso come ottenere la formula della riflessione rispetto ad un punto arbitrario, tramite un esempio esplicito. Sia $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ un punto fissato e sia $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$ un punto arbitrario. Sia $U_\mathbf{q}(\mathbf{p})$ il punto simmetrico di $\mathbf{p}$ rispetto a $\mathbf{q}$. Poiché il centro di riflessione $\mathbf{q}$ è il punto medio fra $\mathbf{p}$ e $U_\mathbf{q}(\mathbf{p})$ si ha che $\mathbf{q} = 1/2(\mathbf{p} + U_\mathbf{q}(\mathbf{p})$. Di conseguenza

$$U_\mathbf{q}(\mathbf{p}) = 2\mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 - p_1 \\ -2 - p_2 \\ 4 - p_3 \end{pmatrix}.$$

Osservazione. Tutte le trasformazioni lineari di $\mathbf{R}^3$ mandano rette in rette e piani in piani. Lo stesso vale per le traslazioni e dunque per la composizione di trasformazioni lineari e traslazioni. Se M è la matrice rappresentativa di una trasformazione lineare di $\mathbf{R}^3$ ed r è una retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R},$$

la retta immagine di R tramite M ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, se π è un piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R},$$

il piano immagine di π tramite M ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = M\mathbf{p} + tM\mathbf{v} + sM\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Analogamente, se $T_\mathbf{q}$ è luna traslazione di passo $\mathbf{q}$ in $\mathbf{R}^3$, l'immagine di r tramite $T_\mathbf{q}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R};$$

l'immagine di π tramite $T_{\mathbf{q}}$ ha equazione parametrica

$$\mathbf{x} = (\mathbf{p}+\mathbf{q}) + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Osservazione. Per concludere osserviamo che, in generale, una trasformazione lineare f di $\mathbf{R}^3$ preserva l'orientazione se e soltanto se $\det(f) > 0$. Le rotazioni $R_{\varphi,\mathbf{v}}$ preservano l'orientazione della base canonica di $\mathbf{R}^3$ e le loro matrici rappresentative hanno sempre determinante uguale a 1. Le riflessioni S ed U invece cambiano l'orientazione della base canonica di $\mathbf{R}^3$ e le loro matrici rappresentative hanno determinante uguale a -1. Le dilatazioni $D_{\lambda,\mu,\rho}$ preservano l'orientazione in quanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Or}(D_{\lambda,\mu,\rho}(\mathbf{v}), D_{\lambda,\mu,\rho}(\mathbf{w}), D_{\lambda,\mu,\rho}(\mathbf{u})) &= \mathrm{Or}\left(\begin{pmatrix}\lambda v_1\\ \mu v_2\\ \rho v_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda w_1\\ \mu w_2\\ \rho w_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda u_1\\ \mu u_2\\ \rho u_3\end{pmatrix}\right),\\ &= \lambda\mu\rho\mathrm{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}).\end{aligned}$$

Esercizi.

(6.A) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

(i) Trovare le formule per la traslazione $T_{\mathbf{p}}$.

(ii) Calcolare $T_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $T_{\mathbf{p}}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

(iii) Calcolare $T_{3\mathbf{p}}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $T_{3\mathbf{p}}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

(iv) Calcolare $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}})\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}})\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$.

(6.B) Sia $D_{2,5,3}$ la dilatazione data dalla matrice $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(i) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ tale che $D_{\lambda,\mu,\rho} \circ D_{2,5,3}$ sia l'applicazione identica.

(ii) Trovare una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ tale che $D_{2,5,3} \circ D_{\lambda,\mu,\rho}$ sia l'applicazione identica.

(6.C) Sia C il cubo in $\mathbf{R}^3$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}.$$

(i) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?

(ii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione R_{π} intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?

(iii) Quali sono i vertici di C dopo la rotazione $R_{3\pi/2}$ intorno al vettore $\mathbf{e}_3$?

(6.D) Sia C il cubo in $\mathbf{R}^3$ di vertici

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(i) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $\mathbf{e}_3$.
(ii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $\mathbf{e}_1$.
(iii) Disegnare l'immagine di C dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ intorno a $-\mathbf{e}_1$.
(iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?

(6.E) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.

(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ di un angolo $\pi/2$ intorno a $\mathbf{v}$.
(ii) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ di un angolo $-\pi/4$ intorno a $\mathbf{v}$.
(iii) Sia l la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ a l.
(iv) Sia π il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ a π.

(6.F) Sia π il piano di equazione $x_1 + 2x_2 = 0$.

(i) Calcolare le formule della riflessione rispetto a π.
(ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

(iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

(6.G) Sia C il cubo dell'Eserc.6.C. Calcolare l'immagine di Q dopo la riflessione rispetto

(i) al piano (x_1, x_2).
(ii) al piano (x_2, x_3).
(iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.

(6.H) Sia C il cubo dell'Eserc.6.D. Calcolare l'immagine di C dopo la riflessione rispetto

(i) al piano (x_1, x_2).
(ii) al piano (x_2, x_3).
(iii) al piano di equazione $x_1 = x_2$.
(iv) Trovare tutte le riflessioni S_π che mandano C in se stesso.

(6.I) Siano $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(i) Calcolare la formula per la riflessione $U_{\mathbf{p}}$ rispetto al punto $\mathbf{p}$.

(ii) Calcolare la formula per la riflessione $U_{\mathbf{q}}$ rispetto al punto $\mathbf{q}$.

(iii) Calcolare le formule per la trasformazione $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$ e per $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$.

(iv) Geometricamente, che cosa fanno le trasformazioni $U_{\mathbf{p}} \circ U_{\mathbf{q}}$ e $U_{\mathbf{q}} \circ U_{\mathbf{p}}$?

(6.J) Sia π il piano di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad t, s \in \mathbf{R}$$

e sia π' il piano di equazione $x_3 = 0$.

(i) Trovare le formule della riflessione S_π rispetto a π.

(ii) Calcolare le formule della riflessione $S_{\pi'}$ rispetto a π'.

(iii) Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S_\pi \circ S_{\pi'}.$$

(iv) Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S_{\pi'} \circ S_\pi.$$

(6.K) Dimostrare che una dilatazione $D_{\lambda,\mu,\rho}$ conserva le direzioni delle rette e dei piani se e solo se $\lambda = \mu = \rho$.