1. Dimostrare che il polinomio $X^2 - X + 2$ ha due zeri in $\mathbf{Z}_2$ e calcolarne le prime quattro cifre 2-adiche. Far vedere che -7 è un quadrato in $\mathbf{Z}_2$.
2. Sia p un numero primo e sia $|z|$ il valore assoluto di un numero p-adico z. Dimostrare che ogni $x \in \mathbf{Z}_p$ con $|x| < 1$, è centro della circonferenza p-adica $C = \{y \in \mathbf{Z}_p : |y| = 1\}$. Più precisamente, far vedere che $|y - x| = 1$ per ogni $y \in C$.
3. (a) Per ogni primo p determinare le cifre $a_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ di $-1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$.
   (b) Dimostrare che -1 è un quadrato in $\mathbf{Z}_p$ se e soltanto se $p \equiv 1 \pmod 4$.
   (c) Con una precisione di due cifre 13-adiche, calcolare $i \in \mathbf{Z}_{13}$ tale che $i^2 = -1$.
4. Dimostrare che $\mathbf{Q}_p$ contiene una radice primitiva p-esima dell'unità se e soltanto se $p = 2$.
5. Sia p un numero primo e sia $x \in \mathbf{Z}$.
   (a) Dimostrare che la successione x^{p^k} $(k \to \infty)$ converge in $\mathbf{Z}_p$.
   (b) Dimostrare che il limite λ della parte (a) soddisfa $\lambda^p = \lambda$.
6. Sia $U = \mathbf{Z}_2^* - \{-\frac{1}{3}\}$. Per $x \in U$ sia $f(x) = (3x+1)/2^k$, dove $k = \mathrm{ord}_2(3x+1)$.
   (a) Dimostrare che f è una funzione da U in U che è continua per la topologia 2-adica.
   (b) Calcolare $f(m)$ per $m = 1, 3, 5, \ldots, 13$.
   (c) Una congettura classica afferma che per ogni $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ dispari, la succesione m, $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, $\ldots$ si stabilizza al valore 1. Verificare la congettura per $1 \le m \le 25$.
   (d) Verificare la congettura per $m = 27$.
7. Sia G un gruppo finito e sia $\mathbf{Z}[G]$ l'algebra gruppale di G.
   (a) Far vedere che l'omomorfismo $f : \mathbf{Z}[G] \longrightarrow \mathbf{Z}$ determinato da $f[g] = 1$ per ogni $g \in G$, è uno $\mathbf{Z}[G]$-morfismo suriettivo.
   (b) Sia $I \subset \mathbf{Z}[G]$ il nucleo del morfismo della parte (a). Calcolare la successione dei gruppi degli elementi G-invarianti associata alla successione esatta
   $$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{f} \mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$
8. Sia $\ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0$ una successione esatta di gruppi abeliani liberi. Dimostrare che per ogni gruppo abeliano M la successione indotta
   $$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(F_0, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F_1, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F_2, M) \longrightarrow \ldots$$
   è esatta.
9. Sia R un anello e sia M un R-modulo sinistro.
   (a) Far vedere che $M^\vee = \mathrm{Hom}(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ ammette una struttura naturale di R-modulo destro.
   (b) Siano A, B due R-moduli sinistri e sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un R-morfismo suriettivo. Far vedere che il morfismo $\varphi^\vee : B^\vee \longrightarrow A^\vee$ indotto è iniettivo.
   (c) Similmente, far vedere che se il morfismo φ della parte (b) è iniettivo, allora $\varphi^\vee$ è suriettivo.
10. Per ogni successione qui sotto, esibire degli omomorfismi che la rendono esatta o dimostrare che non possono esistere.
    (a)
    $$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/16\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \longrightarrow 0;$$
    (b)
    $$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \longrightarrow 0;$$
    (c)
    $$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$