

1. Sia R un anello (commutativo con 1). Per $x \in R$ sia $1 + Rx = \{1 + yx : y \in R\}$.
 - (a) Dimostrare che gli elementi $x \in R$ per cui $1 + Rx \subset R^*$ formano un ideale: *il radicale di Jacobson*.
 - (b) Dimostrare che l'intersezione di tutti gli ideali massimali di R è uguale al radicale di Jacobson.
2. Sia R un anello (commutativo con 1). Un elemento $x \in R$ si dice *nilpotente* se $x^n = 0$ per un certo $n > 0$.
 - (a) Dimostrare che l'insieme $\text{Nil}(R)$ degli elementi nilpotenti di R è un ideale.
 - (b) Dimostrare che $\text{Nil}(R)$ è uguale all'intersezione di tutti gli ideali primi di R .
3. Sia $N = \mathbf{Z}^n$ e sia $v = (x_1, \dots, x_n)$ un elemento non nullo di N . Trovare una condizione necessaria e sufficiente sulle coordinate di v affinché $M = \mathbf{Z}v$ sia fattore diretto di N .
4. Sia R un anello e siano $I, J \subset R$ due ideali che soddisfano $I + J = R$.
 - (a) Dimostrare che $IJ = I \cap J$.
 - (b) (Teorema Cinese del resto) Dimostrare che il morfismo di R -moduli

$$R/IJ \longrightarrow R/I \times R/J$$
 che manda $x \pmod{IJ}$ nella coppia $(x \pmod{I}, x \pmod{J})$ è un isomorfismo.
 - (c) Costruire un isomorfismo di R -moduli

$$I \oplus J \xrightarrow{\cong} IJ \oplus R.$$

5. Sia R il sottoanello di $\mathbf{C}$ dato da $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-6}] = \{a + b\sqrt{-6} : a, b \in \mathbf{Z}\}$. Siano I l'ideale $(2, \sqrt{-6})$ e J l'ideale $(3, \sqrt{-6})$ di R .
 - (a) Dimostrare che $I + J = R$.
 - (b) Dimostrare che IJ è principale.
 - (c) Esibire un isomorfismo $I \longrightarrow J$ di R -moduli.
 - (d) Dimostrare che I e J sono R -moduli proiettivi non liberi.
6. (Lemma di Schanuel) Sia R un anello e siano

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & P & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$
 due successioni esatte di R -moduli. Supponiamo che P e P' siano moduli proiettivi. Allora gli R -moduli $A \times P'$ e $A' \times P$ sono isomorfi.
7. Sia p un numero primo e G un gruppo finito abeliano. Dimostrare che l'anello $R = \mathbf{F}_p[G]$ è un R -modulo iniettivo. (Sugg. $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(R, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ ed R sono R -moduli isomorfi).
8. Sia k un campo e sia $R = k^{\mathbf{Z}}$ l'anello delle funzioni $f : \mathbf{Z} \longrightarrow k$. Sia $I = \{f \in R : f(x) = 0 \text{ per quasi ogni } x \in \mathbf{Z}\}$.
 - (a) Dimostrare che I è un ideale di R .
 - (b) Dimostrare che R è un R -modulo iniettivo.
 - (c) Dimostrare che I non è iniettivo, ma è proiettivo.
9. Sia R un anello (commutativo con 1). Dimostrare che $\text{Spec}(R)$ è sconnesso se e solo se l'anello R è isomorfo a $A \times B$ per due anelli A, B non nulli.