30 Giugno 2015

Esame scritto di Geometria per Ingegneria (lettera P-Z, Salvatore)

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando brevemente i procedimenti svolti.

1) In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio U generato dai vettori $\{(2,1,0),(-1,0,2),(1,2,6)\}$.

Si estragga una base di U dal sistema di generatori.

Si consideri inoltre il sottospazio $V = \{(x,y,z)|x+y-z=0\}$. Si determini una base di $U \cap V$.

Si scriva il vettore $(1,0,0)$ come somma di un vettore di U e di uno di V. Tale scrittura é unica?

Soluzione: Il rango della matrice che ha i vettori per colonna é 2, con i pivot nella prima e nella seconda colonna, e quindi i primi due vettori formano una base di U.

Sostituendo nell'equazione parametrica di V il generico vettore di U $(2x-y,x,2y)$ si trova che $U \cap V$ ha dimensione 1 generato da $(1,1,2)$.

Possiamo scrivere $(1,0,0) = (-1,0,2) + (2,0,2)$, e la scrittura non é unica in quanto l'intersezione non é nulla.

2) Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2x2. Si consideri l'applicazione $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $T(X) = AX - XA$, dove

$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ e

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Determinare una base di $Im(T)$ e una di $Ker(T)$.

Si dica se T é suriettiva e se é iniettiva.

Soluzione: lo spazio vettoriale della matrici ha dimensione 4. Applicando T ai vettori della base canonica e svolgendo i calcoli troviamo che il nucleo ha dimensione 2 generato da A e dall'identitá I. L'immagine ha dimensione 2 generata da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e da $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Si consideri nello spazio euclideo la retta r definita da

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+z=0. \end{cases}$$

Si scriva l'equazione cartesiana del piano π ortogonale a r passante per il punto $(1, 0, 1)$. Si determini il punto $P = \pi \cap r$.

Sia s la retta giacente su π, incidente a r, e incidente all'asse x in un punto che chiamiamo Q.

Si determini l'angolo tra le rette r e s.

Si determini l'area del triangolo OPQ dove O é l'origine degli assi.

Soluzione: La retta ha come vettore direttore $(1, -3, -2)$ e quindi il piano é dato da $x - 3y - 2z = -1$ sostituendo le coordinate del punto $(1, 0, 1)$.

Mettendo a sistema con l'equazione della retta troviamo le coordinate di $P\,(1/7, 4/7, -2/7)$.

L'angolo tra r e s é $\pi/2$ in quanto le rette sono ortogonali.

Il punto Q ha coordinate $(-1, 0, 0)$ in quanto intersezione di π con l'asse x.

L'area del triangolo é data da $1/2||OP \wedge OQ|| = \sqrt{5}/7$.

4) Si consideri la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si calcolino gli autovalori reali di B e i relativi autospazi.

Si dica se B é diagonalizzabile.

Si dica se B ammette una base ortonormale di autovettori, e in caso affermativo la si calcoli (ultima domanda solo per l'esame da 6 crediti).

Soluzione: La matrice ha rango 1 dunque 0 é un autovalore di molteplicitá geometrica 2. Una colonna é un 'autovettore relativo all'altro autovalore -1.

Dunque B é diagonalizzabile.

Non esiste una base ortonormale di autovettori in quanto l'autovettore $(1, 0, -1)$ di 0 non é ortogonale agli autovettori di -1.