4 Settembre 2024 Esame scritto di Geometria 4

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si consideri la curva chiusa piana di equazione parametrica, per $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2\cos(t) + \cos(4t) \\ 2\sin(t) + \sin(4t) \end{cases}$$

Si dica se la curva è regolare, e se è biregolare.

Si calcoli la curvatura orientata $\tilde{k}(t)$ per $t = 0$ e se ne studi il segno al variare di t.

Si calcoli l'indice di rotazione di γ.

Si calcoli l'integrale

$$\int_0^\pi \tilde{k}(t)||\gamma'(t)||dt$$

Si disegni approssimativamente la curva.

Svolgimento:

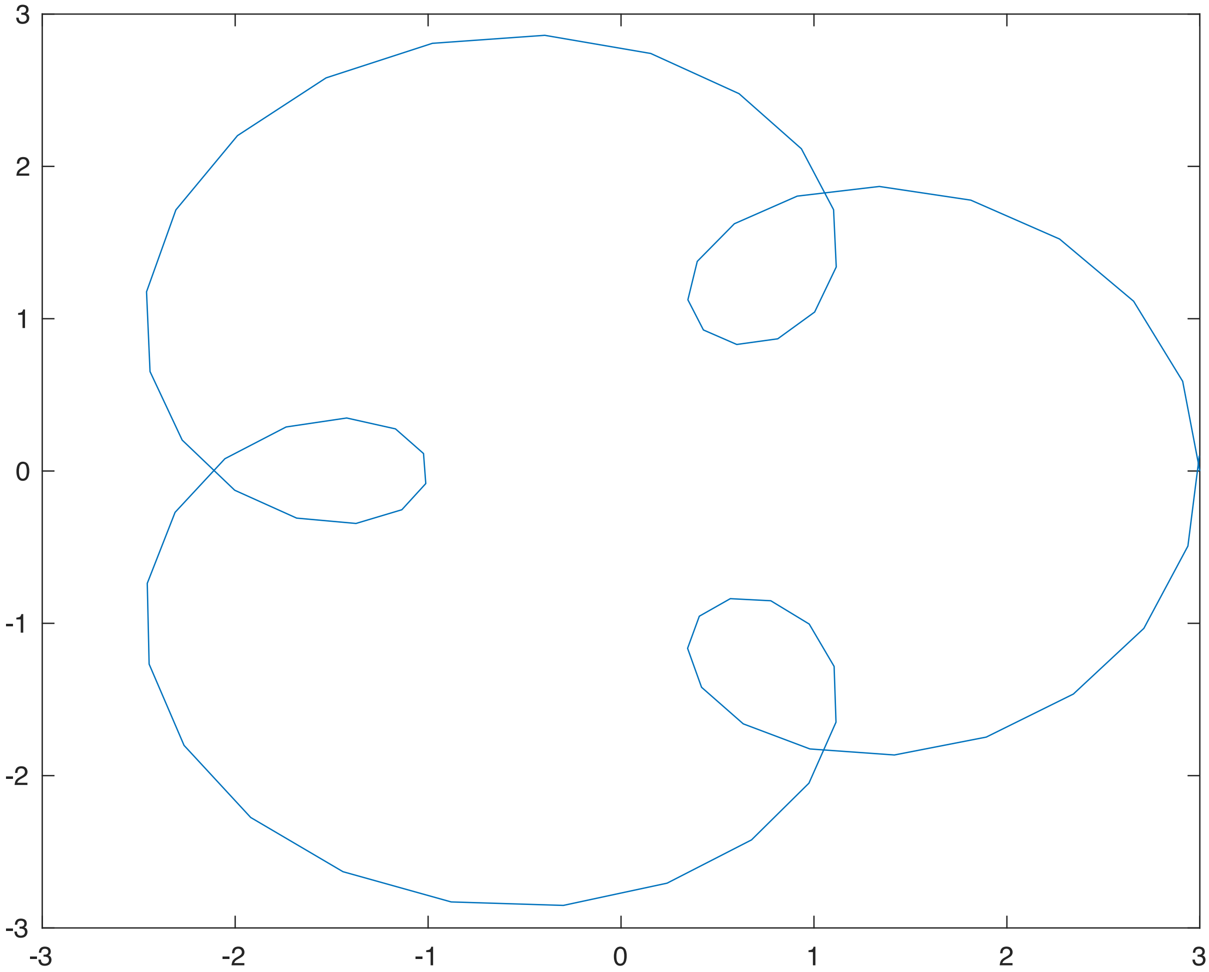
Si verifica che $||\gamma'(t)||^2 = 5 + 4\cos(3t) > 0$ per ogni t dunque γ è regolare.

Scrivendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ si verifica che $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 68 + 40\cos(3t) > 0$ per ogni t, dunque la curva é biregolare. La curvatura orientata $\tilde{k}(t) = (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))/(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}$ é sempre positiva e $\tilde{k}(0) = 1/2$.

L'omotopia $H(t,s) = (2s\cos(t) + \cos(4t), 2s\sin(t) + \sin(4t))$ é regolare e tale che $H(t,1) = \gamma(t)$ e $H(t,0)$ é la circonferenza percorsa 4 volte in verso antiorario, dunque l'indice di rotazione di γ é 4.

Per simmetria e per definizione dell'indice di rotazione

$$\int_0^\pi \tilde{k}(t)||\gamma'(t)||dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tilde{k}(t)||\gamma'(t)||dt = 2\pi 4/2 = 4\pi$$


3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3

2) Si consideri la superficie S di equazione cartesiana

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$$

Si disegni approssimativamente la superficie.

La superficie è regolare?

La superficie è orientabile?

Si scriva una determinazione del versore normale N in ogni punto (x_0, y_0, z_0) di S.

Quante e quali carte locali servono per ricoprire la superficie?

Si consideri la carta locale $U = \{(x, y, z) \in S | z > 0\}$ con parametri $u = x$ e $v = y$.

Si scrivano la I forma fondamentale e la II forma fondamentale in U.

Si determini il tipo di tutti i punti di S.

Nel punto $P = (0, 0, 1)$ si determinino le direzioni principali di curvatura e le curvature principali.

Si calcoli la curvatura geodetica della curva $\{(x, y, z) \in S | y = 0\}$ in ogni suo punto.

Si calcoli l'integrale della curvatura Gaussiana nella regione di S determinata da $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Svolgimento:

La superficie S é un'ellissoide.

ll gradiente di $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ é $\nabla f = (6x, 4y, 2z)$ che non si annulla mai su S, dunque S é regolare.

Per la stessa ragione S é orientabile e possiamo scegliere $N = \nabla f / ||\nabla f||$ su S.

Possiamo ricoprire S con 6 carte in cui le tre coordinate sono rispettivamente positive o negative. in realtá bastano 2 carte, tramite proiezione stereografica da due vertici (intersezioni con un asse coordinato).

Svolgendo i calcoli si trova che

$$E = 1 + 4u^2/(1 - 2u^2 - 3v^2)$$

$$F = 6uv/(1 - 2u^2 - 3v^2)$$

$$G = 1 + 9v^2/(1 - 2u^2 - 3v^2)$$

$$e = \frac{6v^2 - 2}{(1 - 2u^2 - 3v^2)\sqrt{2u^2 + 6v^2 + 1}}$$

$$f = -\frac{6uv}{(1 - 2u^2 - 3v^2)\sqrt{2u^2 + 6v^2 + 1}}$$

$$g = \frac{6u^2 - 3}{(1 - 2u^2 - 3v^2)\sqrt{2u^2 + 6v^2 + 1}}$$

Dunque $K = (eg - f^2)/(EG - F^2) = 6/(2u^2 + 6v^2 + 1)^2 > 0$ in U $(z > 0)$ ma anche in S per simmetria $(z < 0)$ e continuitá $(z = 0)$.

In $P = (0, 0, 1)$ si ha che $u = v = 0$, dunque $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $e = -2$, $f = 0$, $g = -3$.

Dunque le direzioni principali sono x_u e x_v e le curvature principali $e/E = -2$ e $g/G = -3$.

La curva intersezione di S con il piano $y = 0$ é una sezione normale in ogni suo punto, dunque é una geodetica e $k_g = 0$ in ogni suo punto.

Per Gauss Bonnet $\int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S) = 4\pi$ in quanto l'ellissoide é omeomorfo a una sfera. Per simmetria nella regione considerata l'integrale di K é $4\pi/8 = \pi/2$.