Geometria 4
Bracci-Salvatore

Esonero N. 1 —- 27 Aprile 2012

Esercizio 1. Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia W il sottospazio definito dalle condizioni $a + d = 0, c = 0$, dove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Sia $f : V \to \mathbb{R}^2$ definita tramite $A \mapsto (b - c + a, 2a + d)$, e sia g la sua restrizione a W.

(1) Fissata una base di W e di $\mathbb{R}^2$, determinare, nelle basi indotte, la matrice associata a $g \wedge g : \bigwedge^2 W \to \bigwedge^2 \mathbb{R}^2$ ed alla restrizione di $g \otimes g$ all'algebra simmetrica, ovvero $g \otimes g : S^2(W) \to \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$. Dire se l'immagine di $g \otimes g(S^2(W))$ è contenuta o meno nell'algebra simmetrica di $\mathbb{R}^2$.
(2) Estendere la base scelta per W a V e determinare nelle basi indotte la matrice associata a $(g \wedge g) \otimes f : \bigwedge^2 W \otimes V \to \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$. Si determini poi la dimensione del nucleo e dell'immagine di tale applicazione lineare.
(3) Sia $p : W \to \mathbb{R}$ il polinomio omogeneo definito tramite $p(A) = b^2 d + c^3 + 3abd + b^2 a$. Determinare, usando la formula di polarizzazione, il corrispondente tensore simmetrico su W^*.

Esercizio 2. Si consideri al variare del parametro reale k la curva chiusa piana γ_k di periodo 2π definita da

$$\gamma_k(t) = (\cos(t) + k\sin(t), \sin(t) + k\cos(t)).$$

i) Si dica per quali valori di k la curva è regolare e si calcoli il suo indice di rotazione per tali valori.
ii) Si dica se l'omotopia

$$H : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$$

definita da $H(s,t) = \gamma_{4k-2}(t)$ é un'omotopia regolare tra γ_{-2} e γ_2, motivando la risposta. In caso negativo si dica se esiste un'omotopia regolare tra γ_{-2} e γ_2, e la si costruisca se possibile.

Esercizio 3. Si consideri la curva in $\mathbb{R}^3$

$$\alpha(t) = (\cos(2t) + 1, \sin(2t), \sin(t)).$$

i) Si determini il dominio di regolaritá e di biregolaritá di γ.
ii) Si calcoli il segno della torsione al variare di t e si dica se la curva γ é piana.
iii) Si determinino la terna di Frenet e il cerchio osculatore alla curva per $t = \pi/4$.