2 Luglio 2024 Esame scritto di Geometria 4

Svolgere i seguenti esercizi, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

1) Si consideri la curva chiusa piana γ di equazione parametrica, per $t \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

Si dica se la curva è regolare, e se essa è semplice.

Si calcoli la curvatura orientata per ogni t, e se ne studi il segno. Suggerimento: usare l'identità $\tan(3t) = x(3 - x^2)/(1 - 3x^2)$ con $x = \tan(t)$

La curva è biregolare?

In quali punti il versore tangente è parallelo all'asse y, e in quali di questi punta verso l'alto?

Si disegni approssimativamente la curva

Si determini l'indice di rotazione della curva

Si calcoli l'integrale della curvatura orientata su tutta la curva usando il parametro d'arco come variabile di integrazione

Soluzione:

Il vettore tangente è

$$(x'(t), y'(t)) = (-\sin(t), 3\cos(3t))$$

La prima componente si annulla per $t \in \{0, \pi\}$, e per questi valori la seconda componente non si annulla, quindi la curva è regolare.

La curvatura orientata è data da

$$\tilde{k}(t) = (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))/(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}$$

In particolare il suo segno è quello del numeratore

$$9\sin(t)\sin(3t) + 3\cos(t)\cos(3t)$$

Questo si annulla se e solo se $\tan(t)\tan(3t) = -1/3$, e sostituendo $x = \tan(t)$, se e solo se vale l'equazione biquadratica

$$x^2(3 - x^2) = x^2 - 1/3$$

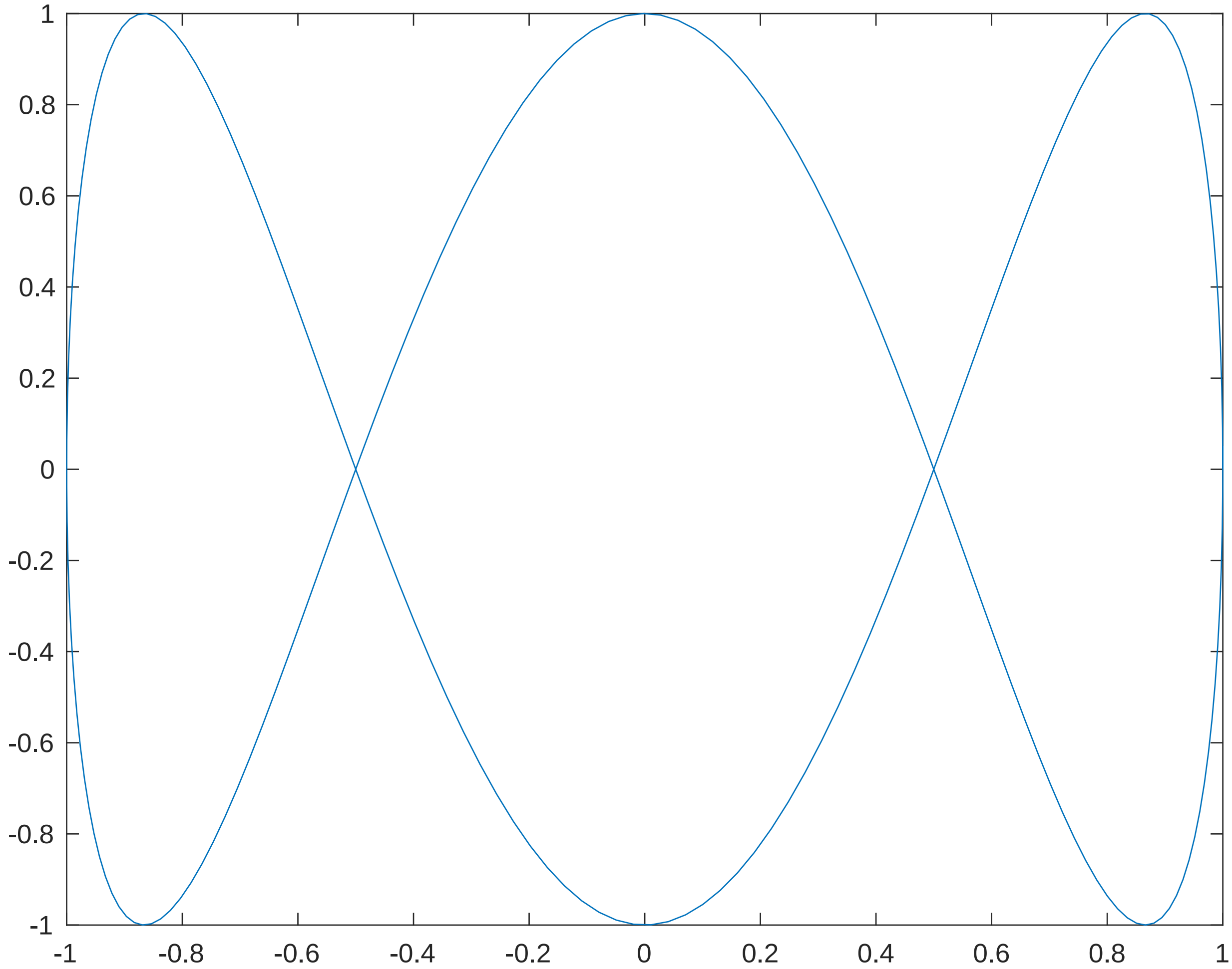
che ha soluzioni reali $x = \pm\zeta$ con $\zeta = \sqrt{1 + \sqrt{4/3}}$, dunque si hanno quattro flessi per $t = \pm\arctan(\zeta)$ e $t = \pi \pm \arctan(\zeta)$. Ora $\tilde{k}(0) = \tilde{k}(\pi) = 3 > 0$, $\tilde{k}(\pi/2) = \tilde{k}(3\pi/2) = -9 < 0$, quindi per continuità $\tilde{k}$ è positiva per

$$t \in (-\arctan(\zeta), \arctan(\zeta)) \cup (\pi - \arctan(\zeta), \pi + \arctan(\zeta))$$

e negativa per

$$t \in (\arctan(\zeta), \pi - \arctan(\zeta)) \cup (\pi + \arctan(\zeta), 2\pi - \arctan(\zeta))$$

Il vettore tangente è verticale quando $x'(t) = 0$ ovvero per $t = 0, \pi$. Nel primo caso $y'(0) = 3 > 0$ e punta verso l'alto, nel secondo $y'(\pi) = -3 < 0$ e punta verso il basso. L'indice di rotazione è 1 in quanto l'unico punto con vettore tangente verso l'alto ha curvatura orientata positiva. Per definizione l'integrale della curvatura orientata nel parametro d'arco è 2π per l'indice di rotazione, quindi è 2π.



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

2) Si consideri la superficie di rotazione S ottenuta ruotando intorno all'asse z l'ellisse nel piano Oxz di equazione parametrica

$$\begin{cases} x(v) = 3 + 2\cos(v) \\ z(v) = \sin(v) \end{cases}$$

Si scriva esplicitamente l'equazione parametrica della superficie utilizzando l'angolo u di rotazione.

La superficie è regolare?

Quante carte locali servono per ricoprire la superficie?

La superficie è orientabile?

Si determinino la I e la II forma fondamentale di S

Si determini il tipo di tutti i punti di S (ellittici, iperbolici, parabolici o planari)

Si calcolino la curvatura Gaussiana e le direzioni asintotiche in $P = (1, 0, 0)$.

Si calcoli l'integrale della curvatura Gaussiana su tutta la superficie

Si calcoli la curvatura geodetica della curva intersezione di S con il piano $z = 1$ in ogni punto

Si calcoli la curvatura geodetica della curva intersezione di S con il semipiano $x = 0, y > 0$ in ogni punto

Soluzione:

l'equazione parametrica della superficie è

$$\begin{cases} x = (3 + 2\cos(v))\cos(u) \\ y = (3 + 2\cos(v))\sin(u) \\ z = \sin(v) \end{cases}$$

Si ha che

$$\underline{x}_u = (3 + 2\cos(v)(-\sin(u), \cos(u), 0)$$
$$\underline{x}_v = (-2\sin(v)\cos(u), -2\sin(v)\sin(u), \cos(v))$$

Si vede che

$$||\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v|| = (3 + 2\cos(v))\sqrt{1 + 3\sin^2(v)} > 0$$

e dunque la superficie è regolare.

Per ricoprire S bastano 4 carte locali con u e v negli intervalli $(0, 2\pi)$ e $(-\pi, \pi)$ in tutte le combinazioni. Bastano anche 3 carte scegliendo $u, v \in (0, 2\pi)$, $u, v \in (-\pi, \pi)$, $u, v \in (\pi/2, 3\pi/2)$.

La superficie è orientabile perchè $N = (x_u \wedge x_v)/||x_u \wedge x_v||$ è definito su tutta la superficie.

Per la I forma, $E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = (3 + 2\cos(v))^2$; $F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0$;

$G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = 1 + 3\sin^2(v)$

Per la II forma si ottiene

$e = N \cdot \underline{x}_{uu} = -\cos(v)(3 + 2\cos(v))/\sqrt{1 + 3\sin^2(v)}$;

$f = N \cdot \underline{x}_{uv} = 0$; $g = N \cdot \underline{x}_{vv} = -2/\sqrt{1 + 3\sin^2(v)}$.

Dunque il segno di $det(II) = eg - f^2$ coincide con quello di $\cos(v)$ e si avranno punti ellittici per $\cos(v) > 0$, iperbolici per $\cos(v) < 0$ e parabolici per $\cos(v) = 0$ (non planari in quanto superficie di rotazione).

In $P = \underline{x}(0, \pi)$ si ha che $e = 1, f = 0, g = -2, E = 1, F = 0, G = 1$, dunque $K = (eg - f^2)/(EG - F^2) = -2$.

In P le direzioni asintotiche sono date da $II(a\underline{x}_u + b\underline{x}_v) = 0$, dunque $a^2 - 2b^2 = 0$, dunque $a = \pm\sqrt{2}b$.

La superficie S è omeomorfa al toro, quindi per il teorema di Gauss Bonnet $\int_S K d\sigma = 2\pi\chi(S) = 0$.

La curva intersezione di S con il piano $z = 1$ è una circonferenza di raggio 3, la cui normale principale n è ortogonale a N, quindi la curvatura normale è $k_n = 0$, quindi la curvatura geodetica (a parte un segno) coincide con la curvatura $k = 1/3$.

L'intersezione con il semipiano $x = 0$, $y > 0$ è un meridiano, quindi una geodetica, quindi $k_g = 0$.