19 Luglio 2024   Esame scritto di Geometria 4

Svolgere il seguente esercizio, spiegando chiaramente i procedimenti svolti.

Si consideri la superficie S per $u \in \mathbb{R}$ e $v \in (-2, 2)$

$$\begin{cases} x(u,v) = (2 + v\sin(u))\sin(u) \\ y(u,v) = (2 + v\sin(u))\cos(u) \\ z(u,v) = v\cos(u) \end{cases}$$

La superficie è regolare?

Con la notazione vettoriale $r = (x, y, z)$ Si verifica che

$$E = r_u \cdot r_u = v^2 + (2 + v\sin(u))^2 > 0$$

$$F = r_u \cdot r_v = 0,\ G = r_v \cdot r_v = 1$$

dunque r_u e r_v sono linearmente indipendenti e S è regolare.

Quali e quante carte locali servono per ricoprire S ?

Bastano due carte date per esempio da $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-2, 2)$ e $u \in (-\pi, \pi)$, $v \in (-2, 2)$.

La superficie è orientabile?

Sí perchè r_u e r_v sono campi vettoriali ben definiti, continui, e linearmente indipendenti tra loro su tutta S, dunque N è ben definito e continuo su tutta S.

Si determinino la I e la II forma fondamentale di S

Per la I forma si veda sopra. Per la II forma si ha che

$$N = r_u \wedge r_v / ||r_u \wedge r_v|| = E^{-1/2}(v\cos(u)^3 - \sin(2u), v\sin(u)^3 + 2\sin(u)^2 - 2v\sin(u) - 2, \sin(u)(v\sin(u) + 2))$$

Dunque

$$e = r_{uu} \cdot N = E^{-1/2}\cos(u)(2v^2 + (2 + v\sin(u))^2);$$

$f = r_{uv} \cdot N = -2E^{-1/2}$; $g = r_{vv} \cdot N = 0$.

Si determini il tipo di tutti i punti di S (ellittici, iperbolici, parabolici o planari)

Si vede che $eg - f^2 = -4E^{-1} < 0$ dunque tutti i punti sono iperbolici.

Si scriva S come unione di geodetiche

La superficie è una rigata con direttrice per esempio la curva coordinata γ_0 di equazione $v = 0$ e generatrici $u = u_0$, che sono geodetiche.

Al variare di u da 0 a 2π le generatrici compiono un giro completo rispetto alla tangente alla direttrice.

Si determini la curvatura geodetica in tutti i punti della curva coordinata γ_0

Dalla formula di Liouville $k_g(u) = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} = -\sin(u)/2$

Si determini la curvatura geodetica in tutti i punti della curva coordinata $u = 0$

$k_g = 0$ perchè la curva è una geodetica (tratto di retta).

Determinare le direzioni principali e le direzioni asintotiche nel punto $(2, 0, 0)$.

Per $u = \pi/2$ e $v = 0$ si ha che $E = 4$, $F = 0$, $G = 1$, $e = 0$, $f = -1$, $g = 0$.

Imponendo

$$det \begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

si ottengono le direzioni principali $ar_u + br_v$, con $(a, b) = (1, 2)$ e $(a, b) = (1, -2)$, mentre imponendo $II(cr_u + dr_v) = 0$ si trovano le direzioni asintotiche $c = 0$ e $d = 0$, ovvero tangenti alle curve coordinate nel punto.

Determinare la caratteristica di Eulero della regione $R \subset S$ data da $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 1]$

La regione R è omeomorfa al prodotto di una circonferenza e di un intervallo chiuso, dunque $\chi(R) = 0$.

Per $v = 1$ si consideri la curva coordinata γ_1 su S data dall'equazione parametrica $\gamma_1(u) = (x(u, 1), y(u, 1), z(u, 1))$, per $u \in [0, 2\pi]$

Dimostrare che $\int_{\gamma_1} k_g(s)ds \leq \int_{\gamma_0} k_g(s)ds$ e si calcoli il membro destro

Il bordo di R è l'unione disgiunta di γ_0 e γ_1, che supponiamo parametrizzate per la lunghezza d'arco, e con verso del vettore tangente concorde con quello della parametrizzazione per u. Allora γ_0 é orientata positivamente, γ_1 negativamente, e per il teorema di Gauss-Bonnet

$$\int_{\gamma_0} k_g(s)ds - \int_{\gamma_1} k_g(s)ds + \int_R K d\sigma = 2\pi\chi(R) = 0$$

ma $K \leq 0$ su R da cui la diseguaglianza richiesta.

Su γ_0 che é una circonferenza di raggio 2 la lunghezza d'arco puó essere scelta come $s = 2u$. Dal calcolo precedente $\int_{\gamma_0} k_g(s)ds = -\int_0^{2\pi}(sin(s/2))/2ds = [cos(s/2)]_0^{4\pi} = 0$.

Si verifichi se γ_1 è biregolare.

$$\gamma_1' \wedge \gamma_1'' = (-3\cos(u) + 2\cos(u)^3, 2 + 2\sin(u)^3, -2 - 6\sin(u) - 4)$$

La prima componente si annulla per $u = \pi/2, 3\pi/2$, la seconda e la terza per $u = 3\pi/2$, dunque la curva non è biregolare.

Si studi il segno della torsione di γ_1.

La torsione τ é definita per $u \neq 3\pi/2$ e il suo segno coincide con il segno di

$$\gamma_1' \wedge \gamma_1'' \cdot \gamma_1''' = 6(2\sin(u)^2 + \sin(u) - 1),$$

dunque si annulla per $u = \pi/6, 5\pi/6$, é positiva per $u \in (\pi/6, 5\pi/6)$ e negativa per $u \in (5\pi/6, 3\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/6)$.