Geometria 4
Bracci-Salvatore

Compito scritto — 12 Settembre 2012

Esercizio 1. Siano V, W due spazi vettoriali di dimensione 2 muniti di un prodotto scalare definito positivo. Sia $v_0 \in V$ tale che $\|v_0\| = 1$ e sia $W' \subset W$ un sottospazio di dimensione 1. Sia $f : V \to V$ definita tramite $f(v) = \langle v, v_0 \rangle v_0$ e sia $g : W \to W$ definita dalla proiezione ortogonale sul sottospazio di W ortogonale a W'.
i) Si determini la dimensione del nucleo e dell'immagine di $h := f \otimes g : V \otimes W \to V \otimes W$ e si trovi la matrice associata a h in una base di $V \otimes W$.
ii) Si denoti $U := V \otimes W$. Per $j = 1, \ldots, 4$, sia $\wedge^j h : \bigwedge^j U \to \bigwedge^j U$ l'applicazione lineare indotta da h che sugli elementi semplici è data da $\wedge^j h(u_1 \wedge \ldots \wedge u_j) := h(u_1) \wedge \ldots \wedge h(u_j)$. Si determini $\wedge^j h$ per $j = 1, 2, 3, 4$.

Esercizio 2. Si consideri la curva chiusa piana γ di periodo 2π definita da
$$\gamma(t) = r(t)\mathbf{v}(t)$$
dove $r(t) = 2 - cos(t)$, e $\mathbf{v}(t) = (cos(2t), sin(2t))$.
i) Dopo aver tracciato un grafico approssimativo di γ, si verifichi se essa è regolare.
ii) Si calcoli l'indice di rotazione di γ.

Esercizio 3. Nel piano $\{x, z\}$ sia C la curva data da $z = (x-1)^3 + 1$ per $x \in [0, +\infty)$. Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando C attorno all'asse z.
i) Provare che $S \setminus \{(0,0,0)\}$ è una superficie regolare.
ii) Discutere la regolarità di S in $(0,0,0)$.
iii) Determinare i punti di tipo ellittico, parabolico e iperbolico di $S \setminus \{(0,0,0)\}$.
iv) Sia $p = (1,0,1) \in S$. Determinare il trasporto parallelo del vettore $(0,1,0) \in T_pS$ lungo la curva $t \mapsto (t, 0, (t-1)^3 + 1)$ per $t > 1$.
v) Dire, motivando la risposta, se la curva $[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta, 1)$ è, a meno di riparametrizzazione, una geodetica su S.