Geometria 4
Bracci-Salvatore

Appello N. 1 —- 18 Giugno 2012

1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 munito di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormale di V e sia A una matrice 3×3 simmetrica e definita positiva. Dati due vettori $v, w \in V$ le cui coordinate nella base $\mathcal{E}$ sono $\underline{x} = (x, y, z)$ e $\underline{x}' = (x', y', z')$ si consideri la funzione $f(v, w) := \underline{x} A \underline{x}'^t$.

1. Provare che f determina un elemento ω di $V^* \otimes V^*$ e si determini la sua espressione nella base di $V^* \otimes V^*$ determinata da $\mathcal{E}$.
2. Sia $\Psi : V^* \otimes V^* \to \mathsf{Hom}(V, V^*)$ l'isomorfismo canonico. Fissato un vettore non nullo $v \in V$, si determini la dimensione del nucleo e dell'immagine di $\Psi(\omega)$.

2) Sia S il luogo di punti determinato da $z^2 - (x^2 + y^2 + 1)^2 = 0$.

1. Provare che S è una superficie regolare.
2. Dire, motivando la risposta, se S è compatta e orientabile.
3. Provare che S ha esattamente due componenti connesse.
4. Determinare tutti i punti di tipo ellittico, parabolico, iperbolico di S.
5. Determinare il supporto della geodetica di S che contiene il punto $(1, 0, 2)$ ed è ivi tangente al vettore $(2, 0, 4)$ [*Sugg*: si esamini la curva intersezione di S con il piano $\{y = 0\}$]
6. Dire, motivando la risposta, quali sono i punti di S che sono congiungibili tramite una geodetica al punto $(0, 0, 1)$.

3) Si discuta l'esistenza e l'unicità di una curva piana regolare $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ parametrizzata per la lunghezza d'arco tale che $\gamma(0) = (1, 0)$, $\gamma'(0) = (0, 1)$, e la curvatura orientata $\tilde{k}$ è assegnata, nei seguenti casi:

1. $\tilde{k}(s) = 0$
2. $\tilde{k}(s) = -3\pi$
3. $\tilde{k}(s) = cos(2\pi s)$
4. $\tilde{k}(s) = 4\pi$

Si calcoli il valore di $\gamma'(1)$, quando la curva γ è definita.
Si dica quando la curva γ è chiusa e in tali casi se ne calcoli l'indice di rotazione.