

GEOMETRIA 4

Salvatore@mat.uniroma2.it

DOCARMO differential geometry

ABATE-TOVENA curve e superfici

LIPSCHUTZ

Di Gennaro (esercizi) sul suo sito



DEF CURVA (1)

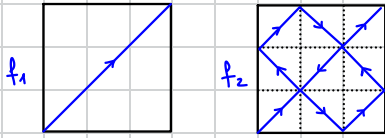
4/03

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione continua la chiamiamo curva continua

ES CURVA DI PEANO

$f: [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ continua e suriettiva

si costruisce la successione di funzioni $f_n: [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ in modo ricorsivo



$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ si chiama curva di Peano si dimostra che è sia continua che suriettiva

(suriettività: sia $x_0 \in [0,1] \times [0,1] \Rightarrow$ esiste una successione di quadrotini che contiene tale punto $\Rightarrow$ passando al limite ... ???)

DEF CURVA PARAMETRIZZATA

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ $f \in \mathcal{C}^1$ a tratti si dice curva parametrizzata differenziabile

ES

 curva $\mathcal{C}^1$ a tratti

OSS

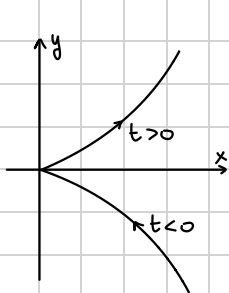
la curva di Peano non è derivabile $\Rightarrow$ non è $\mathcal{C}^1$

OSS

Se $n=2$ f si chiama curva **PIANA**

Se $n=3$ f si chiama curva **NELLO SPAZIO**

ES CUSPIDE



$$f(t) = (t^2, t^3) \quad t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = 3t^2 \end{cases}$$

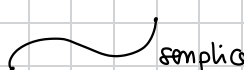
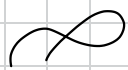
è una curva $\mathcal{C}^1$ a tratti, la derivata in $t=0$ ha una discontinuità

(è anche una curva NON regolare); complessivamente non è $\mathcal{C}^1$

DEF CURVA SEMPLICE

Una curva f si dice semplice se f è iniettiva come funzione

ES

 semplice  NON semplice

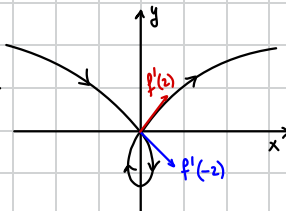
OSS

la curva NON è la sua immagine

ES

$$f(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$f'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq (0,0) \quad \forall t \\ \Rightarrow \text{curva regolare}$$

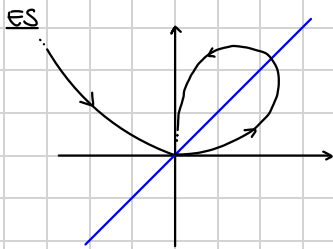


Non è iniettiva, infatti per $t = \pm 2$ si ha che

$$f(t) = (0,0) \Rightarrow (0,0) \text{ si chiama pto doppio}$$

DEF PUNTI MULTIPLI

Un punto di molteplicità n è un pto la cui preimmagine ha cardinalità n

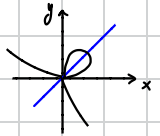


$$f(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right) \quad t \in (-1, +\infty) \quad f \text{ regolare}$$

$$t \rightarrow -1^+ \Rightarrow f(t) \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow f(t) \rightarrow (0, 0) \quad \text{ma va più velocemente la coordinata } x(t)$$

Se si considera anche la simmetria rispetto a $y=x$ si ha il FOLIO DI CARTESIO



DEF CURVA REGOLARE

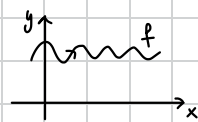
Una curva $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice regolare se è C^1 e $\forall t \in (a,b) \quad f'(t) \neq 0$

OSS

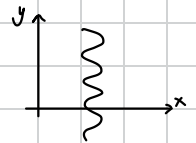
Le curve grafico sono sempre regolari:

$g: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ $g \in C^1(a,b)$ considero il grafico di g , cioè $f(t) = (t, g(t)) \quad t \in (a,b)$

Quindi $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$. f è una curva regolare infatti $f'(t) = (1, g'(t)) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b)$



Posso considerare anche $\bar{f}(t) = (g(t), t)$ che è regolare



DEF CURVA CHIUSA

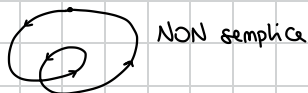
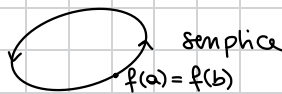
$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva, se $f(a) = f(b) \Rightarrow f$ si dice curva chiusa

Se $f \in C^1([a,b])$ affinché sia chiusa si richiede anche che $f'(a) = f'(b)$

OSS

Se f è curva chiusa, si dice anche semplice se $f|_{[a,b]} : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva oppure $f|_{(a,b)} : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$

ES



ES

• $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(t) = (\cos t, \sin t)$ è curva semplice (un solo giro)



• $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ NON è curva semplice perché tutti i pti sono doppi (faccio 2 giri)

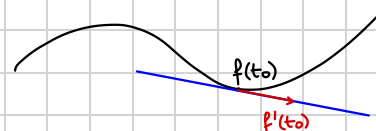
OSS

Sia f curva regolare ($\forall t \quad f'(t) \neq 0$) $\Rightarrow f'(t)$ è il vettore tangente alla curva in $f(t) \Rightarrow$ possiamo

considerare il **VERSORE TANGENTE** $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$

Dato t_0 nel dominio di f , la retta tangente alla curva f in $f(t_0)$ è la retta di equazioni

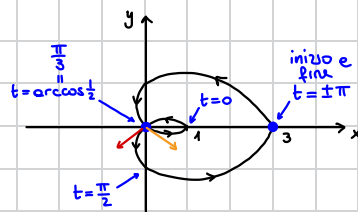
parametriche $r(u) = f(t_0) + u f'(t_0) \quad \forall u \in \mathbb{R}$



ES

Curva piana, chiusa, non semplice e regolare $t \in [-\pi, \pi]$

$$f(t) = ((2\cos t - 1)\cos t, (2\cos t - 1)\sin t) = (2\cos t - 1)(\cos t, \sin t)$$



Dal disegno vediamo che nell'origine c'è un punto doppio

$$f'(t) = (-2\sin t)(\cos t, \sin t) + (2\cos t - 1)(-\sin t, \cos t) = (-4\cos t \sin t + \sin t, -2\sin^2 t + 2\cos^2 t - \cos t)$$

$$\|f'(t)\|^2 = \dots = 5 - 4\cos t > 0 \quad \forall t \Rightarrow f \text{ curva regolare}$$

La derivata di f per $t = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ è $(\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ nella figura

DEF LUNGHEZZA D'ARCO

f curva C^1 se $[a, b] \subseteq \text{Dominio}$ la lunghezza d'arco da $f(a)$ a $f(b)$ è data da

$$l = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

(l non dipende dalla parametrizzazione)

DEF CAMBIO DI PARAMETRO

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ $f \in C^1$, un cambio di parametro è una funzione $\sigma: (c, d) \rightarrow (a, b)$ $t \in c$.

1) $\sigma \in C^1$; 2) σ biiettiva; 3) $\sigma'(u) \neq 0 \quad \forall u \in (c, d)$ ($\Rightarrow \sigma$ è un omeomorfismo)

Osservo che la curva parametrizzata rispetto al nuovo parametro è $f \circ \sigma: (c, d) \xrightarrow{\sigma} (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$

OSS

f curva parametrizzata regolare $\Rightarrow f \circ \sigma$ è una curva parametrizzata regolare

DIM

$$\frac{d}{du}(f \circ \sigma) = \frac{\frac{df}{dt}}{\frac{d\sigma}{du}} \Big|_{t=\sigma(u)} \neq 0 \quad \forall u \in (c, d) \quad \text{OND}$$

↑
vettore tangente

DEF CURVA (2)

Una curva è una classe di equivalenza, rispetto al cambio di parametro, di curve parametrizzate

OSS

L'osservazione precedente dice che una curva regolare è ben definita sulle classi di equiv.

OSS

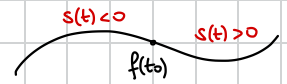
Se cambio parametrizzazione, può cambiare il verso o il modulo del vettore tangente

OSS

Una curva regolare ha una parametrizzazione data dalla lunghezza d'arco che è unica a meno di cambio di segno (che corrisponde al cambio del verso di percorrenza) e traslazione (se parto da un altro t_0)

Sia f una curva parametrizzata $f = f(t)$; sia $t_0 \in \text{Dominio}$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(x)\| dx \quad \text{con } s(t_0) = 0$$



Prendiamo la parametrizzazione data dalla lunghezza d'arco $f = f(s)$

Osservo che quest'ultima parametrizzazione è caratterizzata dal fatto che $\|f'(s)\| = 1$

Infatti per teo fond. del calcolo integrale $\frac{ds(t)}{dt} = \|f'(t)\| \Rightarrow f'(s) = \frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{df}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$

$$\Rightarrow \|f'(s)\| = 1 \quad \text{OK}$$

Sia ora s un parametro d'arco, $\bar{s}$ una parametrizzazione t.c. $\|\frac{df}{d\bar{s}}\| = 1 \Rightarrow \bar{s}$ è proprio

s o meno del segno e di una traslazione

porto fuori perché scalare s parametro d'arco $\Rightarrow \|\frac{df}{ds}\| = 1$

Infatti $1 = \|\frac{df}{d\bar{s}}\| = \|\frac{df}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}}\| = |\frac{ds}{d\bar{s}}| \cdot \|\frac{df}{ds}\| = |\frac{ds}{d\bar{s}}|$

Quindi si hanno 2 casi • $\frac{ds}{d\bar{s}} = 1 \Rightarrow \bar{s} = s + b$

$\frac{ds}{d\bar{s}} = -1 \Rightarrow \bar{s} = -s + c$

con $b, c \in \mathbb{R}$ } il parametro d'arco è univocamente determinato a meno del segno e di trasl.

5/03

OSS

VERSORE TANGENTE (PARAMETRIZZ. LUNGH. D'ARCO)

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ regolare parametrizzata dalla lunghezza d'arco $f = f(s)$



$$t(s) = \frac{df(s)}{ds} \quad \text{e} \quad \|t(s)\| = 1 \quad \forall s$$

Moto uniforme cioè il modulo della velocità è costante

Sia ora t un parametro generico $\Rightarrow f = f(t) \Rightarrow t = \dot{f} = \frac{df}{ds} = \frac{\frac{df}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{f'}{\|f'\|}$

NOT

Indichiamo con $\dot{f}$ la derivata di f rispetto al parametro d'arco s

Indichiamo con f' la derivata di f rispetto ad un parametro generico t

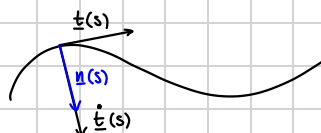
OSS

$t = \dot{f} = \frac{df}{ds}$ si può derivare ancora rispetto ad s (supponendo che f sia C^2)

Dato che $\|t(s)\| = 1 \Rightarrow t(s) \cdot t(s) = 1 \quad \forall s \Rightarrow$ derivo rispetto ad s e ottengo

$$\dot{t}(s) \cdot t(s) + t(s) \cdot \dot{t}(s) = 0 \Rightarrow 2 t(s) \cdot \dot{t}(s) = 0 \Rightarrow t(s) \cdot \dot{t}(s) = 0 \quad \text{cioè il versore tangente e}$$

$\dot{t}$ sono ortogonali $\forall s$



(il fatto che n punta verso la concavità della curva viene dalla derivata di un vettore)

DEF CURVATURA

Chiamiamo curvatura $k(s) = \|\dot{t}(s)\| \geq 0$

DEF VETTORE NORMALE

Se $\dot{\mathbf{t}}(s) \neq 0 \Rightarrow$ Possiamo definire il vettore normale $\mathbf{n}(s) = \frac{\dot{\mathbf{t}}(s)}{\|\dot{\mathbf{t}}(s)\|}$

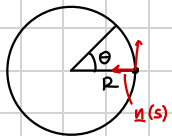
OSS

- Dalle definizioni precedenti segue che se $\dot{\mathbf{t}}(s) \neq 0$ vale $\dot{\mathbf{t}}(s) = k(s) \mathbf{n}(s)$
- I punti dove si annulla la curvatura ($k(s)=0$) si chiamano punti di flesso

DEF RAGGIO DI CURVATURA

Se $k(s) \neq 0$ (cioè $k(s) > 0$) chiamiamo raggio di curvatura $\rho(s) := \frac{1}{k(s)}$

ES



$$\begin{cases} x(\theta) = R \cos \theta \\ y(\theta) = R \sin \theta \end{cases}$$

parametro d'arco $s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta = R \int_0^\theta d\theta = R\theta$

vettore tangente $\mathbf{t}(\theta) = \frac{(-R \sin \theta, R \cos \theta)}{R} = (-\sin \theta, \cos \theta)$

vettore normale $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d\mathbf{t}}{d\theta} = \frac{(-\cos \theta, -\sin \theta)}{R} = \mathbf{n}$

curvatura $k(\theta) = \frac{1}{R}$ $\rho(\theta) = R$ non dipendono da θ , sono costanti

$\mathbf{n}(\theta) = (-\cos \theta, -\sin \theta)$ vettore normale

DEF PIANO OSCULATORE

Il piano osculatore in $s=s_0$ è il piano passante per $\mathbf{f}(s_0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{t}(s_0)$ e $\mathbf{n}(s_0)$

ha equazioni parametriche $P = \mathbf{f}(s_0) + u \mathbf{t}(s_0) + v \mathbf{n}(s_0)$ $u, v \in \mathbb{R}$

OSS

In generale $\mathbf{f}'(t)$ e $\mathbf{f}''(t)$ NON sono ortogonali tra loro (ma $\dot{\mathbf{f}}(s)$ e $\ddot{\mathbf{f}}(s)$ invece lo sono)

$\ddot{\mathbf{f}} = \frac{d\dot{\mathbf{f}}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|} \right) \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|} \right)}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{\mathbf{f}''}{\|\mathbf{f}'\|} - \frac{(\mathbf{f}' \cdot \mathbf{f}') \mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|^3}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\mathbf{f}'' - \frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|} \left(\mathbf{f}'' \cdot \frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|} \right)}{\|\mathbf{f}'\|^2} =: \mathbf{v}$

$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{f}' \cdot \frac{1}{\|\mathbf{f}'\|} \right) = \frac{\mathbf{f}''}{\|\mathbf{f}'\|} + \mathbf{f}' \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\mathbf{f}'\|} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\mathbf{f}'\|} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(\mathbf{f}' \cdot \mathbf{f}')^{3/2}} \frac{d}{dt} (\mathbf{f}' \cdot \mathbf{f}') = -\frac{1}{2} \frac{2 \mathbf{f}'' \cdot \mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|^3} = -\frac{\mathbf{f}'' \cdot \mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|^3}$

D'altra parte $\ddot{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{t}} = k \mathbf{n}$

Osserviamo che dalla formula $\ddot{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}'' - \frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|} \left(\mathbf{f}'' \cdot \frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|} \right)}{\|\mathbf{f}'\|^2}$ si vede che $\ddot{\mathbf{f}}$ e $\mathbf{f}'$ non sono paralleli

$\Rightarrow$ vuol dire che $\mathbf{f}''(t)$ non è ortogonale a $\mathbf{f}'(t)$ (una parte si semplifica perché è parallela a $\frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|}$)

Sappiamo che $k(s) = \|\ddot{\mathbf{f}}\| (= \|\dot{\mathbf{t}}(s)\|) = \left\| \frac{\ddot{\mathbf{f}}}{\|\mathbf{f}'\|} \right\| = \frac{\|\ddot{\mathbf{f}} \wedge \mathbf{f}'\|}{\|\mathbf{f}'\|^3}$

in $\mathbb{R}^3$, avendo il prod. vettoriale

Posso scriverlo in questo modo perché $\left\| \frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|} \right\| = 1$ e $\mathbf{v}$ e $\frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|}$ sono perpendicolari

ES

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 2t \\ z'(t) = 3t^2 \end{cases} \quad \text{parametro d'arco } s(t) = \int_0^t \sqrt{1+4t^2+9t^4} dt \text{ dovrei calcolarlo, invertire la}$$

$t = t(s)$ $f = f(t(s))$
funzione e poi comporre con f ma è difficile

Trovare $\underline{t}(1)$, $\underline{n}(1)$, $\underline{k}(1)$?

$$f''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6t \end{pmatrix} \quad f'(1) = (1, 2, 3) \Rightarrow \underline{t}(1) = \frac{f'(1)}{\|f'(1)\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3) \quad \text{ok}$$

 $f''(1) = (0, 2, 6)$ trovo ora un vettore ortogonale al versore tangente calcolando

$$(0, 2, 6) - \frac{(0, 2, 6) \cdot (1, 2, 3)}{\sqrt{14}} \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} = \left(-\frac{11}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{9}{7}\right) \sim (-11, -8, 9)$$

$$\text{Quindi } \underline{n}(1) = \frac{(-11, -8, 9)}{\|(-11, -8, 9)\|} \quad \text{ok}$$

$$\underline{k}(1) = \frac{\|(-\frac{11}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{9}{7})\|}{\|f'(1)\|^2} = \frac{\sqrt{266}}{7 \cdot 14} = \frac{\|f'' \wedge f'\|}{\|f'\|^3}$$

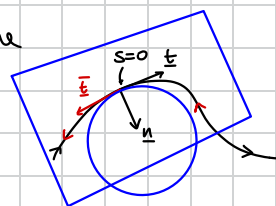
controllore che due vengano la stessa cosa

OSSSia $\underline{e}$ vettore proiezione lungo $\underline{e} = (\underline{v} \cdot \frac{\underline{e}}{\|\underline{e}\|}) \frac{\underline{e}}{\|\underline{e}\|}$ **OSS**la direzione di $\underline{n}$, diversamente da $\underline{t}$, non dipende dalla parametrizzazione**DIM**Sappiamo che $\underline{t} = \frac{df}{ds}$; sia $\bar{s} = -s$ il nuovo parametro d'arco

$$\underline{\bar{t}} = \frac{d\bar{f}}{d\bar{s}} = \frac{df}{ds} = -\underline{t} \quad ; \quad \dot{\underline{t}} = \frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{d\underline{\bar{t}}}{d\bar{s}} = \frac{d(-\underline{t})}{ds} = -\frac{d\underline{t}}{ds} = -\dot{\underline{t}} = \underline{\dot{\bar{t}}}$$

non è il versore normale, è un vettore normale; per avere il versore dovrai dividere per la sua norma

CND

**DEF CERCHIO OSCULATORE**

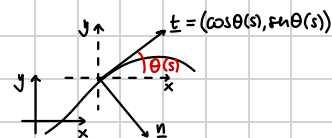
Il cerchio osculatore è l'intersezione tra il piano osculatore e l'ipersfera di centro

$$f(s_0) + p(s_0) \underline{n}(s_0) \text{ e raggio } p(s_0) = \frac{1}{k(s_0)} \quad (\text{presupponendo } k(s_0) \neq 0)$$

DEF CURVATURA ORIENTATAPer curve piane esiste la curvatura orientata. Siano f curva piana regolare C^2 ,

$$\underline{t} = \underline{t}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \text{ versore tangente con } \theta(s) \text{ funzione } C^1$$

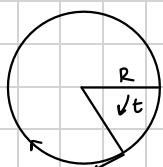
$$\text{Sappiamo che } \frac{d\underline{t}}{ds} = \dot{\theta}(s) (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) \Rightarrow k(s) = \left\| \frac{d\underline{t}}{ds} \right\| = |\dot{\theta}(s)|$$



$$\underline{\kappa}(s) = \dot{\theta}(s) \text{ è la curvatura orientata e } \underline{\kappa}(s) \in \mathbb{R} \text{ (può essere anche negativa)}$$

OSSSe $\underline{\kappa} = k \Rightarrow$ la curva gira a sinistra (in senso antiorario)Se $\underline{\kappa} = -k \Rightarrow$ la curva gira a destra

ES



$$\begin{cases} x(t) = R \cos t \\ y(t) = -R \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = -R \sin t \\ y'(t) = -R \cos t \end{cases}$$

$$\underline{t} = (-\sin t, -\cos t) = (\cos(\pi + \frac{\pi}{2} - t), \sin(\frac{3}{2}\pi - t))$$

Sia ora $\theta = \frac{3}{2}\pi - t$ e $s = Rt$ allora otteniamo $\frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = -\frac{1}{R} = \tilde{\kappa}$

Vogliamo ora la curvatura orientata rispetto al parametro t

$$\tilde{\kappa} = \frac{(\underline{f}' \wedge \underline{f}'')_z}{\|\underline{f}'\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad \text{(vedi dim su ABATE-TOVENA pag 19 e problema 1.1 pag 27)}$$

componente z (è l'unica non nulla)

OSS

Per come abbiamo definito la curvatura orientata abbiamo anche definito il versore normale orientato $\tilde{n} = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$ che è sempre ben definito, anche quando

$\kappa(s) = 0$. Inoltre, nel caso in cui $\kappa(s) \neq 0$ si ha l'uguaglianza $\tilde{\kappa} \tilde{n} = \kappa n$

7/03

OSS

Abbiamo visto che $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regolare ($\forall t \in (a, b) f'(t) \neq 0$)

s parametro d'arco $\Rightarrow \underline{t}(s) = \frac{df}{ds} = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ versore tangente

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{d\theta}{ds}(s) = \dot{\theta}(s) \quad \text{curvatura orientata}$$

$$\text{Se } f(t) = (x(t), y(t)) \Rightarrow \tilde{\kappa}(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad \text{vedi dim ABATE-TOVENA}$$

$$\text{Inoltre vale } \underline{t}(t) = \frac{(x', y')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad \text{cioè la derivata normalizzata}$$

$\tilde{n}(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$ versore normale orientato, ma posso anche scriverlo rispetto al

parametro t ed è $\tilde{n}(t) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ sappiamo inoltre che il versore normale orientato è sempre definito (essendo la curva regolare)

OSS TRASLAZIONI

1) Considero la curva $f(t)$ traslata di un vettore $c \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ sia quindi $g(t) = f(t) + c$

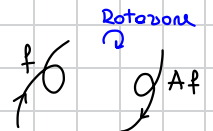
$$g'(t) = \frac{dg(t)}{dt} = f'(t) \Rightarrow \text{hanno stesso vettore tangente, versore tangente, versore normale,}$$

$$\text{curvatura orientata} \Rightarrow \tilde{\kappa}_f = \tilde{\kappa}_g$$

ROTAZIONI

2) Sia $A \in SO(2)$ ($\det A = 1$) le rotazioni mantengono l'orientazione

$$\text{Sia } h(t) = A \cdot f(t)$$



Sia $f = f(s) = f(t(s))$ cioè considero il parametro d'arco $\Rightarrow \|\dot{f}(s)\| = 1$

$$\text{Consideriamo la nuova curva } A f(s) \Rightarrow \frac{d(A f(s))}{ds} = A \frac{df}{ds}$$

perché A rotazione $\Rightarrow$ operatore unitario

$$\|A \frac{df}{ds}\| = \left\| \frac{df}{ds} \right\| = 1 \Rightarrow s \mapsto A f(s) \text{ continua ad essere un parametro d'arco}$$

s param. d'arco

Quindi il versore tangente sarà $A \underline{t}_f = \underline{t}_h$

$$\left[\begin{array}{l} f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s: (a, b) \rightarrow (s(a), s(b)) \\ f(s) = f \circ s^{-1}: (s(a), s(b)) \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{array} \right]$$

Allo stesso modo i versori normali $A \tilde{n}_f = \tilde{n}_h$ e quelli orientati $A \tilde{\tau}_f = \tilde{\tau}_h$

Osserviamo che vale $\dot{\tilde{\tau}}_f = \dot{\theta}_f \tilde{n}_f \xrightarrow{A} A \dot{\tilde{\tau}}_f = A \dot{\theta}_f \tilde{n}_f$ cioè $\dot{\tilde{\tau}}_h = \dot{\theta}_h \tilde{n}_h = \dot{\theta}_f \tilde{n}_h$

Inoltre $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in SO(2) \Rightarrow \theta_h(s) = \theta_f(s) + \alpha$ derivando rispetto ad s si trova che $\tilde{\kappa}_h = \tilde{\kappa}_f$.

Con 1) e 2) abbiamo dimostrato che la curvatura orientata è invariante per **MOTI**

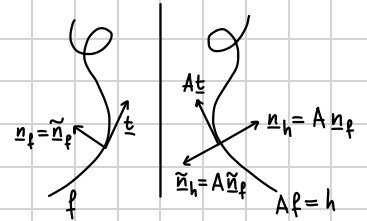
RIGIDI, cioè trasformazioni del tipo $x \mapsto Ax + c$ con $x, c \in \mathbb{R}^2$, $A \in SO(2)$

OSS RIFLESSIONI

Sia $A \in O(2)$ ($\det A = -1$). Sia $f = f(s)$. Ci chiediamo se

$s \mapsto Af(s)$ è lunghezza d'arco?

$\parallel \frac{dAf(s)}{ds} \parallel = \parallel A \dot{f}(s) \parallel \stackrel{\text{perché } A \in O(2)}{=} \parallel \dot{f}(s) \parallel = 1 \Rightarrow Af(s)$ è una lunghezza d'arco



Vale che $\dot{\tilde{\tau}}_h = A \dot{\tilde{\tau}}_f$ mentre $\tilde{n}_h = -A \tilde{n}_f \Rightarrow$ derivando rispetto ad s $\dot{\tilde{\tau}}_h = A \dot{\tilde{\tau}}_f$ ma $\dot{\tilde{\tau}}_f = \dot{\theta}_f \tilde{n}_f$

$\Rightarrow \dot{\tilde{\tau}}_h = A \dot{\theta}_f \tilde{n}_f = -\dot{\theta}_f \tilde{n}_h = -\tilde{\kappa}_f \tilde{n}_h$ d'altro parte $\dot{\tilde{\tau}}_h = \dot{\theta}_h \tilde{n}_h = \tilde{\kappa}_h \tilde{n}_h \Rightarrow \tilde{\kappa}_h \tilde{n}_h = -\tilde{\kappa}_f \tilde{n}_h$

$\Rightarrow \tilde{\kappa}_f = -\tilde{\kappa}_h$

TEO CARATTERIZZAZIONE DELLE CURVE PIANE

Dato (a,b) e una funzione continua $\tilde{\kappa}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ una curva $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$C^2(a,b)$, regolare, parametrizzata dalla lunghezza d'arco la cui curvatura orientata è $\tilde{\kappa}$. Inoltre f è unica a meno di moti rigidi

DIM

ESISTENZA: Costruisco una curva la cui curvatura orientata è $\tilde{\kappa}$

Sia $s_0 \in (a,b)$ e $\theta_{s_0} \in \mathbb{R}$ fissati. Vogliamo che $\dot{\theta}(s) = \tilde{\kappa}(s) \Rightarrow \theta(s) = \int_{s_0}^s \tilde{\kappa}(s) ds + \theta_{s_0}$

$\Rightarrow$ Si ha $\tilde{\tau} = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ versore tangente $\Rightarrow f(s) = \int_{s_0}^s \tilde{\tau}(s) ds + f_{s_0}$ con $f_{s_0} \in \mathbb{R}^2$

f così definita è $C^2 \Rightarrow f$ descrive una curva piana

Inoltre $\parallel \frac{df}{ds} \parallel = \parallel \tilde{\tau}(s) \parallel = 1 \Rightarrow f$ è già parametrizzata con la lunghezza d'arco e il suo versore tangente è $\tilde{\tau}$

Calcoliamo ora $\dot{\tilde{\tau}}(s) = \dot{\theta}(s) \tilde{n}(s) \Rightarrow$ la curvatura orientata è $\dot{\theta}(s) = \tilde{\kappa}(s)$ ok

UNICITA': Se la curva richiesta esiste $\Rightarrow$ è esattamente quella trovata nel punto precedente, posso scegliere soltanto θ_{s_0} e f_{s_0} .

Quindi la curva è unica a meno di rotazioni (cioè la scelta di θ_{s_0}) e traslazioni

(cioè la scelta di f_{s_0}) tutto il resto è obbligato CVD

la dim non è del tutto completa, rimane da trovare esplicitamente l'isometria vedi dim sul libro

ES

• $\tilde{k}(s) = 0 \Rightarrow f(s)$ è una porzione di retta

$\tilde{k}(s) = \frac{1}{R} = \text{costante con } R > 0 \Rightarrow f(s)$ circonferenza di raggio R in senso antiorario

• $\tilde{k}(s) = -\frac{1}{R}$ con $R > 0 \Rightarrow f(s)$ circonferenza di raggio R in senso orario

OSS

Calcoliamo in generale la curvatura orientata in coordinate polari

Consideriamo la parametrizzazione: $\begin{cases} x(\theta) = p(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = p(\theta) \sin \theta \end{cases}$

$$\begin{aligned} \tilde{k}(\theta) &= \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{(p' \cos \theta - p \sin \theta)(-p \sin \theta + 2p' \cos \theta + p'' \sin \theta) - (p'' \cos \theta - 2p' \sin \theta - p \cos \theta)(p' \sin \theta + p \cos \theta)}{(p'^2 \cos^2 \theta + p'^2 \sin^2 \theta - 2pp' \sin \theta \cos \theta + p'^2 \sin^2 \theta + p'^2 \cos^2 \theta + 2pp' \sin \theta \cos \theta)^{3/2}} = \\ &= \frac{p^2 + 2p'^2 - p''p}{(p'^2 + p^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

ES SPIRALE LOGARITMICA

In coordinate polari: $p(\theta) = e^{a\theta}$ $\theta \in \mathbb{R}, a > 0$



Applichiamo la formula dell'osservazione precedente per calcolare la curvatura orientata

$$\tilde{k}(s) = \frac{e^{2a\theta} + 2a^2 e^{2a\theta} - a^2 e^{2a\theta}}{a^2 e^{2a\theta} + e^{2a\theta}} = \dots = \frac{e^{-a\theta}}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow \text{Raggio di curvatura } R = \frac{1}{|\tilde{k}(s)|} = \sqrt{a^2 + 1} e^{a\theta} = \sqrt{a^2 + 1} p(\theta)$$

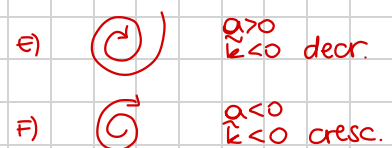
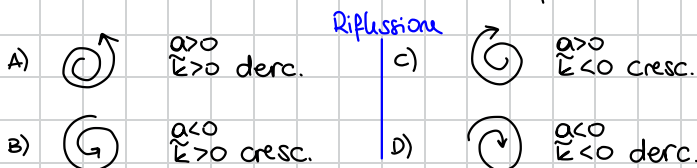
Non esiste un moto rigido che porta la spirale con $a > 0$ in quella con $a < 0$ e viceversa

perché per $a > 0 \Rightarrow \tilde{k}(s) > 0 \forall s$ ed è funzione decrescente
 $a < 0 \Rightarrow \tilde{k}(s) > 0 \forall s$ ed è funzione crescente

Anche con una riflessione non posso portare la curva con $a > 0$ in quella con $a < 0$

perché cambiano segno entrambe le $\tilde{k}$ (che diventano entrambe negative, una crescente e una decrescente). Si ha quindi

porto da A) e da B) e cambio verso di percorrenza



Osservo che tutte e 6 le spirali sono distinte e non esiste un movimento rigido che porta l'una nell'altra

Considero ora il cambio di verso di percorrenza cioè considero $p(-\theta)$

Osservo che il versore tangente e il normale orientato cambiano direzione

OSS

In generale se cambio verso di percorrenza, cioè considero la funzione $s \mapsto f(-s)$,

$\Rightarrow$ la curvatura orientata cambia di segno. Infatti

$$\frac{df(-s)}{ds} = -\frac{df}{ds} = -\vec{t}(s) \quad \text{(Abbiamo visto che anche il versore tangente cambia verso)}$$

$$\frac{d(-\vec{t}(s))}{ds} = -\dot{\vec{t}}(s) \vec{n}(s) \quad \text{si vede quindi che } \tilde{\kappa}(-s) = -\dot{\vec{t}}(s) = -\tilde{\kappa}(s)$$

11/03

OSS

(Richiami)

$\tilde{\kappa}: I \rightarrow \mathbb{R}$ caratterizza unicamente la curva $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizzata dal parametro d'arco a meno di moti rigidi (Teo di Caratterizzazione)

OSS

- Abbiamo visto che la Riflessione della curva è del tipo $Af: I \rightarrow \mathbb{R}^2$

dove $A \in O(2) - SO(2)$ ha come curvatura orientata $-\tilde{\kappa}: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $s \mapsto -\tilde{\kappa}(s)$

- Abbiamo anche cambiato verso alla curva: se $I = (a, b)$ consideriamo $-I = (-b, -a)$

la curva con verso opposto è data dalla funzione $s \mapsto f(-s)$

$\Rightarrow$ tale curva ha curvatura orientata la funzione $s \mapsto -\tilde{\kappa}(-s)$

- Se considero la curva riflessa e con verso di percorrenza invertito ho:

$s \mapsto Af(-s)$ la cui curvatura orientata è la funzione $s \mapsto \tilde{\kappa}(-s)$

OSS

DILATAZIONE/CONTRAZIONE

la curva $s \mapsto cf(s) = \hat{f}(s)$ con $c > 0$ ha come curvatura orientata $\frac{1}{c}\tilde{\kappa}$ infatti

$$\text{Sia } \hat{s} = cs \Rightarrow \hat{\vec{t}} = \frac{d\hat{f}}{d\hat{s}} = \frac{d(cf(s))}{d\hat{s}} = \frac{c \dot{f}(s)}{c} = \dot{f}(s) \sim \tilde{\kappa} \vec{n} = \frac{d\hat{\vec{t}}}{d\hat{s}} = \frac{d\vec{t}}{d\hat{s}} = \frac{1}{c} \tilde{\kappa} \vec{n} \Rightarrow \tilde{\kappa} = \frac{1}{c} \tilde{\kappa}$$

OSS

So che $\hat{\vec{t}} = \tilde{\kappa} \vec{n}$, inoltre $\vec{n} \cdot \vec{t} = 0$ perché perpendicolari. Derivando quest'ultima

espressione si ottiene che $\dot{\vec{n}} \cdot \vec{t} + \vec{n} \cdot \dot{\vec{t}} = 0$

So che $\hat{\vec{t}} = \tilde{\kappa} \vec{n} \Rightarrow$ il termine $\vec{n} \cdot \dot{\vec{t}} = \vec{n} \cdot \tilde{\kappa} \vec{n} = \tilde{\kappa} (\vec{n} \cdot \vec{n}) = \tilde{\kappa} \cdot 1 = \tilde{\kappa}$

So che $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1 \Rightarrow$ derivo $\dot{\vec{n}} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{n}$ è $\perp$ rispetto a $\dot{\vec{n}} \Rightarrow \dot{\vec{n}}$ è $\parallel$ a $\vec{t}$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $\dot{\vec{n}} = c \vec{t}$

Riscrivo $*$: $c \vec{t} \cdot \vec{t} + \tilde{\kappa} = 0 \Rightarrow c + \tilde{\kappa} = 0 \Rightarrow c = -\tilde{\kappa} \Rightarrow$ Per $*$ vale che $\dot{\vec{n}} = -\tilde{\kappa} \vec{t}$

CURVE NELLO SPAZIO

DEF CURVE BIREGOLARI

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva $\mathcal{C}^2$ parametrizzata con la lunghezza d'arco. Diciamo che è biregolare se

- 1) $\dot{f}(s) = \underline{t}(s) \neq 0 \quad \forall s \in I$ cioè è regolare

$$2) \|\ddot{f}(s)\| = \|\dot{\underline{t}}(s)\| = k(s) > 0 \quad \forall s \in I$$

DEF VETTORE BINORMALE

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ biregolare (basta che $\dot{f}(s) = \underline{t}(s) \neq 0 \quad \forall s \in I$ così che si possa definire il vettore normale e vale $\dot{\underline{t}}(s) = k(s) \underline{n}(s) \quad \forall s \in I$)

Definiamo il vettore binormale $\underline{b}(s) := \underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s)$ cioè una funzione continua

$$\underline{b}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

OSS

Dato che vogliamo derivare $\underline{b}(s)$, non basta che la funzione $\underline{b}$ sia continua, prendiamo quindi da ora $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \mathcal{C}^3$

DEF RIFERIMENTO MOBILE - RIFERIMENTO DI FRENET

$f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva $\mathcal{C}^3 \Rightarrow \forall s \in I$ chiamiamo riferimento/terna mobile la base ortonormale costituita dai vettori $\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)$

OSS

$\underline{b}(s)$ è un vettore $\Rightarrow \|\underline{b}(s)\| = 1 \Rightarrow \underline{b}(s) \cdot \underline{b}(s) = 1 \Rightarrow$ derivando $\underline{\dot{b}}(s) \cdot \underline{b}(s) = 0$

Da questo si deduce che $\underline{\dot{b}} \perp \underline{b} \Rightarrow \underline{\dot{b}}$ è combinazione lineare di $\underline{t}$ e $\underline{n}$

$$\Rightarrow \underline{\dot{b}}(s) = \alpha(s) \underline{t}(s) + \beta(s) \underline{n}(s)$$

funzioni

OSS

Per definizione si ha che $\underline{b}(s) \cdot \underline{t}(s) = 0 \Rightarrow$ derivando si ottiene

$$\underline{\dot{b}}(s) \cdot \underline{t}(s) + \underline{b}(s) \cdot \underline{\dot{t}}(s) = 0 \Rightarrow (\alpha(s) \underbrace{\underline{t}(s) \cdot \underline{t}(s)}_{=1} + \beta(s) \underbrace{\underline{n}(s) \cdot \underline{t}(s)}_{=0}) + \underbrace{\underline{b}(s) \cdot k(s) \underline{n}(s)}_{=0} = 0 \Rightarrow \alpha(s) = 0$$

Abbiamo quindi trovato (da * e *) che $\underline{\dot{b}}(s) = \beta(s) \underline{n}(s)$

DEF TORSIONE

Dalle osservazioni precedenti abbiamo trovato $\underline{\dot{b}}(s) = \beta(s) \underline{n}(s) \Rightarrow \beta(s) := -\tau(s)$ e

chiameremo la funzione $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ torsione della curva f

Convenzione
Abate-Torres
Schaum
Do Carmo non ci mette il "-"

QSS

Considero $\underline{n}(s) \cdot \underline{n}(s) = 1 \Rightarrow$ derivo $2 \dot{\underline{n}}(s) \cdot \underline{n}(s) = 0 \Rightarrow \dot{\underline{n}}(s) \perp \underline{n}(s) \Rightarrow \dot{\underline{n}}(s)$ è

combinazione lineare di $\underline{t}(s)$ e $\underline{b}(s)$ cioè $\dot{\underline{n}}(s) = \gamma(s) \underline{t}(s) + \delta(s) \underline{b}(s)$.

So che $\underline{n}(s) \cdot \underline{t}(s) = 0 \Rightarrow$ derivo $(\gamma(s) \underline{t}(s) + \delta(s) \underline{b}(s)) \cdot \underline{t}(s) + \underline{n}(s) \cdot \underline{k}(s) \underline{n}(s) = 0$

$$\Rightarrow \gamma(s) = -\kappa(s)$$

Allo stesso modo, dato che $\underline{n}(s) \cdot \underline{b}(s) = 0$, derivando si ottiene

$$(\gamma(s) \underline{t}(s) + \delta(s) \underline{b}(s)) \cdot \underline{b}(s) + \underline{n}(s) \cdot \beta(s) \underline{n}(s) = 0 \Rightarrow \delta(s) = -\beta(s) = \tau(s)$$

Abbiamo trovato che $\dot{\underline{n}}(s) = -\kappa(s) \underline{t}(s) + \tau(s) \underline{b}(s)$

DEF FORMULE DI FRENET per la curva biregolare f

$$\begin{cases} \dot{\underline{t}} = \kappa \underline{n} \\ \dot{\underline{n}} = -\kappa \underline{t} + \tau \underline{b} \\ \dot{\underline{b}} = -\tau \underline{n} \end{cases}$$

QSS

la torsione misura quanto la curva non è piana, cioè quanto ruota il piano osculatore. Infatti se la curva (biregolare) è piana (cioè è contenuta in un piano)

$$\Rightarrow \underline{b} \text{ è costante} \Rightarrow \|\dot{\underline{b}}\| = 0 = \tau$$

Si può anche dimostrare che se $\tau = 0 \Rightarrow$ la curva è contenuta in un piano

DEF

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s_0 \in I$

Il **PIANO OSCULATORE** alla curva in $f(s_0)$ è il piano passante per $f(s_0)$ e parallelo a $\text{span}\{\underline{t}(s_0), \underline{n}(s_0)\}$

Il **PIANO NORMALE** alla curva in $f(s_0)$ è il piano passante per $f(s_0)$ e parallelo a $\text{span}\{\underline{n}(s_0), \underline{b}(s_0)\}$

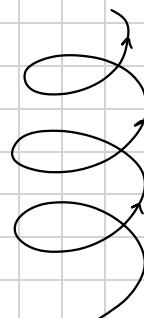
Il **PIANO RETTIFICANTE** alla curva in $f(s_0)$ è il piano passante per $f(s_0)$ e parallelo a $\text{span}\{\underline{t}(s_0), \underline{b}(s_0)\}$

ES ELICA CILINDRICA

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos t & R > 0 \\ y(t) = R \sin t \\ z(t) = ht & h > 0 \end{cases}$$

$$f'(t) = (-R \sin t, R \cos t, h)$$

$$\|f'(t)\| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + h^2} = \sqrt{R^2 + h^2}$$



$$s(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 + h^2} dt = t \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow s'(t) = \sqrt{R^2 + h^2}$$

Quindi $\dot{f}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{f'(t)}{s'(t)} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} (-R \sin t, R \cos t, h) = \underline{t}$ Derivando ancora si

ottiene $\dot{\underline{t}}(t) = \frac{\underline{t}'(t)}{s'(t)} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} (-R \cos t, -R \sin t, 0) = \frac{1}{R^2 + h^2} (-R \cos t, -R \sin t, 0) = \underline{k} \underline{n}$

$$\dot{\underline{t}}(t) = \frac{d\underline{t}(t)}{ds} = \frac{d\underline{t}(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\underline{t}(t)}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\underline{t}'(t)}{s'(t)}$$

$$\underline{k}(t) = \|\dot{\underline{t}}\| = \frac{R}{R^2 + h^2} \Rightarrow \rho(t) = \frac{R^2 + h^2}{R} = R + \frac{h^2}{R} \text{ è più grande del raggio di curvatura della circonferenza}$$

Osservo che la curvatura e il raggio di curvatura sono costanti

$$\underline{n}(t) = \frac{\dot{\underline{t}}(t)}{\|\dot{\underline{t}}(t)\|} = (-\cos t, \sin t, 0)$$

$$\underline{b} = \underline{t} \wedge \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -R \sin t & R \cos t & h \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} (h \sin t, -h \cos t, R)$$

$$\dot{\underline{b}}(t) = \frac{b'(t)}{s'(t)} = \frac{1}{R^2 + h^2} (h \cos t, h \sin t, 0) = -\frac{h}{R^2 + h^2} \underline{n} \Rightarrow \tau = \frac{h}{R^2 + h^2} \text{ è funzione costante}$$

$$\dot{\underline{b}}(t) = \frac{d\underline{b}(t)}{ds} = \frac{d\underline{b}(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\underline{b}'(t)}{s'(t)}$$

- Si vede che
- se $h > 0 \Rightarrow \tau > 0$
 - se $h < 0 \Rightarrow \tau < 0$

OSS MOTI RIGIDI

$f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, considero $\hat{f} = A f + B$ dove $A \in SO(3)$ ($\det A = 1$), $B \in \mathbb{R}^3$

f parametrizz. dalla lungh. d'arco $f = f(s) \Rightarrow$ anche $\hat{f}$ è parametrizzata dalla

lunghezza d'arco perché $\|\dot{f}\| = 1 \Rightarrow \left\| \frac{d\hat{f}}{ds} \right\| = \left\| A \frac{df}{ds} \right\| = \left\| \frac{df}{ds} \right\| = 1 \Rightarrow s \mapsto A f(s) + B$ è

parametro d'arco

$$\bullet \hat{\underline{t}}(s) = \frac{d}{ds} (A f + B) = A \underline{t}(s)$$

$$\bullet \hat{\underline{k}}(s) \hat{\underline{n}}(s) = \frac{d}{ds} (\hat{\underline{t}}(s)) = \frac{d}{ds} (A \underline{t}(s)) = A \underline{k}(s) \underline{n}(s) = \underline{k}(s) A \underline{n}(s) \Rightarrow \hat{\underline{k}}(s) = \left\| \underline{k}(s) A \underline{n}(s) \right\| \stackrel{A \in SO(3)}{=} \underline{k}(s) \|\underline{n}(s)\| = \underline{k}(s)$$

$$\bullet \hat{\underline{n}}(s) = A \underline{n}(s)$$

$$\bullet \hat{\underline{b}} = \hat{\underline{t}} \wedge \hat{\underline{n}} = A \underline{t}(s) \wedge A \underline{n}(s) \stackrel{A \in SO(3)}{=} A (\underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s)) = A \underline{b}(s)$$

$$\bullet -\hat{\tau} \hat{\underline{n}} = \frac{d\hat{\underline{b}}(s)}{ds} = A \dot{\underline{b}}(s) = -\tau A \underline{n}(s) = -\tau \hat{\underline{n}} \Rightarrow \hat{\tau}(s) = \tau(s)$$

OSS RIFLESSIONE RISPETTO AD UN PIANO (isometria inversa)

$\det A = -1$ cioè $A \in O(3) - SO(3)$

Con gli stessi calcoli di prima si vede che $\hat{\underline{k}} = \underline{k}$, cambia invece $\hat{\underline{b}} = -A \underline{b}$

vale perché $\hat{\underline{b}}(s) = \hat{\underline{t}} \wedge \hat{\underline{n}}(s) = A \underline{t}(s) \wedge A \underline{n}(s) = -A \underline{b}$

$\Rightarrow$ si ottiene anche che $\hat{\tau}(s) = -\tau(s)$

OSS

Se percorro la curva al contrario $\Rightarrow \hat{f}(s) = f(-s)$ con $s \in -I$

$$\left\| \frac{d\hat{f}}{ds} \right\| = \left\| -\dot{f}(s) \right\| = 1 \Rightarrow \hat{f} = \hat{f}(s) \text{ e' parametro d'arco}$$

Ho inoltre che $\hat{t}(s) = -\underline{t}(-s)$ (già visto)

Il versore normale e la curvatura rimangono uguali in tutti

$$\frac{d\hat{t}}{ds}(s) = \frac{d}{dt}(-t(-s)) = \dot{t}(-s) = k(-s) \cdot \underline{n}(-s) \Rightarrow \hat{\underline{n}}(s) = \underline{n}(-s) \text{ e } \hat{\underline{k}}(s) = -\underline{k}(-s)$$

Il binormale si inverte infatti $\hat{\underline{b}}(s) = \hat{\underline{t}}(s) \wedge \hat{\underline{n}}(s) = -\underline{b}(-s)$

Torsione: $-\hat{c}(s) \hat{n}(s) = \frac{d\hat{b}(s)}{ds} = \frac{d}{ds}(-b(-s)) = \dot{b}(-s) = -\tau(-s) \underline{n}(-s) \Rightarrow \hat{c}(s) = \tau(-s)$ dato che $\hat{n}(s) = \underline{n}(-s)$

OSS / ESERCIZIO

(FAI C) Si consideri la curva $s \mapsto c f(s) = \hat{f}(s)$ con $c > 0 \Rightarrow \hat{k} = \frac{k}{c}$ e $\hat{\tau} = \frac{\tau}{c}$

Per $\hat{L}$ vedi oss dell' 11/03.

PROP

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f = f(t) \quad t \text{ parametro generico} \quad \tau = \frac{(f' \wedge f'') \cdot f'''}{\|f' \wedge f''\|^2}$$

DIM

$$f' = \frac{df}{dt} = \frac{df}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{f} s'$$

$$f'' = \frac{df'}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{f} s') = \frac{d\dot{f}}{dt} s' + \dot{f} \frac{ds'}{dt} = \frac{d\dot{f}}{ds} \frac{ds}{dt} s' + \dot{f} \frac{ds'}{dt} = \ddot{f}(s')^2 + \dot{f} s''$$

$$\ddot{\varphi}''' = \frac{d\ddot{\varphi}''}{dt} = \frac{d}{dt} (\ddot{\varphi}'(s')^2 + \dot{\varphi}' s'') = \frac{d\ddot{\varphi}'}{ds} \frac{ds}{dt} (s')^2 + 2 \ddot{\varphi}' s' s'' + \underbrace{\frac{d\ddot{\varphi}'}{ds}}_{\ddot{\varphi}''} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{s'} s'' + \dot{\varphi}' s''' = \ddot{\varphi}''' (s')^3 + 3 \ddot{\varphi}'' s' s'' + \dot{\varphi}' s'''$$

$$f' \wedge f'' = \dot{f} s' \wedge (\ddot{f} (s')^2 + \dot{f} s'') = \dot{f} s' \wedge \ddot{f} (s')^2 = (s')^3 \dot{f} \wedge \ddot{f} = (s')^3 \pm \wedge \underline{k} \underline{n} = (s')^3 \underline{k} \underline{b}$$

$$(f' \wedge f'') \cdot f''' = (s')^3 k \underbrace{\underline{b}}_{=0} \cdot (\ddot{f}(s')^3 + 3 \underbrace{\ddot{f}(s') s''}_{k_n} + \underbrace{\dot{f}(s''')}_t) = (s')^6 k \underline{b} \cdot \ddot{f} = (s')^6 k \left(\underbrace{\underline{b}}_{=0} \cdot (\underbrace{k_n}_{=0} + \underbrace{(-k_t + \tau b)}_{=0}) \right) =$$

$$\underline{b} \cdot \underline{b} = 1$$

$$\dots = (s')^6 k^2 \tau$$

$$\ddot{f} = \frac{d\dot{f}}{ds} = \frac{d}{ds}(k\underline{n}) = \dot{k}\underline{n} + k\dot{\underline{n}} = \dot{k}\underline{n} + k(-k\underline{t} + \tau\underline{b})$$

$$\|f' \wedge f''\|^2 = (s')^6 k^2$$

Quindi vale $\tau = \frac{(f' \wedge f'') \cdot f'''}{\|f' \wedge f''\|^2}$ CND

OSS

f', f'', f''' non costituiscono più una base ortonormale

TEO ESISTENZA E UNICITA' CURVE BIREGOLARI IN $\mathbb{R}^3$

12/03

Dato $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, data una funzione $k: I \rightarrow \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{C}^1$, data una funzione

$\tau: I \rightarrow \mathbb{R} \cap \mathbb{C}^0 \Rightarrow \exists$ una curva biregolare $\mathbb{C}^3$ $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata con la lunghezza d'arco t.c. k è la sua curvatura e τ è la sua torsione.

Inoltre la curva f è unica a meno di moti rigidi

DIM

ESISTENZA

Sia $s_0 \in I$, e prendiamo una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ $\underline{t}_{s_0}, \underline{n}_{s_0}, \underline{b}_{s_0} = \underline{t}_{s_0} \wedge \underline{n}_{s_0}$

con orientazione positiva

Consideriamo il problema di Cauchy dato dalle formule di Frenet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{t}} = k \underline{n} \\ \dot{\underline{n}} = -k \underline{t} + \tau \underline{b} \\ \dot{\underline{b}} = -\tau \underline{n} \\ \underline{t}(s_0) = \underline{t}_{s_0} \\ \underline{n}(s_0) = \underline{n}_{s_0} \\ \underline{b}(s_0) = \underline{b}_{s_0} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{9 equazioni} \\ \text{condizioni iniziali} \end{array} \right\}$$

Sistema di 9 eq. differenziali lineari $\Rightarrow$ la soluzione esiste ed è unica

Sia la terna di applicazioni $\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ tale soluzione

Mostriamo che, avendo imposto che $\underline{t}(s_0) = \underline{t}_{s_0}, \underline{n}(s_0) = \underline{n}_{s_0}, \underline{b}(s_0) = \underline{b}_{s_0}$ sia una terna ortonormale $\Rightarrow \underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$ è una terna ortonormale in ogni punto di I .

Dalle formule di Frenet ricavo che le funzioni $\overline{\underline{t} \cdot \underline{t}}, \overline{\underline{t} \cdot \underline{n}}, \overline{\underline{n} \cdot \underline{n}}, \overline{\underline{t} \cdot \underline{b}}, \overline{\underline{n} \cdot \underline{b}}, \overline{\underline{b} \cdot \underline{b}}$

(derivando rispetto ad s) soddisfano il sistema in 6 incognite (le funzioni di prima)

di 6 equazioni differenziali lineari

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds}(\underline{t} \cdot \underline{t}) = 2 \dot{\underline{t}} \cdot \underline{t} = 2k \underline{t} \cdot \underline{n} \\ \frac{d}{ds}(\underline{t} \cdot \underline{n}) = \dot{\underline{t}} \cdot \underline{n} + \underline{t} \cdot \dot{\underline{n}} = k \underline{n} \cdot \underline{n} - k \underline{t} \cdot \underline{t} + \tau \underline{t} \cdot \underline{b} \\ \frac{d}{ds}(\underline{n} \cdot \underline{n}) = 2 \dot{\underline{n}} \cdot \underline{n} = -2k \underline{n} \cdot \underline{t} + 2\tau \underline{n} \cdot \underline{b} \\ \frac{d}{ds}(\underline{t} \cdot \underline{b}) = \dot{\underline{t}} \cdot \underline{b} + \underline{t} \cdot \dot{\underline{b}} = k \underline{n} \cdot \underline{b} - \tau \underline{t} \cdot \underline{n} \\ \frac{d}{ds}(\underline{n} \cdot \underline{b}) = \dot{\underline{n}} \cdot \underline{b} + \underline{n} \cdot \dot{\underline{b}} = -k \underline{t} \cdot \underline{b} + \tau \underline{b} \cdot \underline{b} - \tau \underline{n} \cdot \underline{n} \\ \frac{d}{ds}(\underline{b} \cdot \underline{b}) = 2 \dot{\underline{b}} \cdot \underline{b} = -2\tau \underline{b} \cdot \underline{n} \end{array} \right. \quad \text{cioè} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds}(\underline{t} \cdot \underline{t}) = 2k \underline{t} \cdot \underline{n} \\ \frac{d}{ds}(\underline{t} \cdot \underline{n}) = k \underline{n} \cdot \underline{n} - k \underline{t} \cdot \underline{t} + \tau \underline{t} \cdot \underline{b} \\ \frac{d}{ds}(\underline{n} \cdot \underline{n}) = -2k \underline{n} \cdot \underline{t} + 2\tau \underline{n} \cdot \underline{b} \\ \frac{d}{ds}(\underline{t} \cdot \underline{b}) = k \underline{n} \cdot \underline{b} - \tau \underline{t} \cdot \underline{n} \\ \frac{d}{ds}(\underline{n} \cdot \underline{b}) = -k \underline{t} \cdot \underline{b} + \tau \underline{b} \cdot \underline{b} - \tau \underline{n} \cdot \underline{n} \\ \frac{d}{ds}(\underline{b} \cdot \underline{b}) = -2\tau \underline{b} \cdot \underline{n} \end{array} \right.$$

Che possiamo vedere come problema di Cauchy con le condizioni iniziali

$$* \underline{t} \cdot \underline{t}(s_0) = 1 \quad \underline{t} \cdot \underline{n}(s_0) = 0 \quad \underline{n} \cdot \underline{n}(s_0) = 1 \quad \underline{t} \cdot \underline{b}(s_0) = 0 \quad \underline{n} \cdot \underline{b}(s_0) = 0 \quad \underline{b} \cdot \underline{b}(s_0) = 1$$

Sappiamo che $\exists!$ la soluzione del sistema soddisfacente le condizioni *

Si verifica subito che tale soluzione è

$$\underline{t} \cdot \underline{t} \equiv 1, \underline{n} \cdot \underline{n} \equiv 1, \underline{b} \cdot \underline{b} \equiv 1, \underline{t} \cdot \underline{b} \equiv 0, \underline{t} \cdot \underline{n} \equiv 0, \underline{b} \cdot \underline{n} \equiv 0$$

Abbiamo quindi trovato che $\forall s$ $\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)$ è una base ortonormale

Bisogna ora vedere se è positivamente orientata

$$\text{So che } \underline{b}(s_0) = \underline{t}(s_0) \wedge \underline{n}(s_0) \Rightarrow \underline{b}(s_0) \cdot (\underline{t}(s_0) \wedge \underline{n}(s_0)) = 1$$

La funzione $\underline{b}(s) \cdot (\underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s))$ è continua a valori in $\{\pm 1\}$ e in s_0 assume

valore $+1 \Rightarrow$ per continuità, $\forall s$ la funzione vale $+1 \Rightarrow \{\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\}$ è

base positivamente orientata (Vedi prodotto misto)

Scelgo ora un vettore $\underline{f}_{s_0} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ definiamo $\underline{f}(s) := \underline{f}_0 + \int_{s_0}^s \underline{t}(s) ds$ curva

Osservo che: 1) $\underline{f}(s_0) = \underline{f}_0$; 2) $\underline{t} \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \underline{f} \in \mathcal{C}^3$

Il vettore tangente è $\frac{d\underline{f}}{ds} = \underline{t}(s)$ e $\|\underline{t}(s)\| = 1 \Rightarrow \underline{f}$ è parametrizzato con la lunghezza d'arco

Per Frenet $\dot{\underline{f}} = \underline{t} = k \underline{n} \Rightarrow k$ è la curvatura e $\underline{n}$ versore normale che è ben definito

perché la curva è biregolare

Ne segue anche che $\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \wedge \underline{n}(s)$ è il binormale e per Frenet $\tau(s)$ è la torsione

di $\underline{f}$ perché $\dot{\underline{b}} = -\tau \underline{n}$ ok

UNICITA' (Vedi libro)

Abbiamo scelto all'inizio $\underline{t}_{s_0}, \underline{n}_{s_0}, \underline{b}_{s_0}, \underline{f}_0$

- Cambiare $\underline{f}_0$ in $\underline{f}_1$ corrisponde a traslare la curva di $\underline{f}_1 - \underline{f}_0$
- Cambiare $\underline{t}_{s_0}, \underline{n}_{s_0}, \underline{b}_{s_0}$ corrisponde a ruotare la curva

(Abbiamo anche visto che i moti rigidi preservano curvatura e torsione) CVD

OSS

In $\mathbb{R}^n$ ci sono $n-2$ curvature positive e 1 curvatura reale ↗ (torsione in $\mathbb{R}^3$)

OSS

$\left. \begin{array}{l} k(s) = k > 0 \quad \forall s \text{ costante} \\ \tau(s) = \tau \in \mathbb{R} \quad \forall s \text{ costante} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{elica cilindrica } \underline{f}(t) = (R \cos t, R \sin t, ht)$

$$k = \frac{R}{R^2 + h^2}, \quad \tau = \frac{h}{R^2 + h^2} \leadsto \text{Possiamo ricavare } R \text{ e } h \Rightarrow \frac{R^2 + h^2}{(R^2 + h^2)^2} = k^2 + \tau^2 = \frac{1}{R^2 + h^2}$$

$$R = k(R^2 + h^2) = \frac{k}{k^2 + \tau^2} > 0 \quad h = \tau(R^2 + h^2) = \frac{\tau}{k^2 + \tau^2}$$

OSS

Se la curvatura $\kappa = 0 \Rightarrow$ definiamo la torsione $\tau := 0$

PROP

Data una curva biregolare; $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow$ la curva è piana

DIM

$\Leftarrow$ Se $f(s) \in \pi$ piano $\forall s \Rightarrow$ sia quindi $\pi: (p-p_0) \cdot \underline{b} = 0$ con $\|\underline{b}\| = 1$
non c'è $(f(s)-p_0) \cdot \underline{b}$ perché $\underline{b} = 0$ perché $\underline{b}$ costante
 $\Rightarrow (f(s)-p_0) \cdot \underline{b} = 0 \quad \forall s \Rightarrow$ derivo rispetto a s e ottengo $\underline{t}(s) \cdot \underline{b} = 0 \quad \forall s$
 $\Rightarrow \kappa(s) \underline{n}(s) \cdot \underline{b} = 0 \quad \forall s \Rightarrow \underline{n}(s) \cdot \underline{b} = 0 \quad \forall s$. Quindi $\underline{b}$ vers. cost. $\perp$ sia a $\underline{t}$ che a $\underline{n} \Rightarrow \underline{b}$ è
il versore binormale. perché $\underline{b}$ è cost. Quindi $0 \equiv \underline{\dot{b}}(s) = -\tau(s) \underline{n}(s) \Rightarrow \tau(s) \equiv 0 \quad \forall s$ perché $\underline{b}$ è il binormale **OK**

$\Rightarrow \tau \equiv 0 \Rightarrow \underline{\dot{b}}(s) \equiv 0 \quad \forall s \Rightarrow \underline{b}$ costante

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, sia $f(s_0) = \underline{f}_{s_0} \Rightarrow f(s) = \underline{f}_{s_0} + \int_{s_0}^s \underline{t}(s) ds$

So che $\underline{t}(s) \cdot \underline{b}(s) = 0$. Calcolo ora $\left(\int_{s_0}^s \underline{t}(s) ds \right) \cdot \underline{b} = \int_{s_0}^s \underbrace{\underline{t}(s) \cdot \underline{b}(s)}_{=0} ds = 0$

Ho quindi trovato $(f(s) - f(s_0)) \cdot \underline{b} = 0 \Rightarrow$ la curva giace sul piano per $f(s_0)$ e $\perp$ a $\underline{b}$
CVD

ES

$\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t^2 - t \\ z(t) = 1 + t \end{cases}$ a) Trovare la terna di Frenet in $(0,0,2)$
b) Calcolare raggio osculatore

SVOLG

a) $z(t) = 1+t = 2 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow (0,0,2)$ viene percorso solo una volta

$f'(t) = (2t, 2t-1, 1)$ Non è lunghezza d'arco perché non ha norma 1

$$f'(1) = (2, 1, 1) \Rightarrow \underline{t}(1) = \frac{f'(1)}{\|f'(1)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, 1, 1)$$

$f''(t) = (2, 2, 0)$ per trovare vettore normale duali togliere a f'' la sua stessa proiezione su f'

$$\text{vettore normale} = f''(1) - \frac{1}{\|f'(1)\|^2} (f'(1) \cdot f''(1)) f'(1) = (2, 2, 0) - \frac{6(2, 1, 1)}{6} = (0, 1, -1)$$

$$\Rightarrow \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1)$$

$$\text{Quindi } \underline{b}(1) = \underline{t}(1) \wedge \underline{n}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-2, 2, 2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, 1)$$

Osservo ora che $f'''(t) \equiv 0 \Rightarrow \tau(s) = 0 \quad \forall s \Rightarrow$ la curva è piana

Il piano (osculatore) su cui giace la curva è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \underline{b} = 2 \Rightarrow -x + y + z = 2$

$$b) \kappa(1) = \frac{\|f' \wedge f''\|}{\|f'\|^3} = \frac{\|(-2, 2, 2)\|}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \rho(1) = 3\sqrt{2} \text{ raggio di curvatura}$$

Il centro C del cerchio osculatore è $f(1) + p(1) \wedge n(1) = (0, 0, 2) + \frac{3\sqrt{2}}{2} (0, 1, -1) = (0, 3, -1)$

Il cerchio è $\begin{cases} -x+y+z=2 \\ x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=p^2=18 \end{cases}$ in forma parametrica è

$$C + (\cos \theta \cdot \underline{t}(1) + \sin \theta \cdot \underline{n}(1)) p(1) = 0$$

ES

$f(t) = (t, t^2, t^3)$ CURVA GOBBA è piana?

$$f'(t) = (1, 2t, 3t^2) \quad f''(t) = (0, 2, 6t) \quad f'''(t) = (0, 0, 6)$$

$$\tau = \frac{(f' \wedge f'') \cdot f'''}{\|f' \wedge f''\|^2}$$

$$(f' \wedge f'') \cdot f''' = \det \begin{pmatrix} 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 12$$

↑
prodotto misto

$$\|f' \wedge f''\|^2 = \|f'\|^2 \|f''\|^2 - |f' \cdot f''|^2 = (1+4t^2+9t^4)(4+36t^2) - (4t+18t^3)^2 = \dots \text{ non viene costante, dipende da } t$$

Quindi se $t \rightarrow \pm\infty \Rightarrow k \rightarrow 0$ e $\tau \rightarrow 0$

OSS

$f: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(t) = f(au) \quad t=au \quad a>0$ costante t, u parametri

$$f'(t) = \frac{df}{dt} \quad \frac{df}{du} = a f'(au) = a f'(t) = a \frac{df}{dt}$$

$$\frac{d^2f}{du^2} = a^2 f''(au) = a^2 \frac{d^2f}{dt^2}$$

$$\frac{d^3f}{du^3} = a^3 f'''(au)$$

$$k = \frac{\|f' \wedge f''\|}{\|f'\|^3} = \frac{\|\frac{1}{a} \frac{df}{du} \wedge \frac{1}{a^2} \frac{d^2f}{du^2}\|}{\|\frac{1}{a} \frac{df}{du}\|^3} = \frac{\|f_u \wedge f_{uu}\|}{\|f_u\|^3}$$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad k, \tau$ sono funzioni omogenee

$$\tau = \frac{(f' \wedge f'') \cdot f'''}{\|f' \wedge f''\|^2} = \frac{(\frac{1}{a} f_u \wedge \frac{1}{a^2} f_{uu}) \cdot \frac{1}{a^3} f_{uuu}}{\|\frac{1}{a} f_u \wedge \frac{1}{a^2} f_{uu}\|^2} = \frac{(f_u \wedge f_{uu}) \cdot f_{uuu}}{\|f_u \wedge f_{uu}\|^2}$$

14/03

DEF INDICE DI ROTAZIONE DELLE CURVE PIANE (pag 393 DO CARMO)

Curva chiusa $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(a) = f(b)$ regolare ($\mathcal{C}^1$, $f'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$, $f'(b) = f'(a)$)

$\underline{t}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\underline{t}(a) = \underline{t}(b)$. In realtà $\underline{t}: [a, b] \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

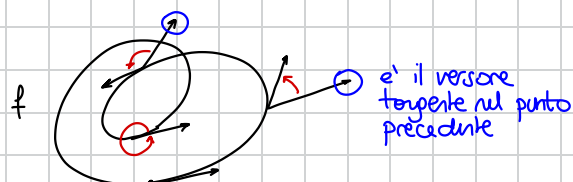
Possiamo quindi vedere $[\underline{t}] \in \pi_1(S^1, \underline{t}(a) = \underline{t}(b)) \cong \mathbb{Z}$

$[\underline{t}] \longrightarrow \text{Ind}(f) = \text{INDICE DI ROTAZIONE DELLA CURVA } f$

OSS

L'indice di rotazione mi dice il numero di giri che fa il vettore tangente lungo il percorso della curva

ES

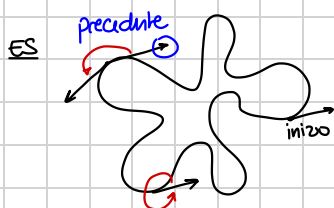


$$\text{Ind } f = 2$$

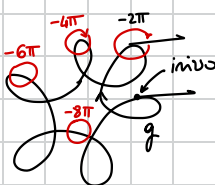
OSS

Essendo $\underline{t}$ versore tangente $\Rightarrow \exists \theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua (unico a meno di traslazione per $2\pi k$) tale che $\underline{t}(t) = (\cos 2\pi\theta(t), \sin 2\pi\theta(t))$

Quindi possiamo scrivere $\text{Ind } f = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$



$$\text{Ind } f = 1$$



$$\text{Ind } g = 4$$

OSS

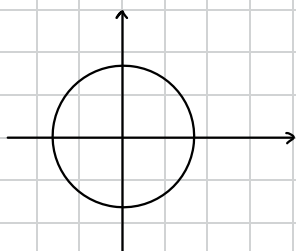
Sia f chiusa piana almeno $\mathbb{C}^2 \Rightarrow$ Sappiamo che $\frac{d\theta}{ds} = \tilde{\kappa}$

$$\text{Ind } f := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{s(a)}^{s(b)} \frac{d\theta}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{s(a)}^{s(b)} \tilde{\kappa} ds = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} dt$$

$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$

ES

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(t) = (\cos 2\pi n t, \sin 2\pi n t) \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}$ circonferenza percorsa n volte



$$\begin{aligned} x(t) &= \cos 2\pi n t \\ y(t) &= \sin 2\pi n t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2\pi n \sin 2\pi n t \\ y'(t) &= 2\pi n \cos 2\pi n t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x''(t) &= -4\pi n^2 \cos 2\pi n t \\ y''(t) &= -4\pi n^2 \sin 2\pi n t \end{aligned}$$

$$\text{Ind } f = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{8\pi^3 n^3 (\sin^2 2\pi n t + \cos^2 2\pi n t)}{4\pi n^2} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{8\pi^3 n^3}{4\pi^2 n^2} = n$$

OSS

Dato una curva $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ chiusa, regolare $\Rightarrow \underline{t}: [a, b] \rightarrow S^1$ versore tangente

Sia $\underline{t}_0 \in S^1$ versore (direzione) fissato tangente alla curva (questa sarà la direzione positiva)

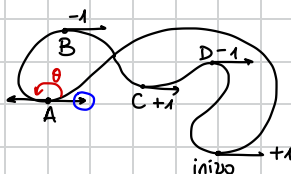
Se $\underline{t}'(t_0)$ è un numero finito di elementi e se $\forall t \in [a, b] \quad t.c. \quad \underline{t}(t) = \underline{t}_0$ ho $\tilde{\kappa}(t) \neq 0$

$$\Rightarrow \text{Ind } f = \sum_{\underline{t}(t) = \underline{t}_0} \text{sign}(\tilde{\kappa}(t))$$

$\text{sign}(\tilde{\kappa}(t)) = \text{sign}(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)) = \text{sign} \det \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}$

ES

θ andando da A a B diminuisce
 $\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \tilde{\kappa} < 0$



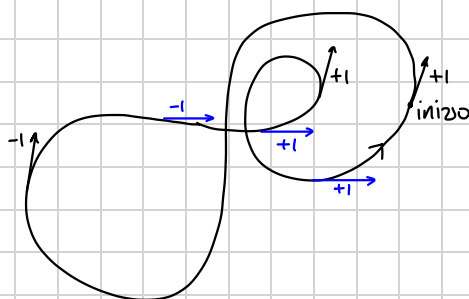
OSS

Se f è biregolare $\forall t$ il segno della curvatura è costante

ES

Fisso la direzione $\nearrow \underline{t}_0$

Fisso la direzione $\longrightarrow \underline{t}_0$



$$\Rightarrow \text{Ind } f = +1$$

$$\Rightarrow \text{Ind } f = +1$$

OSS

Data una curva chiusa $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizzata con la lunghezza d'arco

$\Rightarrow$ considero $\hat{f}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\hat{f}(s) = f(-s)$ (sempre parametrizzata con la lunghezza

d'arco). Sappiamo già che $\hat{k}(s) = -k(-s)$.

$$\text{Quindi } \text{Ind } f = \frac{1}{2\pi} \int_a^b k(s) ds$$

$$\text{Ind } \hat{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{-a} -k(-s) ds = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b k(s) ds = -\text{Ind } f$$

Quindi l'indice cambia segno se percorro la curva al contrario

OSS

MOTI RIGIDI

L'indice di rotazione NON cambia perché i moti rigidi preservano la curvatura orientata

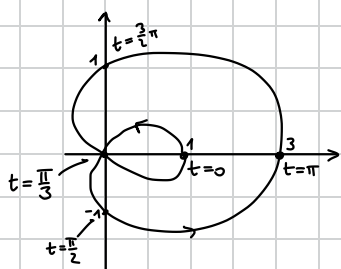
OSS

RIFLESSIONI

Se R è una riflessione per una retta $\Rightarrow \text{Ind } Rf = -\text{Ind } f$ perché R fa cambiare

il segno della curvatura orientata

ESERCIZIO



$$\rho = 2\cos\theta - 1 \quad \text{COORDINATE POLARI}$$

$$\begin{cases} x(t) = (2\cos t - 1)\cos t \\ y(t) = (2\cos t - 1)\sin t \end{cases}$$

Curva chiusa parametrizzata su $[0, 2\pi]$

Dal disegno si capisce che $\text{Ind } f = 2$, ora lo dimostriamo:

$$\begin{cases} x'(t) = \sin t - 4\cos t \sin t \\ y'(t) = -4\sin^2 t + 2\cos^2 t - \cos t \end{cases}$$

Fissiamo come direzione positiva quella verso l'alto $\uparrow$ verticalmente

Studiamo quindi quando si annulla la componente x della derivata, cioè quando

$$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \begin{cases} t=0 \Rightarrow y'(0) = 1 > 0 \\ t=\pi \Rightarrow y'(\pi) = 1 > 0 \end{cases}$$

$$4\cos t = 1 \Rightarrow \cos t = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin t = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow y'(t) = -2\frac{15}{16} + \frac{2}{16} - \frac{1}{4} < 0$$

Vogliamo trovare ora il segno della curvatura orientata $\forall t$ t.c. il vettore tangente in $f(t)$ è verticale

$$\text{sign } \tilde{k} \Big|_{t=0} = \text{sign} \left| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \right| = \text{sign} \left(\underbrace{x'y'' - x''y'}_{\substack{=0 \\ x'(0)=0, y'(0)>0}} \right) \Big|_{t=0} = \text{sign}(-x'') \Big|_{t=0} = -\text{sign } x''(0) = -(-1) = +1$$

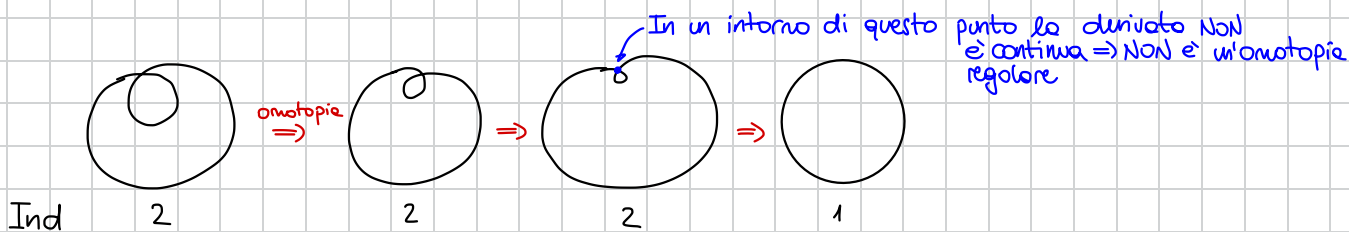
$$x''(t) = \cos t + 4\sin^2 t - 4\cos^2 t \Rightarrow x''(0) = \dots = -3 < 0$$

Gli stessi calcoli per $t=\pi$ danno che $\text{sign } \tilde{L}(\pi) = +1$

Mentre se li facciamo per t t.c. $4\cos t = 1$ otteniamo $\tilde{L}(t) < 0$

Quindi $\text{Ind } f = 2$

OSS



Ad ogni passo vorrei avere una curva regolare

Qui si vede che, in generale, l'omotopia non preserva l'indice di rotazione

DEF OMOTOPIA REGOLARE

$H: [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ funzione $\mathcal{C}^1$ si dice omotopia regolare di curve chiuse se

- $H(a, t) = H(b, t) \quad \forall t \in [0, 1]$
- $\forall t$ la curva $H_t: \underbrace{[a, b]}_{\mathbb{S}^1} \xrightarrow{\psi} \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\mathbb{S}^1}$ è regolare chiusa cioè $\frac{\partial H}{\partial u}(u, t) \neq 0 \quad \forall u, t$

OSS

- H è un'omotopia tra le curve H_0 e H_1
- Se esiste un'omotopia regolare tra f e g scriveremo $f \sim_R g$

PROP

$f \sim_R g$ curve chiuse $\Rightarrow \text{Ind } f = \text{Ind } g$

DIM

Sia $H: [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ omotopia regolare $f \stackrel{H}{\sim} g$

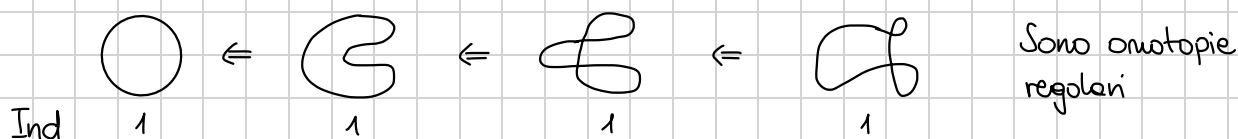
$\Rightarrow$ Posso definire $\theta: [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua t.c. $\frac{\partial H}{\partial u} = \left(\cos \theta, \sin \theta \right)$ (vettore tangente)

So che $\forall t \in [0, 1] \quad \text{Ind } H_t = \frac{1}{2\pi} (\theta(b, t) - \theta(a, t))$

Quindi $\text{Ind } H_t$ è funzione continua a valori in $\mathbb{Z} \Rightarrow$ necessariamente è costante

$\Rightarrow \text{Ind } H_0 = \text{Ind } H_1$ QED

ES



OSS

Ogni curva chiusa semplice ha indice di rotazione ± 1 (se percorso in senso orario o antiorario)

TEO WHITNEY - GRAUSTEIN (NO DIM)

$$\text{Ind } f = \text{Ind } g \Leftrightarrow f \simeq g$$

18/03

ESERCIZIO - OSS

segno $\tilde{\kappa}$



Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva piana regolare $\mathcal{C}^2$ t.c. $\text{Ind } f = 0$

Dimostrare che la curvatura orientata $\tilde{\kappa}$ si annulla in almeno 2 punti e assume valori sia positivi che negativi

SVOLG

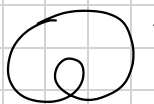
$$\text{Ind } f = \frac{1}{2\pi} \int_{s(a)}^{s(b)} \tilde{\kappa}(s) ds = 0 \Rightarrow \tilde{\kappa} \text{ assume sicuramente il valore } 0$$

Se P.A. $\tilde{\kappa} \equiv 0 \Rightarrow$ la curva f sarebbe un segmento di retta $\Rightarrow$ non sarebbe chiusa $\Rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow \tilde{\kappa} \neq 0$

Supponiamo quindi che $\tilde{\kappa} > 0$ in qualche punto ma essendo $\int \tilde{\kappa} = 0 \Rightarrow \tilde{\kappa}$ deve essere negativo in qualche punto (e viceversa)

Essendo $\tilde{\kappa}$ funzione continua esiste un punto dove si annulla $\Rightarrow$ essendo la curva chiusa $\Rightarrow \tilde{\kappa}$ si annulla 2 volte $\Rightarrow$ ci sono 2 flussi

ES



$$\text{Ind } f = 2 \\ \tilde{\kappa} > 0$$



$$\text{Ind } f = 2 \\ \text{la curvatura ha segno anche negativo} \\ \Rightarrow \text{ci sono 2 flussi}$$

OSS

Sia $A \in GL_2(\mathbb{R})$ ($\det A \neq 0$)

f curva chiusa $\mathcal{C}^1 \Rightarrow Af: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva chiusa $\mathcal{C}^1 \Rightarrow \text{Ind } Af = ?$

$GL_2(\mathbb{R})$ ha 2 componenti connesse $GL_2^+(\mathbb{R}) = \{A: \det A > 0\}$ e $GL_2^-(\mathbb{R}) = \{A: \det A < 0\}$

$$\text{Vale } \text{Ind } Af = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim}}}{(\text{sign } \det A)} \text{Ind } f$$

DIM

$GL_2^+(\mathbb{R})$ connesso $\Rightarrow \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow GL_2^+(\mathbb{R})$ t.c. $\gamma(0) = A, \gamma(1) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Considero ora la curva $H(u, t) = \gamma(t) \cdot f(u) \quad \forall t \in [0, 1]$ curva chiusa regolare $u \in [a, b]$

$$\text{Ind}(\gamma(t) \cdot f(u)) = \frac{1}{2\pi} (\theta(b, t) - \theta(a, t)) \text{ ed \text{e} una funzione continua a valori interi}$$

(\text{e} un'omotopia regolare poich\text{e} $\frac{\partial H}{\partial u} = \text{matrice invertibile } \neq 0$) $\Rightarrow$ \text{e} funzione costante

$$\Rightarrow \text{Ind } f = \text{Ind}(\gamma(1) \cdot f) = \text{Ind}(\gamma(0) \cdot f) = \text{Ind } Af$$

Analogamente $GL_2^-(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow GL_2^-(\mathbb{R})$ t.c. $\gamma(0) = A, \gamma(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{Ind } Af = -\text{Ind } f$
AD

$\gamma_k(t) = (\cos t + k \sin t, \sin t + k \cos t)$ a) Per quali valori di k è regolare?

A invertibile allora
per A è banale
Voglio $\gamma'_k(t) = A_k f'(t) \neq 0$

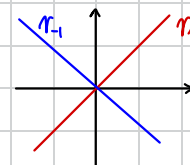
SOLG

a) Sia $f(t) = (\cos t, \sin t)$ $\text{Ind} f = 1$ $t \in [0, 2\pi]$. Considero $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma_k(t) = A_k f(t)$

$$\det A = 1 - k^2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1 \Rightarrow \gamma_k \text{ sarà regolare per } k \neq \pm 1$$

Infatti se $k=1$ otteniamo $\gamma_1(t) = (\cos t + \sin t, \sin t + \cos t)$ che NON è una curva regolare;

Per $k=1$ viene un segmento di retta e $\gamma'_1(\frac{\pi}{4}) = \gamma'_1(\pi + \frac{\pi}{4}) = (0, 0)$



b) Si dica se l'omotopia $H: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $H(k, t) = \gamma_{4k-2}(t)$ è regolare

Se $0 \leq k \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 4k-2 \leq 2 \Rightarrow$ se $4k-2=1$ cioè $k = \frac{3}{4}$ le curve non sono regolari
se $4k-2=-1$ cioè $k = \frac{1}{4}$

Quindi l'omotopia NON è regolare

c) In caso negativo dire se esiste (ed esibire) un'omotopia regolare tra γ_2 e γ_{-2}

$$\begin{aligned} \text{Ind} \gamma_2 &= \text{sign}(\underbrace{\det A_2}_{=-3}) \underbrace{\text{Ind} f}_{=+1} = -1 \\ \text{Ind} \gamma_{-2} &= \text{sign}(\underbrace{\det A_{-2}}_{=-3}) \underbrace{\text{Ind} f}_{=+1} = -1 \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow \text{esiste un'omotopia regolare} \right.$$

Per trovare esplicitamente l'omotopia basta costruire un cammino $p(t)$ tra A_2 e A_{-2}
come si fa???

(posso farlo perché $GL_2^+(\mathbb{R})$ connesso per archi) $\Rightarrow$ l'omotopia regolare cercata è

$$p(t) \cdot f(u)$$

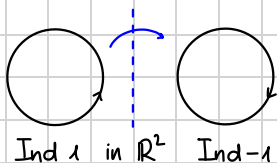
OSS

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva chiusa regolare in $\mathbb{R}^3$, proviamo a fare come abbiamo fatto per le curve piane. Considero il vettore tangente $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}: [a, b] \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ posso vederlo come elemento di $\pi_1(S^2, \frac{f'(a)}{\|f'(a)\|}) = 0$. Essendo $\pi_1(S^2) = 0 \Rightarrow$ in questo modo non si ottiene nessun invariante

TEO SMALE-HIRSCH (NO DIM)

Date f, g regolari chiuse in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ esiste un'omotopia regolare tra f e g ($f \sim g$)

ES



Nello spazio $\mathbb{R}^3$ posso fare una rotazione (omotopia regolare) che porta la prima curva sulla seconda

PROP (pag. 396 DO CARMO)

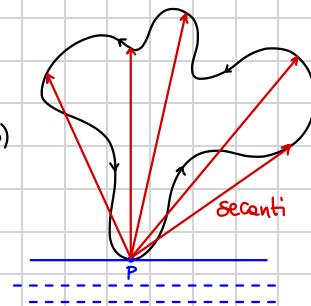
$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva regolare semplice $\Rightarrow \text{Ind } f = \pm 1$

DIM

Sia f come nell'Hp. Partendo da sotto considero le rette orizzontali e prendo la prima che interseca la curva (sarà tangente)

A meno di riparametrizzare la curva, posso considerare $P = f(a) = f(b)$

(Possiamo anche supporre che f sia parametrizzata con la lunghezza d'arco)



Considero il cammino $\gamma: [a, b] \rightarrow S^1$ dato da $s \mapsto \dot{f}(s)$, voglio dimostrare che $\gamma = \pm 1 \in \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Considero le secanti per p , considero il cammino $\alpha: [a, b] \rightarrow S^1$ dato da

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(a)}{\|f(t) - f(a)\|} & \text{se } t \neq a, b \\ \dot{f}(a) & \text{se } t = a \\ \dot{f}(b) & \text{se } t = b \end{cases} \quad \text{ben definita infatti}$$
$$t \mapsto a \quad \alpha(t) \rightarrow \frac{f(a) - f(a)}{\|f(a) - f(a)\|} = \dot{f}(a)$$
$$t \mapsto b \quad \alpha(t) \rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|} = \dot{f}(b)$$

Per costruzione di P si ha che $\text{Im } \alpha \subseteq \{(\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in [0, \pi]\} = \text{mezza circonferenza}$

Osservo che vale $\dot{f}(a) = \pm (1, 0)$ direzione orizzontale

dipende dal verso di percorrenza, nel caso del disegno è $+(1, 0)$

Considero ora un altro cammino $\beta: [a, b] \rightarrow S^1$ dato da $\beta(t) = -\alpha(t)$, così ottengo

l'altra mezza circonferenza (considero i vettori secanti ma con la punta in P)

concatenazione di cammini

Considero quindi $[\alpha * \beta] \in \pi_1(S^1, \dot{f}(a))$ e affermo che $[\alpha * \beta]$ è generatore di $\pi_1(S^1, \dot{f}(a))$.

Rimane da mostrare che $[\alpha * \beta] = [\gamma]$

Sia $T = \{(s, t) : a \leq s \leq t \leq b\}$ triangolo

Considero la funzione $H: T \rightarrow S^1$ data da $H(s, t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(s)}{\|f(t) - f(s)\|} & a < s < t < b \\ \dot{f}(s) & s = t \\ -\dot{f}(a) & s = a \wedge t = b \end{cases}$

vedi libro p. 38

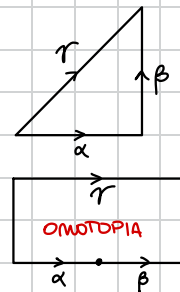
H è funzione continua (si dimostra)

Sia $L: \text{rect} \rightarrow \text{tri} \rightarrow \text{triangolo}$ funzione continua dal rettangolo al Triangolo

L'omotopia cercata è quindi $H \circ L: [0, 1]^2 \rightarrow S^1$

Quindi $[\gamma] = [\alpha * \beta] \Rightarrow \gamma$ è omotopo ad un generatore di $\pi_1(S^1) \Rightarrow \text{Ind } f = 1$

CWD



OSS

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva chiusa biregolare in $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}^2$, parametrizzata con lunghezza d'arco

Possiamo considerare la funzione $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}): [a, b] \rightarrow SO(3)$ mettendo in colonna i 3

vettori e $\det(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}) = +1$

$\Rightarrow$ Così definiamo un elemento in $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \text{Ind } f \in \mathbb{Z}_2$

OSS

Proiettivato di $\mathbb{R}^4$

$$\mathbb{RP}^3 = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \cong SO(3) \quad \text{e} \quad \pi_1(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$$

PERCHÉ

$$\mathbb{RP}^3 \cong \frac{S^3}{\pm 1} \cong \frac{D^3}{\sim}$$

sfera e disco in $\mathbb{R}^3$
 identificazione pti antipodali
 $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y| \text{ e } x = -y \text{ oppure } x = y$

Si può anche scrivere $\mathbb{RP}^3 \cong \frac{S^2 \times [0, 1]}{\sim}$ $\xrightarrow{\text{norma}}$ $(x, t) \sim (y, s)$ se $t = s = 0 \vee t = s = 1 \text{ e } x = -y$
 $\vee t = s = 1 \text{ e } x = y$

C'è quindi un omeomorfismo tra $S^2 \times [0, 1] / \sim \rightarrow SO(3)$
 $[x, t] \mapsto$ Rotazione anticlockwise di πt attorno all'asse generato da x

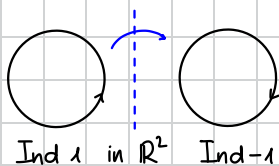
Si dimostra che è una mappa ben definita, continua, iniettiva e suriettiva $\Rightarrow$ omeomorf.

Quindi $\mathbb{RP}^3 \cong S^2 \times [0, 1] / \sim \cong SO(3) \Rightarrow \mathbb{RP}^3 \cong SO(3)$ ok

Si può ora considerare $S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$ rivestimento a 2 fogli, inoltre è un rivestimento universale perché $\pi_1(S^3) = 0 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$

(C'è anche un omeomorfismo $SO(2) \rightarrow SO(3)$ che induce in omotopia il morfismo di gruppi $\pi_1(SO(2)) \xrightarrow{\mathbb{Z}} \pi_1(SO(3)) \xrightarrow{\mathbb{Z}_2}$ proiezione)

ES

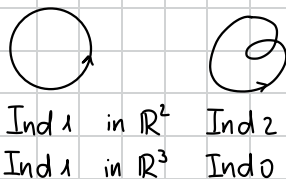


l'indice di entrambe le curve in $\mathbb{R}^2$ è 1

ES

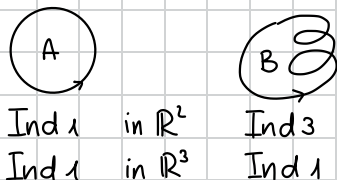
8 In $\mathbb{R}^2$ ha indice 0, non è definito l'indice in $\mathbb{R}^3$ perché non è biregolare

ES



Quindi in $\mathbb{R}^3$ non esiste un'omotopia regolare che mi manda la prima alla seconda senza creare un flusso.

ES



Esiste un'omotopia biregolare (cioè $\forall$ tempo la curva è bireg.) tra A e B $\leadsto$ trovarla per esercizio

f curva regolare in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{Ind} f \in \mathbb{Z}$

f curva regolare in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{Ind}^3 f \in \mathbb{Z}_2$

$\text{Ind}^3 f \equiv \text{Ind} f \pmod{2}$

SUPERFICI

DEF SUPERFICI PARAMETRIZZATE IN $\mathbb{R}^n$ (Nozione locale)

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, una superficie parametrizzata (immersa) in $\mathbb{R}^n$ è una funzione

$x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (per il momento basta che sia) $\mathcal{C}^1$ t.c.

1) $\forall (u_0, v_0) \in U$ i vettori $\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)$ siano linearmente indipendenti

2) $x: U \rightarrow x(U)$ sia un omeomorfismo

DEF CURVE COORDINATE

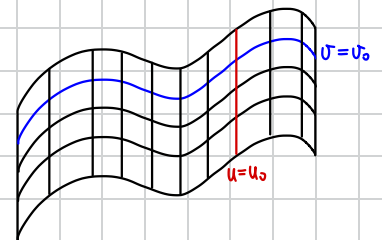
Sia $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, fissiamo $v = v_0 \Rightarrow$ ottengo una curva regolare in un intorno di u_0

che manda $u \mapsto x(u, v_0)$

Analogamente fissiamo $u = u_0 \Rightarrow$ ottengo una curva regolare in un intorno di v_0

che manda $v \mapsto x(u_0, v)$

Queste 2 curve li chiamiamo curve coordinate



OSS

Da ora consideriamo $n=3$

ES

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in \mathcal{C}^1$

l'applicazione $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$ è una curva parametrizzata infatti

$\frac{\partial x}{\partial u} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$ $\frac{\partial x}{\partial v} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$ sono indipendenti

$\Rightarrow \text{Im } x = \text{Graf}(f) := \Gamma(f)$

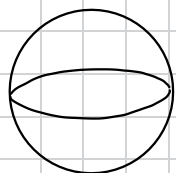
Analogamente potrei considerare $y(u, v) = (u, f(u, v), v)$ oppure $z(u, v) = (f(u, v), u, v)$

DEF SUPERFICIE (Nozione globale)

Una superficie è un sottospazio $S \subseteq \mathbb{R}^3$ t.c. $\forall p \in S \exists$ un intorno aperto V di p in $\mathbb{R}^3$ e

una superficie parametrizzata $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $S \cap V = x(U)$

ES SFERA



$$S = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Sia $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ che è l'emisfero superiore

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\} \Rightarrow \chi: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \chi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

Posso considerare tutti i G aperti dove posso definire la superficie χ e sono:

$$(u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}) \text{ calotta meridionale}; (u, \pm \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v); (\pm \sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v)$$

PROP

localmente ogni superficie è il grafico di una funzione

DIM

Sia S superficie, $P \in S$, $\chi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ^(param. locale) superficie con $(u_0, v_0) \in U$ t.c. $\chi(u_0, v_0) = P$

$\Rightarrow \chi(U)$ intorno aperto di P in S

Chiamiamo $\chi(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \Rightarrow$ essendo χ una ^{sup.} param si ha che

$$\frac{\partial \chi}{\partial u} \text{ e } \frac{\partial \chi}{\partial v} \text{ devono essere vettori indipendenti, cioè } \text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow$ Un minore 2×2 della precedente matrice deve essere una matrice invertibile

(senza perdita di generalità prendiamo le prime 2 colonne)

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x_1}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Per tes della funzione implicita si ha che}$$

$\exists$ un intorno $T \subseteq U$ di (u_0, v_0) t.c. la funzione $T \rightarrow \mathbb{R}^2$ ^(inversione locale) è invertibile
 $(u, v) \mapsto (x_1(u, v), x_2(u, v))$

con inversa χ^{-1}

l'inversa sarà $\begin{cases} u = u(x_1, x_2) \\ v = v(x_1, x_2) \end{cases}$ che è ben definita

Definisco ora la funzione $g: \text{Im } T \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto x_3(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))$$

Si ha quindi $\chi(T) = \text{Graf}(g)$

CND

OSS

In $\mathbb{R}^3$ χ_u, χ_v indipendenti $\Leftrightarrow \chi_u \wedge \chi_v \neq 0$

OSS

le curve coordinate dipendono dalla parametrizzazione

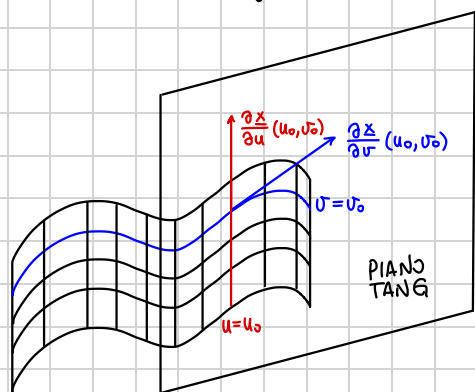
DEF PIANO TANGENTE

Dato una superficie parametrizzata $\chi: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, il piano tangente in $\chi(u_0, v_0)$ è

il piano parallelo a $\text{Span} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial v} \right\}$ passante per $\chi(u_0, v_0)$

In $\mathbb{R}^n$ il piano tangente ha EQ PARAMETRICA $P = x(u_0, v_0) + s \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + t \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)$

In $\mathbb{R}^3$ il piano tangente ha EQ CARTESIANA $(P - x(u_0, v_0)) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = 0$
vettore normale al piano tangente



Il piano tangente contiene le rette tangenti
alle curve coordinate in (u_0, v_0)

DEF SUPERFICIE IN FORMA CARTESIANA (in $\mathbb{R}^3$)

$V \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 t.c. $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)(P) \neq 0 \quad \forall P \in S$

Considero $S = \{p: f(p) = 0\}$ è una superficie (localmente)

ES

Per la sfera $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ $S^2 =$ sfera unitaria $\nabla f = (2x_1, 2x_2, 2x_3) \neq 0$

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in S$. Sia $P = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in S$

Senza perdita di generalità suppongo $\frac{\partial f}{\partial x_3}(P) \neq 0 \Rightarrow$ per tes della funzione implicita, (inversione locale)

localmente la funzione $x_3 \mapsto f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3)$ è invertibile in un intorno di $\bar{x}_3$

Quindi localmente S è il grafico di una funzione $x_3 = x_3(x_1, x_2)$

Nell'esempio della sfera avevamo $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ in un intorno di $(0, 0, 1)$

ES

Eq cartesiana di un piano $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$

QSS

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ curva, sia $t_0 \in I$ allora possiamo definire le seguenti rette:

RETTA TANGENTE $P = f(t_0) + u f'(t_0) = f(t_0) + u \underline{t}(t_0) \quad \forall u \in \mathbb{R}$

RETTA NORMALE $P = f(t_0) + u \underline{n}(t_0) \quad \forall u \in \mathbb{R}$

RETTA BINORMALE $P = f(t_0) + u \underline{b}(t_0) \quad \forall u \in \mathbb{R}$

Possiamo considerare delle superfici particolari rispetto alla curva

Potrei considerare la **SUPERFICIE DELLE TANGENTI** data da

$x(u, v) = f(u) + v f'(u)$ ma bisogna verificare che sia effettivamente una superficie:

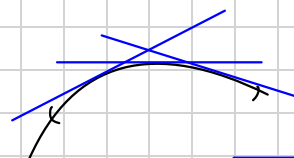
$$\frac{\partial x}{\partial u} = f'(u) + v f''(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = f'(u) \quad \text{devono essere vettori indipendenti}$$

Sono indipendenti se f è biregolare e $v \neq 0$

Quindi x è superficie parametrizzata soltanto se mi restringo in un intervallo abbastanza piccolo (altrimenti si autointerseca)

Se $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ devo prendere $U = (u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times (v_1, v_2)$ con $v_1 > 0$, $v_2 - v_1 < \varepsilon$ cioè

$U = (u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times (v_1, v_1 + \varepsilon)$ per ε abbastanza piccolo



21/03

DEF CARTA LOCALE (LIBRO)

Sia $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata in $\mathbb{R}^n$, chiamiamo carta locale la sua inversa $x^{-1}: x(U) \rightarrow U$

DEF ATLANTE (LIBRO)

Un atlante di una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una famiglia $\mathcal{A} = \{f_\alpha\}$ di parametrizzazioni

locali $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow S$ t.c. $S = \bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha)$

OSS

Sia $\varphi: U' \rightarrow U$ diffeomorfismo, se $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione locale di una superficie $S \Rightarrow x \circ \varphi: U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un'altra parametrizzazione locale di S

OSS

- Data una parametrizzazione locale di una superficie S , grazie alla carta locale, possiamo "indurre" delle coordinate su S .
- Parametrizzazioni locali diverse forniscono coordinate (carte) locali diverse!

ES (continua dopo *)

Consideriamo le coordinate sferiche per una sfera di raggio R

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \sin \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se prendo } \varphi \in (0, 2\pi) \text{ e } \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ ottengo una carta locale} \\ \text{su } S^2 - \{\text{poli}\} \text{ (la carta locale è iniettiva)} \end{array}$$

Possiamo anche prendere la carta data da $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{cases}$ (calotta superiore)

Abbiamo quindi le 2 carte locali (u, v) e (φ, θ)

$\Rightarrow$ Esiste un diffeomorfismo $(u, v) \longleftrightarrow (\varphi, \theta)$ è diffeom. se ci restringiamo

su $\{(u, v): 0 < u^2 + v^2 < R^2, u \neq 0, v \neq 0\}$ e $\{(\varphi, \theta): \varphi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\}$

DEF SUPERFICIE ORIENTABILE (LIBRO)

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie. Diremo che due parametrizzazioni locali $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow S$ e

$\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow S$ determinano la stessa orientazione se $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = \emptyset$ oppure se

$\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) > 0$ (dove è definito, cioè su $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta))$)

Se invece $\det \text{Jac}(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha) < 0$ diremo che le due parametrizzazioni locali hanno orientazioni opposte.

S si dice orientabile se esiste un atlante $A = \{\varphi_\alpha\}$ composto da carte a 2 a 2 orientate

Se fissiamo un tale atlante diremo che la superficie S è orientata dall'atlante A

OSS (LEZIONE)

Siano 2 carte locali $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq S$, $\varphi': U' \rightarrow \varphi'(U') \subseteq S$ (supponiamo che

$$\varphi(U) \cap \varphi'(U') \neq \emptyset \Rightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi': U' \xrightarrow{\varphi'} S \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \quad \varphi^{-1} \circ \varphi(u', v') = \begin{cases} u = u(u', v') \\ v = v(u', v') \end{cases}$$

$$\Rightarrow J(\varphi^{-1} \circ \varphi') = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \quad \det J \neq 0$$

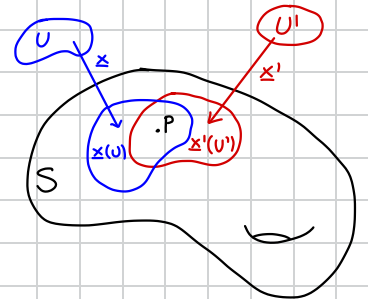
Se una superficie S ha un atlante t.c. $\det J > 0$ per ogni coppia di parametrizzazioni (dell'atlante) $\Rightarrow$ la superficie S si dice orientabile

OSS

Sia $P \in \varphi(U) \cap \varphi'(U') \Rightarrow$ posso scrivere $P = \varphi(u, v) = \varphi'(u', v')$

$\Rightarrow \exists$ un certo intorno in cui le coordinate (u, v) e (u', v')

sono legate da un diffeomorfismo



* ES

Il diffeomorfismo (cambio di coordinate) che lega $(u, v) \longleftrightarrow (\varphi, \theta)$ è

$$T = \begin{cases} u = R \cos \theta \cos \varphi \\ v = R \cos \theta \sin \varphi \end{cases} \quad J(T) = DT(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -R \sin \theta \cos \varphi & \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -R \cos \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = -R \sin \theta \sin \varphi & \frac{\partial v}{\partial \varphi} = R \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det J = -R^2 \cos \theta \sin \theta < 0 \Rightarrow$ orientazione negativa

OSS

Il $\det$ è una funzione continua $\Rightarrow \text{sign}(\det J)$ è costante in ogni componente connesso di $\varphi(U) \cap \varphi'(U')$

OSS

La sfera orientabile

OSS VETTORE NORMALE e CAMBIO DI COORDINATE

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie $\Rightarrow$ Possiamo definire il vettore normale $N = \frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v}$

Se cambio le coordinate (cambio parametrizzazione), voglio mostrare che N non cambia direzione (potrebbe cambiare verso)

Se chiamo le nuove coordinate (u', v') ho $N' = \frac{\partial x'}{\partial u'} \wedge \frac{\partial x'}{\partial v'}$

$(x: U \rightarrow S, x': U' \rightarrow S)$ sup. parametrizz. b.c. $x(U) \cap x'(U') \neq \emptyset$

Vale $N' = \det J \cdot N$ (con J che indica lo Jacobiano del cambio coordinate
dovei prendere una restrizione di x' la cui immagine è interamente contenuta in $x(U)$)
dato da $T: \begin{cases} u = u(u', v') \\ v = v(u', v') \end{cases} \quad T = x' \circ x': U' \xrightarrow{x'} S \xrightarrow{x^{-1}} U$

DIM

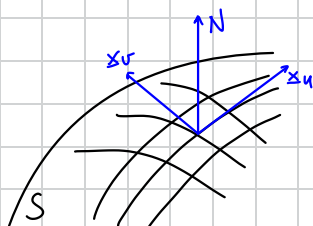
Abbiamo $x(u, v) = x(T(u', v')) = x(u(u', v'), v(u', v')) = x'(u', v')$. Calcolo N' :

$$\frac{\partial x'}{\partial u'} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u'}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v'} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v'}$$

$$\text{Quindi } N' = \frac{\partial x'}{\partial u'} \wedge \frac{\partial x'}{\partial v'} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u'} \right) \wedge \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v'} \right) =$$

si annullano
si annullano



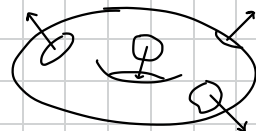
$$= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u'} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u'} \wedge \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v'} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial u}{\partial v'} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \right) = \det J \cdot N \quad \text{QED}$$

OSS (CARATTERIZZAZIONE ORIENTABILITÀ) (PROP 4.3.7 ABATE-TOVENA)

Se S è superficie orientabile in $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ ammette un "versore normale continuo" cioè
una funzione (campo vettoriale) $f: S \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ continua che associa ad ogni pto
di S il versore normale al piano tangente a S in quel punto



OSS (INTUITIVA)

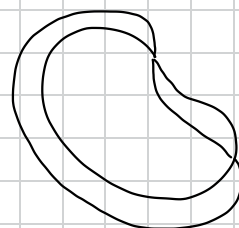
Se S ha 2 facce di colore diverso (cioè 2 facce distinte) $\Rightarrow S$ è orientabile

ES

Il NASTRO DI MÖBIUS NON è orientabile

La BOTTIGLIA DI KLEIN NON è orientabile in $\mathbb{R}^4$

Il PIANO PROiettivo NON è orientabile



OSS

Dato una Superficie con un atlante orientato $\Rightarrow$ Posso sempre considerare

l'orientazione opposta che fa cambiare il verso del versore normale

OSS

L'orientabilità di una superficie è un fatto topologico, globale

OSS

Sia $S = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = a \in \mathbb{R} \text{ fissato}\}$ con $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione C^1

Se $\nabla F(x, y, z) \neq 0$ per $(x, y, z) \in S \Rightarrow S$ è una superficie orientabile perché

∇F è sempre $\perp$ al piano tangente al grafico della funzione

Supponiamo ora che $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ in $(x, y, z) \in S$. Posso considerare la funzione

$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ dove V è un intorno aperto di p in $\mathbb{R}^3$ (Abbiamo usato il teorema delle funzioni implicite)
 $(x, y, z) \mapsto (x, y, F(x, y, z))$

Calcoliamo $J(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \det J(\varphi) = \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$

$\Rightarrow \varphi$ C^1 (per funz. implicita dato che F C^1), invertibile con inversa C^1 (per inversione locale)

$\Rightarrow \exists V' \subseteq V$ t.c. $\varphi|_{V'}$ è diffeomorfismo locale. (Quindi $p \in V' \subseteq V$)

Scriviamo quindi l'inversa di $\varphi|_{V'}$, cioè $\varphi|_{V'}^{-1} \cdot \varphi(V') \rightarrow V'$
 $(x, y, z) \mapsto (x, y, h(x, y, z))$

Abbiamo quindi ottenuto una carta locale per S che chiamiamo α data da

$\alpha: V' \rightarrow S$
 $(u, v) \mapsto (u, v, h(u, v, a))$

Mostriamo che effettivamente $(u, v, h(u, v, a)) \in S$:

So che vale $F(u, v, h(u, v, a)) = a$.
in un intorno (che è la proiezione dell'intorno in $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}^2$)
nomi delle componenti $\rightarrow x, y, z$

Considero $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial y} = 0$
derivato di a derivato di a
 $\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ $\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

Quindi $\frac{\partial \alpha}{\partial u} = (1, 0, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}})$ e $\frac{\partial \alpha}{\partial v} = (0, 1, -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}})$ sono vettori indipendenti e

$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \dots$ è proporzionale a $\nabla F \Rightarrow$ il punto $\in S$ ok

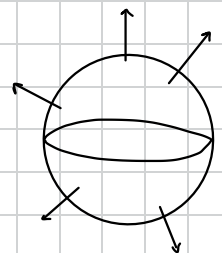
ES

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 > 0$$

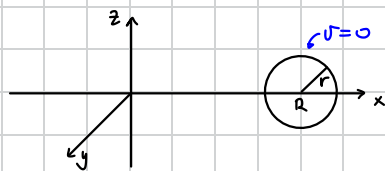
$F(x, y, z) = a > 0$ definisce una superficie orientata

$F(x, y, z) = 0$ è un punto $\Rightarrow$ NON è superficie orientata

$$\nabla F = 2(x, y, z)$$

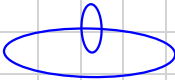


ES



Toro come superficie di rotazione

superficie parametrizzata
$$\begin{cases} x = (R + r \cos u) \cos v \\ y = (R + r \cos u) \sin v \\ z = r \sin u \end{cases}$$

Considero $u \in (0, 2\pi)$ e $v \in (0, 2\pi)$ così tolgo 2 circonferenze blu (generatrici del gruppo fondamentale)  (ottergo così un quadrato)

Posso prendere un'altra parametrizzazione uguale alla prima cambiando l'intervallo

per esempio $u \in (\pi, 3\pi)$ oppure $u \in (\pi, 3\pi)$ oppure $u \in (0, 2\pi)$
 $v \in (0, 2\pi)$ $v \in (\pi, 3\pi)$ $v \in (\pi, 3\pi)$

S è orientabile e 4 è il minimo numero di carte locali per avere un atlante

Si può anche scrivere S in forma implicita

$$x^2 + y^2 = (R + r \cos u)^2 = R^2 + 2Rr \cos u + r^2 \cos^2 u \quad \dots \text{continua}$$

DEF CAMPO DI VETTORI NORMALE

25/03

Un campo di vettori normali su una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è un'applicazione $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^\infty$

t.c. $N(p)$ sia ortogonale a $T_p(S)$ $\forall p \in S$. Se inoltre $\|N\|=1$ diremo che N è

un campo di vettori normali.



DEF SUPERFICIE ORIENTABILE ($\mathbb{R}^3$)

Data $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie, $p \in S$, S si dice orientabile se ammette un campo di vettori normali $\mathcal{C}^1$ (almeno continuo)

OSS

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una qualunque superficie

Supponiamo che S sia connessa per archi $\Rightarrow \exists$ un rivestimento S' a 2 fogli di S

$S' = \{(p, v) : p \in S, v \in T_p(S)^\perp \text{ e } \|v\|=1\}$ che è spazio topologico

Si ha il rivestimento $p: S' \rightarrow S$
 $(p, v) \mapsto p$

vedi ultima oss
del 18/03

Questo mi dà un omomorfismo $\pi_1(S, p_0) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$

Possiamo quindi caratterizzare l'orientabilità dicendo che

- S orientabile $\Leftrightarrow \varphi$ è l'omomorfismo banale

COR

Se $\pi_1(S) = 0 \Leftrightarrow S$ è orientabile

CONTROESEMPIO

Toro che è orientabile ma NON è semplicemente connesso

OSS

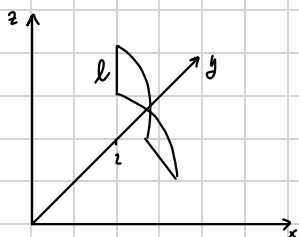
$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, se $\forall p \in F^{-1}(c)$ si ha $\nabla F(p) \neq 0 \Rightarrow F^{-1}(c)$ è superficie orientabile

(perché ∇F è funzione continua ed è esso stesso il vettore normale)

OSS NASTRO DI MOEBIUS M

Rivedi box
Anche sul libro
ABATE-TOVENA
O DO CARMO

$$\begin{cases} x(u, v) = (2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin u \\ y(u, v) = (2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos u \\ z(u, v) = v \cos \frac{u}{2} \end{cases} \quad v \in (-1, 1)$$



$$u=0 \Rightarrow x=0, y=2, z=v$$

$$u=\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}v, y=0, z=\frac{\sqrt{2}}{2}v$$

Prendiamo il segmento l e lo ruotiamo attorno alla z .

Contemporaneamente lo ruotiamo attorno al suo centro

Non è una superficie orientata, dimostriamolo:

MODO A

Osservo che il nostro di Mebius è un retotto di deformazione di S^1 ($M \sim S^1$)

$$\Rightarrow \pi_1(M) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Quindi l'omomorfismo $\varphi: \pi_1(M) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ non è banale $\Rightarrow$ la superficie NON è orientabile. Quando faccio un giro il versore normale cambia verso

MODO B

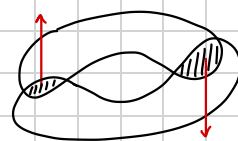
Troviamo 2 carte locali, date dalle formule * con

- 1) $v \in (-1, 1)$ $u \in (0, 2\pi)$
- 2) $v \in (-1, 1)$ $u \in (\pi, 3\pi)$

l'intersezione delle carte è costituita da 2 componenti connesse

Il versore normale ha verso concorde in una componente connessa (dell'intersezione delle due carte) e discorde nell'altra

$$N(u, v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$$



$\Rightarrow$ Non si può scegliere in maniera continua il versore normale (vedi ABATE-TOVENA pag. 132)

DEF CURVE SU SUPERFICI

Sia S superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$, sia $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una sua parametrizzazione locale.

Una curva su S è una funzione $f: [a, b] \rightarrow S$ e localmente vale $f(t) = x(u(t), v(t))$

OSS

La curva f è **REGOLARE** se $u'(t) \neq 0$ oppure $v'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ (supponendo

che $\text{Im } f \subseteq \text{Im } x$. Coincide con la classica definizione di curva regolare

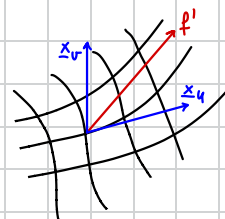
(f regolare se $\forall t \in [a, b] \quad f'(t) \neq 0$) infatti $f'(t) = \frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t) = u'(t) \overset{\text{indipendenti}}{\partial x} + v'(t) \overset{\text{indipendenti}}{\partial x} \neq 0$

$\Leftrightarrow u'(t) \neq 0$ oppure $v'(t) \neq 0$

Quindi, dato che sappiamo che x_u e x_v è una base del piano tangente $T_{f(t)}(S)$,

deduciamo che la curva f è localmente determinata dalla coppia

di funzioni $(u, v): (a, b) \rightarrow U$



OSS CAMBI DI COORDINATE

Sia $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva parametrizzata; consideriamo ora un'altra parametrizzazione

$$\bar{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Abbiamo quindi una nuova base del piano tangente $T_{f(t)}(S)$ data da $\left\{ \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{u}}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{v}} \right\}$

Sappiamo già che l'applicazione che dà il cambiamento di base è lo Jacobiano

Cambiando parametrizzazione vale $x(u(t), v(t)) = \bar{x}(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$

Quindi $x(u, v) \stackrel{*}{=} x(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) = \bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$

Si ha $f'(t) = u'(t) x_u + v'(t) x_v \stackrel{\text{si può anche scrivere come}}{=} \bar{u}'(t) x_{\bar{u}} + \bar{v}'(t) x_{\bar{v}} = \bar{u}'(t) \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} x_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} x_v \right) + \bar{v}'(t) \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} x_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} x_v \right)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{per } * \\ x_{\bar{u}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} x_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} x_v \\ \text{per } * \\ x_{\bar{v}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} x_u + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} x_v \end{array} \right.$$

Sempre per $*$ valgono $\begin{cases} u' = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \bar{u}' + \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \bar{v}' \\ v' = \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \bar{u}' + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \bar{v}' \end{cases}$

Globalmente posso definire $f: (a, b) \longrightarrow S$ che sarà data (localmente) da formule del tipo $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$

OSS

Dato che x_u e x_v costituiscono una base di $T_p(S)$ si ha che

Se $v \in T_p(S) \Rightarrow v = a x_u + b x_v$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e se $p \in x(U)$ con

$x: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ superficie parametrizzata

$$\Rightarrow \|v\|^2 = \langle a x_u + b x_v, a x_u + b x_v \rangle = a^2 x_u \cdot x_u + 2ab x_u \cdot x_v + b^2 x_v \cdot x_v$$

Possiamo ora definire 3 funzioni continue definite su U

$$\begin{cases} E = x_u \cdot x_u \\ F = x_u \cdot x_v \\ G = x_v \cdot x_v \end{cases} \quad \text{Queste funzioni dipendono solo da } (u, v) \in U$$

Con queste riscriviamo $\|v\|^2 = a^2 E + 2ab F + b^2 G \geq 0$

DEF PRIMA FORMA NORMALE

Con le notazioni dell'osservazione precedente, definiamo come prima forma normale

la forma quadratica $\|v\|^2: T_p(S) \longrightarrow \mathbb{R}$

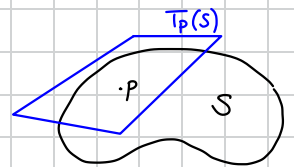
OSS

1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ e $b = 0$

2) Per definizione si ha che $E, G > 0$

3) $EG - F^2 > 0$ è il determinante della forma quadratica $\|v\|^2 = (a, b) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

ed essendo la forma definita positiva $\Rightarrow \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} > 0$



OSS

E, F, G dipendono fortemente dalla parametrizzazione cioè se cambio coordinate, E, F, G cambiano.

Supponiamo di avere come nuova base di $T_p(s)$ $\{x_{\bar{u}}, x_{\bar{v}}\} \Rightarrow$ definiamo

$$\begin{cases} \bar{E} = x_{\bar{u}} \cdot x_{\bar{u}} \\ \bar{F} = x_{\bar{u}} \cdot x_{\bar{v}} \\ \bar{G} = x_{\bar{v}} \cdot x_{\bar{v}} \end{cases}$$

Mostriamo ora cosa induce il cambio di coordinate sui coefficienti della forma (il cambio di coordinate è $x(u, v) = x(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})) = \bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ e la matrice del cambiamento di coordinate è lo Jacobiano)

La matrice della forma quadratica si trasforma $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} J$ e otteniamo

$$\begin{cases} E = \bar{E} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \right)^2 + 2\bar{F} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} + \bar{G} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right)^2 \\ F = \bar{E} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + \bar{F} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right) + \bar{G} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right) \\ G = \bar{E} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right)^2 + 2\bar{F} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right) + \bar{G} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right)^2 \end{cases}$$

OSS LUNGHEZZA DI UN ARCO DI CURVA

Data la curva $f: [a, b] \rightarrow S$ sappiamo che vale $l = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{E(u')^2 + EF(u'v') + G(v')^2} dt$

ES

$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}$ È una curva piana nel piano Oxy

$$E = x_u \cdot x_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad F = x_u \cdot x_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad G = x_v \cdot x_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Torna infatti il fatto che $l = \int_a^b \sqrt{u'^2 + v'^2} dt$

OSS ANGOLI

Siano $v, w \in T_p(s) \Rightarrow v = ax_u + bx_v \quad w = cx_u + dx_v$

$$\cos \alpha = \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \frac{acE + (ad+bc)F + bdG}{\sqrt{Ea^2 + 2Fab + Gb^2} \sqrt{Ec^2 + 2Fcd + Gd^2}} \quad \text{dipende solo da } (u, v)$$



In questo modo possiamo anche trovare l'angolo tra i vettori tangenti alle curve

coordinate ponendo $a=1, b=0, c=0, d=1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}$

Si vede che non è detto che i vettori tangenti alle curve coordinate siano ortogonali,

lo sono solo se $F=0$

OSS AREA DI UNA PORZIONE DI SUPERFICIE

26/03

- Considero una superficie parametrizzata in $\mathbb{R}^3$

$$\text{Area parallelogramma} = \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \delta u \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \delta v \right\| = \sqrt{EG - F^2} \delta u \delta v$$

$$\text{vale } \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \wedge \frac{\partial x}{\partial v} \right\|^2 = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 = \frac{\left\| \frac{\partial x}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial x}{\partial v} \right\|^2}{E G}$$

Se la sup. parametrizzata è $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{U} \subseteq U$ con $\bar{U}$ chiuso e limitato

$$\Rightarrow \text{Area}(x(\bar{U})) = \int_{\bar{U}} \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Osserviamo anche che questa formula è invariante per cambio di parametro.

$$\text{Sappiamo infatti che vale } \begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = J^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J \Rightarrow \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = |\det J| \sqrt{EG - F^2}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} d\bar{u} d\bar{v} = \int |\det J| \sqrt{EG - F^2} du dv = \int \sqrt{EG - F^2} du dv$$

↑
teo cambio di variabili

- Se ho una superficie generale compatta (con un numero finito di carte locali)

$$S = \bigcup_{i=1}^n S_i \quad \text{con } S_i \text{ chiusi t.c. } S_i \subseteq x_i(U_i) \text{ e } \overset{\circ}{S}_i \cap \overset{\circ}{S}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\text{Definisco quindi } \text{Area}(S) = \sum_{i=1}^n \text{Area}(S_i) = \sum_{i=1}^n \int_{\bar{U}_i} \sqrt{E_i G_i - F_i^2} du_i dv_i$$

↑
Supponendo $S_i = x_i(\bar{U}_i)$

DEF DIFFEOMORFISMO DI SUPERFICI

Siano S, T superfici in $\mathbb{R}^3$ C^1 . Un diffeomorfismo è una mappa $\varphi: S \rightarrow T$ t.c.

1) φ è omeomorfismo

2) Date $x: U \rightarrow S$, $y: \bar{U} \rightarrow T$ carte locali $\exists f: U \rightarrow \bar{U}$ omeomorfismo (per U e $\bar{U}$

abbastanza piccoli) $C^1(U)$ con inversa C^1 (cioè f deve essere un diffeom. tra U e $\bar{U}$)

⇔ Teo inversione
 $\det J_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{x} & S \\ f \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \bar{U} & \xrightarrow{y} & T \end{array}$$

OSS

1) f è unica

2) φ diffeomorfismo $\Rightarrow \varphi^{-1}: T \rightarrow S$ diffeomorfismo

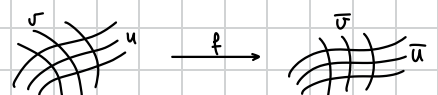
DEF DIFFEOMORFISMO LOCALE

Se f è come nella definizione precedente $f: U \rightarrow \bar{U}$ C^1 ed è anche biiverna $\Rightarrow \varphi$ è un diffeomorfismo locale

OSS

Supponiamo di avere il cambio di coordinate f dato da $(\bar{u}, \bar{v}) = f(u, v)$

Sia $\varphi: S \rightarrow T$ diffeomorfismo di superfici



φ preserva le proprietà metriche $\Leftrightarrow \varphi$ manda la prima forma fond. di S in quella di T

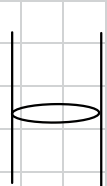
In questo caso φ si chiama **ISOMETRIA**

Non significa necessariamente che S e T abbiano stessa IFF

vedi dal libro DO CARMO

Se φ è invece un diffeomorfismo locale, φ si dice **ISOMETRIA LOCALE**

ES CILINDRO



(Superficie di rotazione) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$

Eq. parametriche

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$$

Prendiamo 2 carte locali:

$$\begin{aligned} u &\in (0, 2\pi) & v &\in \mathbb{R} \\ u &\in (\pi, 3\pi) & v &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\underline{x}_u = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$\underline{x}_v = \frac{\partial \underline{x}}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = 1 \\ F = \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v = 0 \\ G = \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v = 1 \end{cases}$$

Consideriamo ora un PIANO

$$\begin{cases} x = \bar{u} \\ y = \bar{v} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \underline{x}}{\partial \bar{u}} = (1, 0, 0) \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \bar{v}} = (0, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} E = 1 \\ F = 0 \\ G = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Un cilindro e un piano hanno la stessa forma fondamentale

In questo caso si parla di isometria locale perché il cambio di

coordinate f non è un omeomorfismo (in particolare non è iniettivo)

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\psi} & S \\ \uparrow \gamma & & \uparrow \chi \\ \bar{U} & \xrightarrow{f} & U \\ (\bar{u}, \bar{v}) & \longmapsto & (u, v) \end{array}$$

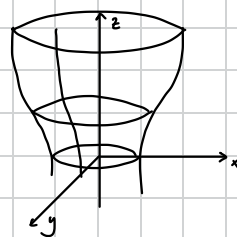
OSS SUPERFICI DI ROTAZIONE

Considero la curva nel piano Oxz $\begin{cases} x = x(v) \\ z = z(v) \end{cases}$

la faccio ruotare attorno a

e ottengo la superficie $\underline{x} = \begin{cases} x = x(v) \cos u \\ y = x(v) \sin u \\ z = z(v) \end{cases}$

Considero 2 carte locali $\begin{aligned} u &\in (0, 2\pi) & v &\in (a, b) \\ u &\in (\pi, 3\pi) & v &\in (a, b) \end{aligned}$



$$\begin{aligned} \underline{x}_u &= (-x(v) \sin u, x(v) \cos u, 0) \\ \underline{x}_v &= (x'(v) \cos u, x'(v) \sin u, z'(v)) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} E = x^2(v) \\ F = 0 \\ G = x'^2(v) + z'^2(v) \end{cases}$$

Osservo che se v dovesse essere parametro d'arco $\Rightarrow G = x'^2(v) + z'^2(v) = 1$

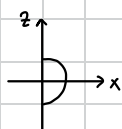
$\Rightarrow$ Non viene la stessa forma fondamentale del piano

def le curve con u costante si chiamano **MERIDIANI**

le curve con v costante si chiamano **PARALLELI**

ES SFERA DI RAGGIO 1

$$\begin{cases} x(v) = \cos v & \text{curva} \\ z(v) = \sin v \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{superficie } \underline{x} = \begin{cases} x = \cos v \cos u \\ y = \cos v \sin u \\ z = z(v) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \cos^2 v \quad F = 0 \quad G = 1$$

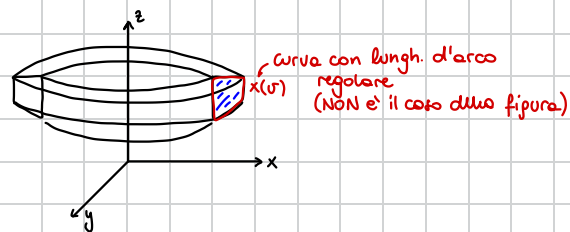
Calcoliamo ora l'area della sfera con $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $u \in [0, 2\pi]$

$$\text{Area (sfera)} = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG-F^2} \, dv \, du = 2\pi \sin v \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

$= \cos v$

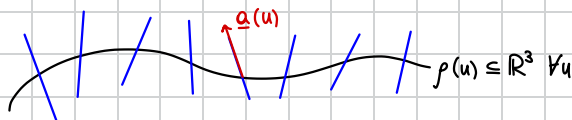
OSS Teo di PAPPO

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi} \int_a^b x(v) \, dv \, du = 2\pi \int_a^b x'(v) \, dv$$



OSS RIGATE

Le rigate sono unioni di rette e sono superfici del tipo $x(u, v) = \underbrace{p(u)}_{\text{curva}} + v \underbrace{a(u)}_{\text{generatrici}}$ con $v \in \mathbb{R}$



Suppongo che $\|a(u)\| = 1 \, \forall u$ e che u sia parametro d'arco *

$$\begin{cases} x_u = \dot{p} + v \dot{a} \\ x_v = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = x_u \cdot x_u = \dot{p} \cdot \dot{p} + 2v \dot{p} \cdot \dot{a} + v^2 \dot{a} \cdot \dot{a} \stackrel{\text{per } *}{=} 1 + 2v \dot{p} \cdot \dot{a} + v^2 \|\dot{a}\|^2 \\ F = x_u \cdot x_v = \dot{p} \cdot a \quad (\text{perch\`e } \dot{a} \cdot \dot{a} = 0) \\ G = x_v \cdot x_v = 1 \end{cases}$$

ES SUPERFICIE DELLE TANGENTI

$a = \dot{p}$, $v > 0$, supponiamo anche che la curva sia biregolare cioe' $k \neq 0 \, \forall u$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = 1 + v^2 k^2 \\ F = 1 \\ G = 1 \end{cases} \quad \text{Dipendi solo dalla curvatura } k(u)$$

Considero una curva con la stessa curvatura k di p ma con torsione $\tau \equiv 0$ cioe' piana

Sia p_1 questa nuova curva $\Rightarrow$ la nuova superficie dei tangenti data da

$$x_1(u, v) = p_1(u) + v \dot{p}_1(u) \quad \text{la vecchia era invece } x(u, v) = p(u) + v \dot{p}(u)$$

x e x_1 hanno stessa forma fondamentali $\Rightarrow$ c'e' un'isometria tra x e x_1

$\Rightarrow x_1$ e' una porzione di piano

Tali superfici si dicono SVILUPPABILI

ES

Superficie dei normali $a = n$

Superficie dei binormali $a = b$

$$\text{Analizziamo la superficie dei binormali} \Rightarrow \begin{cases} E = 1 + v^2 \tau^2 \\ F = 0 \\ G = 1 \end{cases}$$

Anche in questo caso la prima forma fondamentale dipende solo dalla torsione

Se $\tau \equiv 0 \Rightarrow$ Curva piana $\Rightarrow$ la superficie dei binormali e' isometrica al piano

ES ELICOIDE



Unione della retta per l'elica e $\perp$ all'asse z

$$\underline{x} = \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = u \end{cases}$$

$$\underline{x}_u = (-v \sin u, v \cos u, 1) \quad \underline{x}_v = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$E = 1 + v^2 \quad F = 0 \quad G = v^2 \quad (\Rightarrow I_E = (1 + v^2) du^2 + dv^2)$$

28/03

OSS

Si può scrivere la I forma fondamentale anche in notazione differenziale:

$$I = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2 = \bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u}^2 + 2\bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u} d\bar{v} + G(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{v}^2$$

Se cambiamo base (parametrizzazione della curva)

$$\text{cioè } \begin{cases} u = u(\bar{u}, \bar{v}) \\ v = v(\bar{u}, \bar{v}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} d\bar{u} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} d\bar{v} \\ dv = \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} d\bar{u} + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} d\bar{v} \end{cases}$$

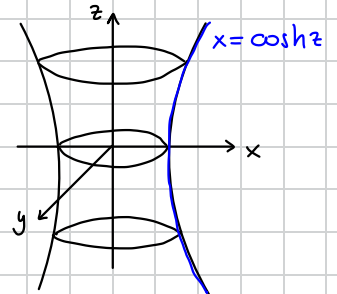
ES CATENOIDE

Calcolare la I FF della catenoidi data dalla rotazione attorno l'asse z della

Curva CATENARIA $x = \cosh z$

$$\text{Scriviamo le eq. parametriche } \begin{cases} x(\bar{u}, \bar{v}) = \cosh \bar{v} \cos \bar{u} \\ y(\bar{u}, \bar{v}) = \cosh \bar{v} \sin \bar{u} \\ z(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{v} \end{cases}$$

con $v \in \mathbb{R}$ e $\bar{u} \in (0, 2\pi)$ oppure $\bar{u} \in (\pi, 3\pi)$



OSS In generale data una curva $\begin{cases} x = x(v) \\ z = z(v) \end{cases}$ la I FF della superficie di rotazione

ottenuta ruotando la curva attorno l'asse z è $I = x(v)^2 du^2 + (x'(v)^2 + z'(v)^2) dv^2$

Applichiamo l'oss al nostro caso:

$$I_c = \cosh^2 \bar{v} d\bar{u}^2 + \frac{(\sinh^2 \bar{v} + 1)}{\cosh^2 \bar{v}} d\bar{v}^2 = \cosh^2 \bar{v} (d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

Notiamo che I_c è come I_E dell'elicoide dell'esempio prima

Vogliamo costruire un'isometria tra l'elicoide e la catenoidi

Scriviamo un cambio di variabili:

$$\begin{cases} u = \bar{u} \\ v = \sinh \bar{v} \end{cases}$$

OSS: NON è una mappa iniettiva,
??? $\parallel$ torna uguale a se stessa ogni 2π

$$\text{sostituisco nell'elicoide } \Rightarrow I = (1 + v^2) du^2 + dv^2 = \cosh^2 \bar{v} d\bar{u}^2 + \cosh^2 \bar{v} d\bar{v}^2$$

$$dv^2 = \cosh^2 \bar{v} d\bar{v}^2; \quad du^2 = d\bar{u}^2$$

$$1 + v^2 = 1 + \sinh^2 \bar{v} = \cosh^2 \bar{v}$$

Ho costruito un'isometria tra elicoide e catenoidi, è un'isometria locale

le rette dell'elicoidi sono $u = \text{costante} = u_0$ diventano meridiani nel catenoidi

le eliche dell'elicoidi sono $v = \text{costante} = v_0$ parallali nel catenoidi
elicoidi catenoidi

Abbiamo $\varphi: E \rightarrow C$ isometria locale ma non globale

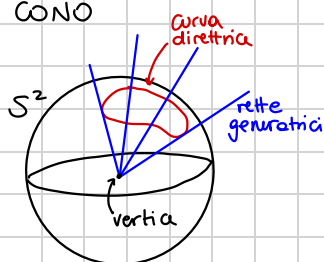
Osserviamo inoltre che $E \not\cong C$ cioè non sono omeomorfi, perché non sono neanche omotopicamente equivalenti infatti:

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $f(\mathbb{R}^2) = E$, osservo che $\mathbb{R}^2 \cong E$
 $(u,v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, u)$ tale applicazione

è continua e con inversa continua $\Rightarrow E$ è contrattibile $\Rightarrow \pi_1(E) = 0$

D'altra parte $C \cong S^1 \times \mathbb{R} \Rightarrow \pi_1(C) = \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \Rightarrow E \not\cong C$

ES CONO



Sia p curva iniettiva con sostegno in S^2

Suppongo inoltre che $p: (a,b) \rightarrow S^2$ parametrizzata con

A) lunghezza d'arco u

Considero la rigata $\underline{p}(u) + v \underline{a}(u) \Rightarrow$ un cono è un particolare tipo di rigata con

$\underline{a} = \underline{p}' \Rightarrow$ eq cono: $\underline{p}(u) + v \underline{p}'(u) \Rightarrow$ cambio variabile $\begin{cases} v = 1 + \bar{v} \\ u = \bar{u} \end{cases}$ con $u \in (a,b)$

va escluso lo p perché in 0 non c'è continuità delle derivate parziali

$v \in (0, +\infty) \Rightarrow x(u,v) = v \underline{p}(u)$ (vale $\|\underline{p}(u)\| \stackrel{A)}{=} 1$)

Calcoliamo ora la IFF $x_u = v \underline{p}'(u) \quad x_v = \underline{p}(u) \Rightarrow \begin{cases} E = v^2 \underline{p}'(u) \cdot \underline{p}'(u) = v^2 \\ F = 0 \quad (\underline{p}' \perp \underline{p} \text{ per A,B}) \\ G = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow I_C = v^2 du^2 + dv^2$

Cambio ora variabile $\begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \end{cases}$ (Non iniettiva)

$\Rightarrow dx = -v \sin u du + \cos u dv$ e $dy = v \cos u du + \sin u dv$

$\Rightarrow dx^2 = v^2 \sin^2 u du^2 + \cos^2 u dv^2 - 2v \sin u \cos u du dv$; $dy^2 = v^2 \cos^2 u du^2 + \sin^2 u dv^2 + 2v \cos u \sin u du dv$

$\Rightarrow$ Si trova che in queste nuove coordinate $I = v^2 du^2 + dv^2 = dx^2 + dy^2$

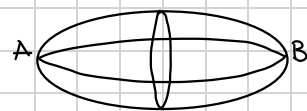
che è la IFF del piano

$\Rightarrow$ Abbiamo costruito un'isometria locale tra il cono (in una sua porzione) e il piano

(in una sua porzione) $\Rightarrow$ Il cono è sviluppabile

ES ELLISSOIDE (non è di rotazione)

$\begin{cases} x = 3 \cos u \\ y = 2 \sin u \cos v \\ z = \sin u \sin v \end{cases} \Rightarrow$ eq cartesiana $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \quad f(x,y,z) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1$



a) Trovare I Forma Fondamentale.

$$x_u = (-3\sin u, 2\cos u \cos v, \cos u \sin v)$$

$$x_v = (0, -2\sin u \sin v, \sin u \cos v)$$

Voglio prima capire se i 2 vettori sono indipendenti:

Osservo che $\sin u \neq 0$ altrimenti $x_u \equiv 0$. Calcolo ora:

$$\det \begin{pmatrix} 2\cos u \cos v & \cos u \sin v \\ -2\sin u \sin v & \sin u \cos v \end{pmatrix} = 2\cos^2 v \cos u \sin u + 2\sin^2 v \cos u \sin u = 2\cos u \sin u = 0 \quad \text{perch\`e } \sin u \neq 0 \Rightarrow \cos u = 0$$

Anche se $\cos u$ fosse $= 0 \Rightarrow$ avrei comunque 2 vettori non nulli indipendenti

Quindi x_u e x_v sono indep $\Leftrightarrow \sin u \neq 0$

Prendo quindi $u \in (0, \pi) \Rightarrow$ con questa carta prendo tutti i punti tranne A e B

$$\begin{cases} E = x_u \cdot x_u = 9\sin^2 u + 4\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v \\ F = x_u \cdot x_v = -3\cos u \cos v \sin u \sin v \\ G = x_v \cdot x_v = 4\sin^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \cos^2 v \end{cases}$$

b) Trovare il piano tangente nel pto $p = (\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{1}{2})$ cio\`e $\begin{cases} \cos u = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} 2 \cos v \Rightarrow \cos v = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin v = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow u = v = \frac{\pi}{4}$

Modo 1

$$x_u\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \quad x_v\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = (0, -1, \frac{1}{2}) \Rightarrow \text{Piano tangente}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Modo 2

$$\nabla f(p) = \left(\frac{2x}{9}, \frac{2y}{4}, 2z\right)\Big|_p = \left(\frac{3\sqrt{2}}{9}, \frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow \text{piano tangente } (x-p) \cdot \nabla f(p) = 0$$

$$\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \frac{3\sqrt{2}}{9} + \frac{1}{2}(y-1) + (z - \frac{1}{2}) = 0$$

c) Trovare l'angolo tra le curve $\gamma_1 = \begin{cases} u=t \\ v=t \end{cases} \quad \gamma_2 = \begin{cases} v=s \\ u=\frac{\pi}{2}-s \end{cases}$ curve sull'elissoide

$$\text{nel punto } P = (u = \frac{\pi}{4}, v = \frac{\pi}{4})$$

$\Rightarrow t = s = \frac{\pi}{4}$ nell'intersezione tra le 2 curve

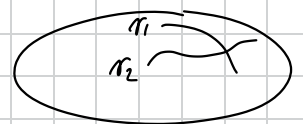
$$\gamma_1' = \frac{du}{dt} x_u + \frac{dv}{dt} x_v = x_u + x_v \quad \gamma_2' = \frac{dv}{ds} x_u + \frac{du}{ds} x_v = x_u - x_v$$

$$\text{Usiamo la I FF} \Rightarrow E(p) = \frac{9}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{23}{4} \quad F(p) = -\frac{3}{4} \quad G = \frac{5}{4}$$

$$\text{Dobbiamo applicare } \cos \alpha = \frac{acE + (ad+bc)F + bdG}{\sqrt{Ea^2 + 2Fab + Gb^2} \sqrt{Ec^2 + 2Fcd + Gd^2}} \quad \begin{matrix} v = ax_u + bx_v \\ w = cx_u + dx_v \end{matrix}$$

con $a=b=c=1, d=-1$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{18}{4}}{\sqrt{\frac{23}{4}} \sqrt{\frac{34}{4}}} = \dots$$



OSS SUPERFICI DI ROTAZIONE

Considero $x > 0$, sia $F(x, z) = 0$ eq. cartesiana di una curva regolare

se $\nabla F(x, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \neq 0$ Sui pti t.c. $F(x, z) = 0$

Faccio ruotare la curva $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ eq. cartesiana della superficie di rotazione

ES

- ELLISSOIDE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ di rotazione se $b = a$
- PARABOLOIDE ELLITTICO $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ di rotazione se $b = a$
- PARABOLOIDE IPERBOLICO $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ (è una rigata: $(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = z$)
- IPERBOLOIDE A 2 FALDE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = \frac{z^2}{c^2}$ di rotazione se $a = b$

5/04

OSS (Introduzione)

La II FORMA FONDAMENTALE ci dice come è fatta la geometria della superficie in $\mathbb{R}^3$

(è una generalizzazione della curvatura nelle curve)

La I FORMA FONDAMENTALE ci dava la geometria intrinseca della superficie (cosa che nelle curve era banale)

OSS

Consideriamo una superficie parametrizzata $x = x(u, v) \in \mathbb{C}^2$ in $\mathbb{R}^3$

Possiamo considerare il campo vettoriale costituito dai vettori normali

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} \quad N \text{ è funzione } \mathbb{C}^1 \text{ perchè } x_u \text{ e } x_v \text{ funzioni } \mathbb{C}^1$$

$$\Rightarrow N = N(u, v) \text{ ed essendo } \mathbb{C}^1 \quad N_u = \frac{\partial N}{\partial u} \text{ e } N_v = \frac{\partial N}{\partial v} \text{ sono funzioni continue}$$

Otengo una **SEZIONE NORMALE** intersecando la superficie con un piano passante

per $p = x(u_0, v_0)$ parallelo a $N(u_0, v_0)$ (esistono infinite sezioni normali per ogni punto)

L'intersezione tra la sezione normale (il piano π) e x è una curva

↳ OBIETTIVO DELLA LEZIONE

Vogliamo trovare la curvatura di $\pi \cap x(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ intorno aperto t.c. $(u_0, v_0) \in U$

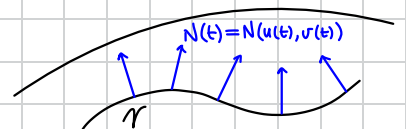
OSS

Consideriamo una curva sulla superficie: basta prendere $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \Rightarrow$ la curva sarà quindi

$$\gamma(t) = x(u(t), v(t)). \text{ Chiamiamo } u_0 = u(t_0) \text{ e } v_0 = v(t_0)$$

$$\Rightarrow \text{Il vettore tangente è } \gamma'(t) = u'(t)x_u(u(t), v(t)) + v'(t)x_v(u(t), v(t))$$

Voglio calcolare ora come varia il vettore normale N rispetto a t



$$N'(t) = u'(t) N_u(u(t), v(t)) + v'(t) N_v(u(t), v(t))$$

Osservo che fissata la base $\{N_u, N_v\}$ si ha che N' dipende solo dal vettore tangente alla curva, ha infatti $u'(t)$ e $v'(t)$ come componenti

In generale, fissata la base di $T_p(S)$ $\{z_u, z_v\}$, dato $w = az_u + bz_v \in T_p(S)$

$\Rightarrow$ Possiamo definire l'operatore lineare $dN(w) := aN_u + bN_v$ che non dipende dalla scelta di una particolare curva (dim pag 127 DO CARMO)

(dN è un operatore che restituisce la derivata di N nella direzione di w)

OSS

Per definizione di N si ha che $\|N\| = 1 \Rightarrow N \cdot N = 1$; considero N che varia lungo la curva, cioè $N = N(t) \Rightarrow$ derivo $N \cdot N = 1$ e ottengo $2N \cdot N' = 0 \Rightarrow N' \perp N$

Quindi $dN(w) \in T_p(S) \Rightarrow dN_p$ è un operatore lineare $dN_p: T_p(S) \longrightarrow T_p(S)$

che non dipende dalla parametrizzazione (cioè dalle coordinate) (dim pag 127 DO CARMO) ^{forse}
 $\hookrightarrow$ vedi dim DO CARMO

Chiamiamo dN_p **OPERATORE DI FORMA**

ES

Porzioni di piano



$N(u, v) = N$ costante $\Rightarrow dN_p \equiv 0 \forall p$ e dN_p ha rango 0

ES

Porzioni di sfera unitaria



Scelgo $N = (-x, -y, -z)$ che è direttamente di norma 1 (punta verso il centro)

Considero la curva sulla sfera $\gamma(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t)) \Rightarrow dN(w) = -w$ se $w \in T_p(S)$

In questo caso dN ha rango 2

ES

Porzioni di cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$

^{Scelgo il vettore normale}

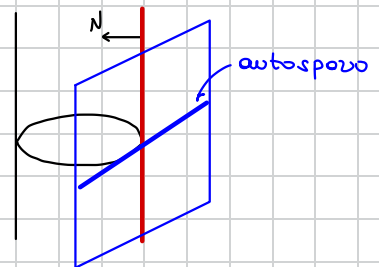
$N(x(t), y(t), z(t)) = (-x(t), -y(t), 0) \Rightarrow N'(t) = (-x'(t), -y'(t), 0)$

Se $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \Rightarrow \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$\Rightarrow dN(w) = -\pi(w)$ dove π è la proiezione sulle prime 2 coordinate cioè $\pi: (a, b, c) \mapsto (a, b, 0)$

Il rango di $dN = 1$; $\ker dN =$ vettori verticali; la retta orizzontale è un autospazio

di autovalore -1



DEF II FORMA FONDAMENTALE

Data una superficie S parametrizzata $x = x(u, v)$, dato un punto $p = x(u_0, v_0)$ la

seconda forma fondamentale è una forma quadratica sul piano tangente $T_p(S)$ data da

$$II(w) := -dN_p(w) \cdot w$$

OSS

La forma bilineare simmetrica associata è $II(w, s) = -dN_p(w) \cdot s$

Bisogna dimostrare che sia effettivamente bilineare e simmetrica

DIM

• La linearità segue dal fatto che II è prodotto scalare di operatori lineari

• SIMMETRIA: Basta verificarla per i vettori della base $w = x_u$ e $s = x_v$

$$II(x_u, x_v) = -dN(x_u) \cdot x_v = -N_u \cdot x_v = N \cdot x_{vu} \stackrel{\text{Schwarz}}{=} N \cdot x_{uv} = -N_v \cdot x_u = -dN(x_v) \cdot x_u = II(x_v, x_u)$$

$$\text{Se } N \cdot x_v \equiv 0 \Rightarrow \text{derivo rispetto a } u \Rightarrow N_u \cdot x_v + N \cdot x_{vu} \equiv 0 \quad \text{QED}$$

OSS

La matrice di II rispetto alla base $\{x_u, x_v\}$ di $T_p(S)$ ha coefficienti

$$II(x_u, x_u) = -dN_p(x_u) \cdot x_u = -N_u \cdot x_u = N \cdot x_{uu} := L \text{ oppure e}$$

derivando $N \cdot x_u = 0$ rispetto a u

$$II(x_v, x_v) = -dN_p(x_v) \cdot x_v = -N_v \cdot x_v = N \cdot x_{vv} := N \text{ oppure } q$$

derivando $N \cdot x_v = 0$ rispetto a v

$$\text{dim. prima} \quad II(x_u, x_v) = II(x_v, x_u) = N \cdot x_{uv} := M \text{ oppure } f$$

Abbiamo ottenuto $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$. In forma differenziale diventa $II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$

Si trasforma cambiando coordinate con la stessa legge della I FF

OSS

Superficie cartesiana $x(u, v) = (u, v, f(u, v))$ con $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2(U)$. Sia $\nabla f(u_0, v_0) = 0$

$$x_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})|_{(u_0, v_0)} = (1, 0, 0) \quad x_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})|_{(u_0, v_0)} = (0, 1, 0)$$

$$\Rightarrow N(u_0, v_0) = (0, 0, 1) \text{ già normalizzato}$$

$$x_{uu} = (0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}) \quad x_{uv} = (0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}) \quad x_{vv} = (0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2})$$

$$L(u_0, v_0) = N \cdot x_{uu} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \quad M(u_0, v_0) = N \cdot x_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \quad N(u_0, v_0) = N \cdot x_{vv} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \Rightarrow II = \text{Hessiana}$$

OSS

la forma della superficie locale è descritta da II FF

DEF

• Se II definito positiva (o negativa) in $P \Rightarrow$ il PUNTO p si dice **ELLIPTICO**

↳ essendo matrice $2 \times 2 \Leftrightarrow \det > 0$ cioè $LN - M^2 > 0$



- Se $\mathbb{I}$ indefinita in $p \Rightarrow$ il **PUNTO** p si dice **IPERBOLICO** (pto di sella)

$\hookrightarrow$ essendo matrice $2 \times 2 \Leftrightarrow \det < 0$ cioè $LN - M^2 < 0$

- Se $\mathbb{I}$ semidefinita positiva (o negativa) in $p \Rightarrow$ il **PUNTO** p si dice **PARABOLICO**

$\hookrightarrow$ essendo matrice $2 \times 2 \Leftrightarrow \det = 0$ ($LN - M^2 = 0$) e $\mathbb{I} \neq 0$

- Se $\mathbb{I}$ è nulla in $p \Rightarrow$ il **PUNTO** p si chiama **PLANARE**

$\hookrightarrow \mathbb{I} = 0$



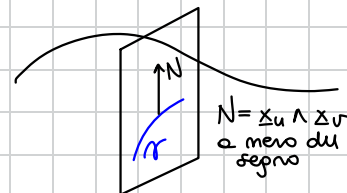
QSS CURVATURA DELLE SEZIONI NORMALI

$\gamma = \gamma(s)$ sezione normale con lunghezza d'arco $\Rightarrow \dot{\gamma}$ versore tangente $\|\dot{\gamma}\| = 1$

γ è curva piana per costruzione

$$N \cdot \dot{\gamma} \equiv 0$$

Se la curva è biregolare $\Rightarrow N(s) = \pm n(s)$ dato che la curva è planare
versore normale della curva
A meno del segno



Derivo N rispetto a $s \Rightarrow \dot{N}(s) = \pm \dot{n}(s) = \mp k(s) \dot{\gamma}(s)$

la torsione è = 0 perché la curva è piana

D'altra parte $\dot{N}(s) = dN(\dot{\gamma}(s))$

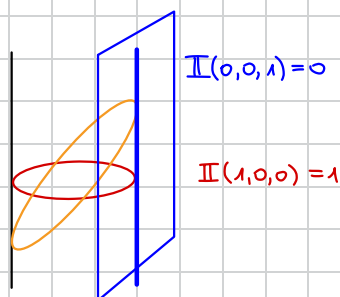
$\Rightarrow \mathbb{I}(\dot{\gamma}(s)) = -dN(\dot{\gamma}(s)) \cdot \dot{\gamma}(s) = \pm k(s)$ curvatura della sezione normale

Osservo che l'Hp della biregolarità è superflua perché N è sempre definito, anche se γ è una retta

Infatti anche se $k(s) = 0$, prendo $N \cdot \dot{\gamma} \equiv 0$ e derivo $\Rightarrow \frac{d}{ds}(N \cdot \dot{\gamma}) = \dot{N} \cdot \dot{\gamma} + N \cdot \ddot{\gamma} \equiv 0$
 $\frac{d}{ds}(N \cdot \dot{\gamma}) = \frac{d}{ds}(-\mathbb{I}(\dot{\gamma})) = -\frac{d}{ds}(\pm k(s)) = \mp \dot{k}(s)$

Quindi la formula $\mathbb{I}(\dot{\gamma}(s)) = \pm k(s)$ sarebbe comunque vera

ES



$$\mathbb{I}(0,0,1) = 0$$

$$\mathbb{I}(1,0,0) = 1$$

8/04

QSS (Richiami alla lezione precedente)

- Abbiamo visto che N NON dipende dalla parametrizzazione, potrebbe cambiare solo il verso

(ma si sceglie a priori). Quindi data $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie $\mathcal{C}^2$ N è determinato a meno del verso

- Se S è orientabile $\Rightarrow N: S \rightarrow S^2$ funzione continua $\mathcal{C}^1$

- Abbiamo definito le funzioni continue definite solo su una carta

Dipendono quindi dalla carta locale scelta

(vedi DO CARMO pag 154)

$$L := x_{uu} \cdot N =: e$$

$$M := x_{uv} \cdot N =: f$$

$$N := x_{vv} \cdot N =: g$$

- Operatore di forma $p \in S \quad dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ lineare ed è intrinseco,

cioè dipende solo dalla scelta di N (cioè il suo verso, non dipende dalla parametrizzazione)

dN_p definito da $dN_p(w) = N_p'(\dot{\gamma})$ con $\gamma: (a,b) \rightarrow S$ curva con $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=w$

PROP 4.4.15 ABATE TOVENA

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientata con $N: S \rightarrow S^2$ (mappe di Gauss)

$\Rightarrow dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$ è operatore autoaggiunto

DIM

Dobbiamo verificare che $\forall v, w \in T_p(S) \quad dN_p(v) \cdot w = v \cdot dN_p(w)$. Basta verificarlo

per i vettori di una base: sia $\{\partial_1, \partial_2\}$ la base di $T_p(S)$ indotta dalla

parametrizzazione $\varphi: U \rightarrow S$ (cintura in p) $\langle dN_p(\partial_1), \partial_2 \rangle_p \stackrel{?}{=} \langle \partial_1, dN_p(\partial_2) \rangle$

Sappiamo che $\langle N \circ \varphi, \partial_2 \rangle = 0 \Rightarrow$ derivo rispetto a x_1 e ottengo

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_1} \langle N \circ \varphi, \partial_2 \rangle(0) = \left\langle \frac{\partial(N \circ \varphi)}{\partial x_1}(0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0) \right\rangle + \langle N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \rangle =$$

$$= \langle dN_p(\partial_1), \partial_2 \rangle_p + \langle N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \rangle$$

Analogamente derivando $\langle N \circ \varphi, \partial_1 \rangle \equiv 0$ rispetto a x_2 otteniamo

$$0 = \langle dN_p(\partial_2), \partial_1 \rangle_p + \langle N(p), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0) \rangle$$

Schwarz = *

$\Rightarrow$ segue la tesi per teorema di Schwarz QED

OSS

dN_p è autoaggiunto ristretto al prodotto scalare in $T_p(S) \Rightarrow$ è diagonalizzabile

con p fissato $\Rightarrow$ ammette una base ortonormale $\{v_1, v_2\}$ di autovettori. Si ha quindi

$$dN_p(v_1) = -k_1 v_1 \quad dN_p(v_2) = -k_2 v_2$$

Chiamiamo k_1, k_2 **CURVATURE PRINCIPALI** e v_1, v_2 **DIREZIONI PRINCIPALI**

OSS

Abbiamo visto che se $v \in T_p(S)$ $\|v\|=1 \Rightarrow |II(v)| =$ curvatura principale della sezione

normale a S e parallela a v

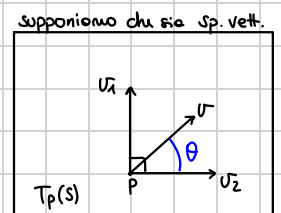
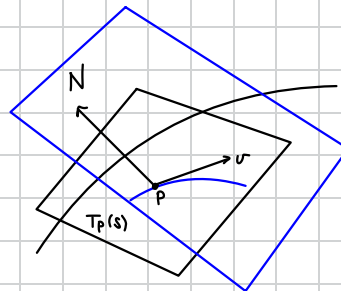
$$II(v_1) = -dN_p(v_1) \cdot v_1 = k_1 v_1 \cdot v_1 = k_1$$

$$II(v_2) = -dN_p(v_2) \cdot v_2 = k_2 v_2 \cdot v_2 = k_2$$

Sia $v = \cos \theta v_1 + \sin \theta v_2$ ($\Rightarrow \|v\|=1$)

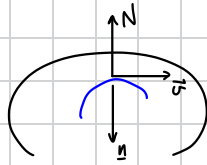
$$II(v) = -dN_p(\cos \theta v_1 + \sin \theta v_2) \cdot (\cos \theta v_1 + \sin \theta v_2) = (k_1 v_1 \cos \theta + k_2 v_2 \sin \theta) \cdot (\cos \theta v_1 + \sin \theta v_2) =$$

$$= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$



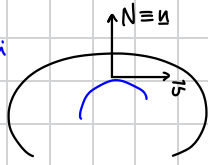
Da questo si vede che preso un $v \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$ t.c. $\|v\|=1 \Rightarrow \text{II}(v) = \text{curvatura della sezione normale perpendicolare a } v$ assume valori in $[k_1, k_2]$ (assumendo $k_2 \geq k_1$)

OSS



$$\text{II}(v) < 0$$

sezioni normali in blu



$$\text{II}(v) > 0$$

Il segno di II dipende dalla scelta del verso di N

OSS

(supponendo $k_1 \leq k_2$)

- PUNTO ELLITTICO $\Leftrightarrow k_1, k_2 > 0$ (cioè forma def. positiva) oppure $k_1, k_2 < 0$ (forma def. negativa)
- PUNTO IPERBOLICO $\Leftrightarrow k_1 < 0 < k_2$
- PUNTO PARABOLICO $\Leftrightarrow k_1 = 0, k_2 > 0$ oppure $k_1 < 0, k_2 = 0$
- PUNTO PIANARE $\Leftrightarrow k_1 = k_2 = 0$

Se cambio segno di $N \Rightarrow$ i k_i cambiano segno

DEF (ABATE TOVENA)

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientata con mappa di Gauss $N: S \rightarrow S^2$

La **CURVATURA GAUSSIANA** è la funzione $K: S \rightarrow \mathbb{R}$ $K(p) = \det dN_p \quad \forall p \in S$

La **CURVATURA MEDIA** è la funzione $H: S \rightarrow \mathbb{R}$ $H(p) = -\frac{1}{2} \text{Tr} dN_p \quad \forall p \in S$

OSS 4.5.4

Se k_1 e k_2 sono le curvature principali di S in $p \in S \Rightarrow K(p) = k_1 \cdot k_2$

$$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

OSS

- K è un invariante, non dipende dalla parametrizzazione o dalla scelta di N

$K: S \rightarrow \mathbb{R}$ è funzione continua (lo vedremo dopo)

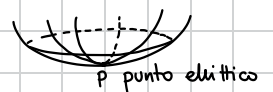
- Se S è orientabile $\Rightarrow H: S \rightarrow \mathbb{R}$ è funzione continua (lo vedremo dopo)

DEF DIREZIONE ASINTOTICA

$v \in T_p(S)$ $v \neq 0$ si dirà direzione asintotica se $\text{II}(v) = 0$

OSS

Esistono direzioni asintotiche $\Leftrightarrow$ il punto p non è ellittico

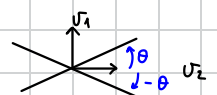


Troviamo ora le direzioni asintotiche:

- Se p è iperbolico vediamo per quali θ si ha $\text{II}(v) = 0$, cioè $k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = 0$

$k_1 < 0 < k_2$

$$\Rightarrow \tan^2 \theta = -\frac{k_1}{k_2} > 0 \Rightarrow \theta = \pm \arctan \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}} \Rightarrow 2 \text{ direzioni asintotiche}$$



- Se p iperbolico $\Rightarrow 2$ direzioni asintotiche

- Se p parabolico $\Rightarrow$ 1 direzione asintotica (coincide con una delle 2 principali)
- Se p planare $\Rightarrow$ tutte le direzioni sono asintotiche
- Se p ellittico $\Rightarrow$ nessuna direzione è asintotica

DEF PUNTO OMBELICALE

Se $k_1 = k_2$ p è detto punto ombelicale o ombelico

OSS

Un punto ombelicale potrebbe essere ellittico o planare, in ogni caso la curvatura normale è la stessa per tutte le direzioni (sempre 0 se il punto è planare)

OSS

Abbiamo visto che se $v \in T_p(S)$ e $\|v\| = 1 \Rightarrow |\Pi(v)| =$ curvatura principale della sezione normale a S e parallela a v

Se prendiamo invece v vettore generico t.c. $\|v\| \neq 1, 0 \Rightarrow$ la curvatura della sezione

normale sarà $\left| \frac{\Pi(v)}{\|v\|^2} \right|$

DIM

La curvatura richiesta è $\left| \Pi\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right| = \frac{1}{\|v\|^2} |\Pi(v)| = \left| \frac{\Pi(v)}{\|v\|^2} \right|$ QED

ESERCIZIO

Superficie parametrizzata

$$x(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = e^u v \\ y(u, v) = u e^v \\ z(u, v) = e^u e^v \end{cases}$$

a) Trovare Π FF in $p = (0, 0, 1)$

p corrisponde a $(u, v) = (0, 0)$. Verifichiamo che effettivamente $x(u, v)$ è superficie param.

in un intorno del punto p : $x_u = (e^u v, e^v, e^u e^v)$ $x_v = (e^u, u e^v, e^u e^v)$

$\Rightarrow x_u(0, 0) = (0, 1, 1)$ e $x_v(0, 0) = (1, 0, 1)$ sono indipendenti $\Rightarrow$ è sup. parametrizzata

in un intorno U di $(0, 0)$

$$x_{uu} = (e^u v, 0, e^u e^v) \quad x_{uv} = (e^u, e^v, e^u e^v) \quad x_{vv} = (0, u e^v, e^u e^v)$$

$$N(0, 0) = x_u(0, 0) \wedge x_v(0, 0) = (0, 1, 1) \wedge (1, 0, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 1, -1)$$

$$\begin{aligned} L &= x_{uu} \cdot N(0, 0) = -1 \\ \text{Quindi } M &= x_{uv} \cdot N(0, 0) = 1 \\ N &= x_{vv} \cdot N(0, 0) = -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ il punto p può essere parabolico o planare $\Rightarrow p$ è parabolico

$\Rightarrow \exists$ direzione asintotica

la matrice dovrebbe essere nulla

b) Trovare la direzione asintotica

Prendiamo un vettore generico $a x_u + b x_v \in T_p(S)$ vediamo per quali $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\text{che } II(ax_u + bx_v) = 0$$

$$II(ax_u + bx_v) = a^2 L + 2abM + b^2 N = 0 \Rightarrow -a^2 + 2ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow -(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Prendiamo $a = b = 1 \Rightarrow v_1 = x_u + x_v$ è direzione asintotica e anche direzione principale

$$v_1 = x_u + x_v = (1, 1, 2) \quad (\text{Quindi } k_1 = 0)$$

c) Trovare l'altra direzione principale

(dove essere $\perp$ a $(1, 1, 2)$ e dove stare in $T_p(S)$; oppure $\perp$ a N e a $(1, 1, 2)$)

Lo facciamo attraverso IFF:

Sia $cx_u + dx_v \in T_p(S)$ ortogonale a $x_u + x_v$. Calcoliamo IFF

$$E = (0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1) = 2 \quad F = (0, 1, 1) \cdot (1, 0, 1) = 1 \quad G = (1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1) = 2$$

$$I(cx_u + dx_v, x_u + x_v) = Ec + F(c + d) + Gd = 0 \Rightarrow 2c + (c + d) + 2d = 0$$

$$\Rightarrow c + d = 0 \Rightarrow c = -d \Rightarrow x_u - x_v \text{ è l'altra direzione principale}$$

d) Calcolare la curvatura principale k_2 lungo la direzione $x_u - x_v = v_2$

$$k_2 = \frac{II(x_u - x_v)}{I(x_u - x_v)} = \frac{L(1)^2 + 2M(-1) + N(-1)^2}{E(1)^2 + 2F(-1) + G(-1)^2} = \frac{-1 - 2 - 1}{2 - 2 + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

e) $K, H = ?$

$$K = k_1 \cdot k_2 = 0 \cdot (-2) = 0 \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{0 + (-2)}{2} = -1$$

f) Trovare curvatura normale in direzione $w = (1, -1, 0)$

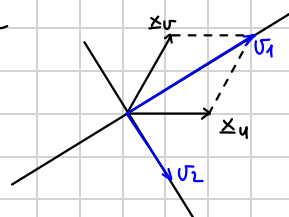
Verifichiamo prima che $w \in T_p(S) \rightsquigarrow w \cdot N = 0$ ok

Dopo poi scrivere w in coordinate rispetto a x_u e $x_v \Rightarrow w = x_v - x_u$ che riconosciamo

$$\text{essere direzione principale} \Rightarrow \frac{II(w)}{I(w)} = -2$$

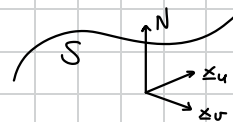
g) Trovare curvature normali nelle direzioni delle curve coordinate

$$\frac{II(x_u)}{I(x_u)} = \frac{N}{G} = -\frac{1}{2} \quad \frac{II(x_v)}{I(x_v)} = \frac{L}{E} = -\frac{1}{2}$$



S superficie parametrizzata $\mathbf{x}(u,v) \Rightarrow$ considero $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \Rightarrow \mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}$, sia $p \in S$

Operatore di forma $dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S) \Rightarrow \mathbb{I}(v) = -dN_p(v) \cdot v$ con $v \in T_p(S)$



Se $v \in T_p(S), v \neq 0$ abbiamo definito

CURVATURA NORMALE IN DIREZIONE DI $v = \frac{\mathbb{I}(v)}{\mathbb{I}(v)} \in \mathbb{R}$ cioè k_N

LA CURVATURA DELLA SEZIONE NORMALE PARALLELA A $v = \left| \frac{\mathbb{I}(v)}{\mathbb{I}(v)} \right| = k$ (curvatura della curva "quella classica" che abbiamo fatto all'inizio)

Gli autovalori di dN_p sono $-k_1$ e $-k_2 \Rightarrow$ CURVATURA GAUSSIANA $K = k_1 k_2$

CURVATURA MEDIA $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$

OSS

Sia $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ base di $T_p(S) \Rightarrow$ cerco la matrice A di dN_p rispetto a $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$

$dN_p(\mathbf{x}_u) = \mathbf{N}_u = a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v$
 $dN_p(\mathbf{x}_v) = \mathbf{N}_v = a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v$
 con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ } FORMULE DI WEINGARTEN

Moltiplico scalarmente $\mathbf{N}_u$ e $\mathbf{N}_v$ per $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$

$\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_u = 0 \Rightarrow$ derivo risp. $u \Rightarrow \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0$

• $\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_u = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -L$

D'altra parte $(a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u = a_{11} E + a_{21} F$

$\Rightarrow (1) -L = a_{11} E + a_{21} F$

• $\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{x}_v = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = -M$

D'altra parte $(a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v = a_{11} F + a_{21} G$

$\Rightarrow (2) -M = a_{11} F + a_{21} G$

• $\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{x}_u = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vu} = -M$

D'altra parte $(a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u = a_{12} E + a_{22} F$

$\Rightarrow (3) -M = a_{12} E + a_{22} F$

• $\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{x}_v = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = -N$

D'altra parte $(a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v = a_{12} F + a_{22} G$

$\Rightarrow (4) -N = a_{12} F + a_{22} G$

Mettendo a sistema, otteniamo in forma matriciale $-\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} A$ (cioè $-\mathbb{I} = \mathbb{I}A$)

Osservo che $\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 > 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ è invertibile $\Rightarrow A = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$

OSS

Essendo A matrice rappresentativa dell'operatore autoaggiunto $dN_p \Rightarrow A$ è diagonalizz.

e i suoi autovalori sono $-k_1$ e $-k_2$

• $K = k_1 k_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$

Con questo abbiamo dimostrato che se $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $\mathcal{C}^2 \Rightarrow K: U \rightarrow \mathbb{R}$

è funzione continua

- $H = -\frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}\text{Tr}A = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$ per trovare esplicitamente H troviamo tutti i coefficienti della matrice A

$$S_1 \text{ ha } \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{MF-LG}{EG-F^2} = \frac{fF-eG}{EG-F^2} \quad a_{12} = \frac{NF-MG}{EG-F^2} = \frac{gF-fG}{EG-F^2}$$

$$a_{21} = \frac{LF-ME}{EG-F^2} = \frac{eF-fE}{EG-F^2} \quad a_{22} = \frac{MF-NE}{EG-F^2} = \frac{fF-gE}{EG-F^2}$$

$$\text{Quindi } H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{eG+gE-2fF}{2(EG-F^2)^2}$$

Con questo abbiamo anche dimostrato che $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ è funzione continua

(se S è orientabile)

OSS

- $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie $\mathcal{C}^2 \Rightarrow K: S \rightarrow \mathbb{R}$ continua (sempre ben definita)
- Se S è orientabile $\Rightarrow$ scelgo $N: S \rightarrow S^2$ (mappa di Gauss) $\Rightarrow H: S \rightarrow \mathbb{R}$ continua
(serve che S sia orientabile perché cambiando orientazione $\Rightarrow$ cambiano i segni di k_1 e k_2
 $\Rightarrow$ cambia segno H , non sarebbe ben definita)

OSS

Voglio trovare k_1 e k_2 avendo H e K

Se ho H e $K \Rightarrow$ conosco $k_1 + k_2$ e $k_1 \cdot k_2 \Rightarrow k_1$ e k_2 sono le soluzioni di

$$x^2 - 2Hx + K = 0 \Rightarrow k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \Rightarrow k_1 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

$\Rightarrow k_1, k_2$ sono funzioni continue

$$k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

OSS - ES

Considero la curva parametrizzata per lunghezza d'arco v

$$\begin{cases} x = \varphi(v) > 0 \\ z = \psi(v) \end{cases}$$

Ruoto e ottengo la superficie $\Delta(u, v)$

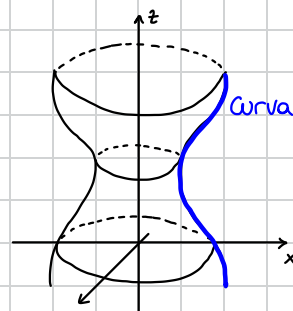
$$\Delta(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)) \quad \text{con } u \in (-\pi, \pi) \quad v \in (a, b)$$

Abbiamo già calcolato IFF $\Rightarrow E = \varphi^2 \quad F = 0 \quad G = 1$

Calcoliamo ora IIF $\Delta_u = (-\varphi(v) \sin u, \varphi(v) \cos u, 0) \quad \Delta_v = (\varphi'(v) \cos u, \varphi'(v) \sin u, \psi'(v))$

$$\Delta_{uu} = (-\varphi(v) \cos u, -\varphi(v) \sin u, 0) \quad \Delta_{uv} = (-\varphi'(v) \sin u, \varphi'(v) \cos u, 0)$$

$$\Delta_{vv} = (\varphi''(v) \cos u, \varphi''(v) \sin u, \psi''(v))$$



$$L = \underline{N} \cdot \underline{x}_{uu} = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uu}}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|} = \frac{1}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|} \det \begin{pmatrix} -\varphi \sin u & \varphi \cos u & 0 \\ \varphi' \cos u & \varphi' \sin u & \varphi' \\ -\varphi \cos u & -\varphi \sin u & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{\varphi'}{\sqrt{EG-F^2}} (\varphi^2 \sin^2 u + \varphi^2 \cos^2 u) = -\frac{\varphi' \varphi^2}{\sqrt{EG-F^2}} = -\frac{\varphi' \varphi^2}{\sqrt{\varphi^2}} = -\varphi' \varphi$$

$$M = \underline{N} \cdot \underline{x}_{uv} = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{uv}}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det \begin{pmatrix} -\underline{x}_u & - \\ -\underline{x}_v & - \\ -\underline{x}_{uu} & - \end{pmatrix} \stackrel{\underline{x}_u \parallel \underline{x}_{uv}}{=} 0$$

$$N = \underline{N} \cdot \underline{x}_{vv} = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{vv}}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \det \begin{pmatrix} -\varphi \sin u & \varphi \cos u & 0 \\ \varphi' \cos u & \varphi' \sin u & \varphi' \\ \varphi'' \cos u & \varphi'' \sin u & \varphi'' \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\varphi} (-\varphi'(-\varphi \varphi'') + \varphi''(\varphi \varphi')) = \varphi' \varphi'' - \varphi'' \varphi'$$

(Osservo che $\mathbb{II}$ e $\mathbb{I}$ FF sono diagonali)

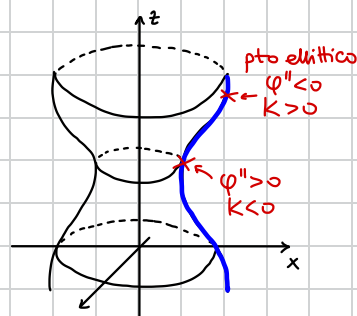
$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{-\varphi'}{\varphi} (\varphi' \varphi'' - \varphi'' \varphi') \stackrel{\varphi'^2 + \varphi'^2 = 1}{=} -\frac{\varphi'}{\varphi} (\varphi' \varphi'' + \frac{\varphi' \varphi''}{\varphi'} \varphi') = \frac{1}{\varphi} (\varphi'^2 \varphi'' + \varphi'^2 \varphi'') = -\frac{\varphi''}{\varphi}$$

Essendo parametrizzata con lunghezza d'arco ho $\varphi'(v)^2 + \varphi'(u)^2 = 1 \Rightarrow$ derivo rispetto a

$$v \text{ e ottengo } 2\varphi'(v)\varphi''(v) + 2\varphi'(v)\varphi''(v) = 0 \Rightarrow \varphi'' = -\frac{\varphi' \varphi''}{\varphi'}$$

se $\varphi'' < 0$ (cioè ho un massimo) $\Rightarrow K > 0 \Rightarrow$ pto ellittico

Osservo che il tipo di punto dipende solo da v e non da u



ES Toro

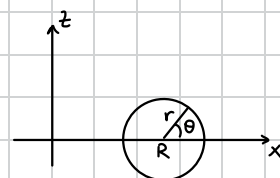
$$\text{Sia } v = \theta r \text{ il toro è } \begin{cases} \varphi(v) = R + r \cos \theta = R + r \cos(\frac{v}{r}) \\ \psi(v) = r \sin \theta = r \sin(\frac{v}{r}) \end{cases}$$

$$\varphi''(v) = -\frac{1}{r} \cos(\frac{v}{r}) \Rightarrow K = \frac{-\varphi''(v)}{\varphi(v)} = \frac{\cos \frac{v}{r}}{r(R + r \cos \frac{v}{r})}$$

Per $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \varphi'' < 0 \Rightarrow$ il punto è ellittico

Per $|\theta| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi'' = 0 \Rightarrow$ il punto è parabolico (non planare perchè $\mathbb{II} \mathbb{F} \mathbb{F}$ non è $\equiv 0$)

Per $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \Rightarrow$ il punto è iperbolico



15104

QSS

(Richiami)

Consideriamo la superficie $\underline{x} = \underline{x}(u, v)$ carta locale, sia $p \in S$

$\mathbb{I} \mathbb{F} \mathbb{F} \rightsquigarrow$ Geometria intrinseca di S $\mathbb{II} \mathbb{F} \mathbb{F} \rightsquigarrow$ Geometria di S nello spazio

Operatore di forma $dN_p: T_p(S) \rightarrow T_p(S)$. Prendiamo $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ base di $T_p(S)$

A matrice rappresentativa di dN_p rispetto alla base $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ $A = -\mathbb{I}^{-1} \mathbb{II}$ con $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ $\mathbb{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$

$$\text{FORMULE DI WEINGARTEN: } \begin{cases} \underline{N}_u = a_{11} \underline{x}_u + a_{21} \underline{x}_v \\ \underline{N}_v = a_{12} \underline{x}_u + a_{22} \underline{x}_v \end{cases}$$

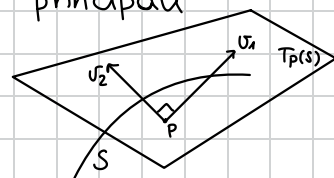
dN_p autoaggiunto $\Rightarrow dN_p$ diagonalizzabile con autovalori $-k_1, -k_2$

Se $k_1 = k_2$ pto ombelicali $\Rightarrow$ tutte le direzioni sono autovalori $\Rightarrow$ l'autospazio è $T_p(S)$

Se $k_1 \neq k_2 \Rightarrow$ 2 autospazi generati da $\{v_1\}$ e $\{v_2\}$ dette direzioni principali

Mentre k_1 e k_2 sono chiamate curvature principali

Essendo v_1 e v_2 base di autovettori di dN_p autoaggiunto si ha $v_1 \perp v_2$



OSS

Vogliamo trovare v_1 e v_2 in maniera più diretta

$$\text{Deve valere } dN_p(v_1) = -k_1 v_1 \text{ e } dN_p(v_2) = -k_2 v_2$$

Sia $v = \alpha x_u + \beta x_v \in T_p(S)$ con $\alpha, \beta \neq 0$ vettore generico di $T_p(S)$ e impongo che sia

un autovettore. Calcoliamo $dN_p(v) = \lambda v$ ^{impongo}

Sappiamo già che rispetto alla base di $T_p(S)$ $\{x_u, x_v\}$ dN_p è rappresentato da A

$$\Rightarrow dN_p(v) = \lambda v \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{otteniamo quindi il sistema}$$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = \lambda\alpha \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta = \lambda\beta \end{cases} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11}\alpha + a_{12}\beta & \alpha \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta & \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{cioè } a_{11}\alpha\beta + a_{12}\beta^2 - a_{21}\beta^2 - a_{22}\alpha^2 - a_{22}\alpha\beta = 0 \stackrel{\text{eq}}{\Leftrightarrow} (EG - F^2)(a_{11}\alpha\beta + a_{12}\beta^2 - a_{21}\beta^2 - a_{22}\alpha^2 - a_{22}\alpha\beta) = 0$$

$$\text{Usiamo ora le espressioni di } a_{ij} \quad (fE - eF)\alpha^2 + (eF - eG - fF + gE)\alpha\beta + (gF - Gf)\beta^2 \stackrel{**}{=} 0$$

Essendo un'eq. omogenea in α, β , per trovarli conviene porre $\alpha=1$ (oppure β) e trovare l'altro (sperando che α non sia 0)

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0$$

PROP

$$P \text{ è punto ombelicale} \stackrel{*}{\Leftrightarrow} \text{rg} \begin{pmatrix} E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 1 \quad (\text{cioè sono proporzionali})$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) \text{ è autovettore } \forall \alpha, \beta$$

DIM

$$\text{Sappiamo che } A = -I^{-1} \Pi \stackrel{\Pi=kI}{=} -I^{-1} k I = -k Id \quad \text{quindi } A = -k Id \Leftrightarrow \text{l'unico autovalore di}$$

$$A \text{ è } -k \Leftrightarrow \text{le curve principali coincidono} \Leftrightarrow \text{il pto è ombelical} \quad \text{QED}$$

OSS

1) Vogliamo capire ora quando x_u e x_v sono direzioni principali

- Osservo che $x_u = 1 x_u + 0 x_v \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 0$

Quindi x_u è direzione principale $\Leftrightarrow E f - F e = 0$ (da **) (che è un minore 2×2 di $\star$)

- Analogamente $x_v = 0 x_u + 1 x_v \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$

Quindi x_v è direzione principale $\Leftrightarrow g F - G f = 0$ (da **) (che è un minore 2×2 di $\star$)

2) Se invece x_u e x_v sono entrambe principali abbiamo 2 casi:

- Se $F \neq 0 \Rightarrow e = \frac{f}{F} E \quad g = \frac{f}{F} G \Rightarrow$ dato che $f = \frac{f}{F} F \Rightarrow p$ è ombelico

- Se $F = 0$ (supponendo che $E > 0$) $\Rightarrow$ da $E f - F e = 0$ si deduce che $f = 0$

Calcoliamo allora $A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e}{E} & 0 \\ 0 & -\frac{g}{G} \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 = \frac{e}{E} \quad k_2 = \frac{g}{G}$ curvature principali

(k_1 potrebbe essere $\neq k_2$ oppure no) $\Rightarrow u_1 = x_u$ e $u_2 = x_v$
per esempio in un pto ombelico

DEF CURVE PRINCIPALI o LINEE DI CURVATURA

$\gamma: (a, b) \rightarrow S$ curva regolare si dice principale se $\forall t \in (a, b)$ si ha che

$\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}(S)$ è una direzione principale in $T_{\gamma(t)}(S)$

OSS

Localmente $\gamma(t) = x(u(t), v(t)) \Rightarrow \gamma'(t) = u'(t) x_u + v'(t) x_v \Rightarrow \alpha = u'(t) \quad \beta = v'(t)$

Abbiamo visto che $\gamma'(t)$ è direzione principale $\Leftrightarrow u'$ e v' verificano l'eq differenz.

$$\det \begin{pmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0$$

Non è banale se il punto NON è ombelico

Se un punto è ombelico ha infinite curve principali

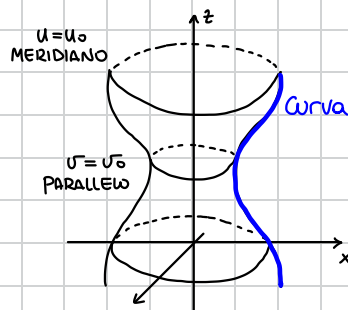
ES SUPERFICI DI ROTAZIONE

$F = 0, f = 0 \Leftrightarrow$ le curve coordinate sono curve principali
vali sempre non solo per le superfici di rotazione

perché in ogni pto x_u e x_v sono direzioni principali

Nel caso delle sup di rotazione le curve coordinate

sono meridiani e paralleli. Sappiamo anche che $x_u \perp x_v$



DEF CURVE ASINTOTICHE o LINEE ASINTOTICHE

Una curva regolare $\gamma: (a, b) \rightarrow S$ con $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$ si dice asintotica se

$$dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0 \quad \forall t$$

(Tale curva esiste solo in un intorno di $\gamma(t_0) \Leftrightarrow \gamma(t_0) \in S$ è punto iperbolico (planare o parabolico))

OSS

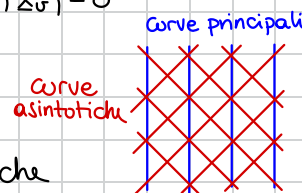
CAPISCI

Nella definizione precedente stiamo chiedendo $dN_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$ che è equivalente a

chiedere $\frac{\Pi}{I}(\gamma'(t)) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \Pi(\gamma'(t)) = 0$ cioè $\Pi(u'(t)z_u(t) + v'(t)z_v(t)) = 0$

cioè $eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2 \stackrel{*}{=} 0$ (eq. differenziale)

Quindi se p è pto iperbolico ho una famiglia di curve asintotiche



OSS

Consideriamo la curva coordinata $\gamma: \begin{cases} u=t \\ v=v_0 \end{cases} \Rightarrow u'=1, v'=0 \Rightarrow$ sostituendo in $*$

ottengo $e = e(t, v_0) = 0 \quad \forall t$

Abbiamo trovato che: γ curva coordinata ($v=v_0$) è asintotica $(\Leftrightarrow) e=0 \quad \forall t$

- Analogamente possiamo considerare l'altra curva coordinata $\gamma = \begin{cases} u=u_0 \\ v=t \end{cases} \quad \forall t$

$\Rightarrow u'=0, v'=1 \Rightarrow$ in $*$ $g = g(u_0, t) = 0 \quad \forall t$

γ curva coordinata ($u=u_0$) è asintotica $(\Leftrightarrow) g=0 \quad \forall t$

Se $e, g = 0$ (cioè entrambe le curve coordinate sono asintotiche) si ha che

$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-f^2}{EG - F^2} \leq 0$, inoltre se $f \neq 0$ verra un pto iperbolico

OSS

- Abbiamo già visto come trovare k_1 e k_2 note H e K

- Vediamo ora un altro modo per trovare k_1 e k_2 :

vali questa formula perchè i calcoli dicono che vale

k_1 e k_2 sono le soluzioni di $\det(\Pi - xI) = 0$ cioè

$$\begin{vmatrix} e - xE & f - xF \\ f - xF & g - xG \end{vmatrix} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2(EG - F^2) - x(eg + eG - 2fF) + (eg - f^2) = 0$$

Essendo $EG - F^2 > 0$ posso dividere ottenendo $x^2 - \frac{eg + eG - 2fF}{EG - F^2}x + \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$

Cioè $x^2 - 2Hx + K = 0 \Rightarrow$ le soluzioni sono $x_{1,2} = \begin{cases} k_1 \\ k_2 \end{cases}$

ES

$$x(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = u^2 + uv \\ y(u, v) = u^2v + v^2 \\ z(u, v) = uv + u^2v^2 \end{cases} \quad p = x(1, 1) = (2, 2, 2)$$

$$x_u = (2u + v, 2uv, v + 2uv^2) \Rightarrow x_u(p) = (3, 2, 3)$$

$$x_v = (u, u^2 + 1, 2u^2v) \Rightarrow x_v(p) = (1, 2, 3)$$

indipendenti $\Rightarrow$ in un intorno di p è sup regolare

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(0, -6, 4) \Rightarrow E = 22 \quad F = 16 \quad G = 14$$

$$x_{uu} = (2, 2u, 2u^2) \Big|_{u=1} = (2, 2, 2) \Rightarrow L = e = x_{uu} \cdot N = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$x_{uv} = (1, 2u, 1+4uv) \Big|_{u=1} = (1, 2, 5) \Rightarrow M = f = x_{uv} \cdot N = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$x_{vv} = (0, 0, 2u^2) \Big|_{u=1} = (0, 0, 2) \Rightarrow N = g = x_{vv} \cdot N = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$\det II = eg - f^2 = \frac{-8-16}{13} = -\frac{24}{13} < 0 \Rightarrow p \text{ è pto iperbolico}$$

Troniamo ora le direzioni asintotiche

$$II(\alpha x_u + \beta x_v) = 0 \Rightarrow e\alpha^2 + 2f\alpha\beta + g\beta^2 = 0 \Rightarrow -2\alpha^2 + 8\alpha\beta + 4\beta^2 = 0 \Rightarrow -\alpha^2 + 4\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$$

Osservo che $\beta=0$ non è soluzione perché altrimenti verrebbe $\alpha=0$

$$\Rightarrow \text{Pongo } \beta=1 \Rightarrow -\alpha^2 + 4\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \pm \sqrt{6}$$

Quindi le direzioni asintotiche sono date da $\begin{cases} \alpha = 2 \pm \sqrt{6} \\ \beta = 1 \end{cases}$

Troniamo ora le direzioni principali (α, β) (con la formula dell'inizio della lezione)

$$\det \begin{pmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \\ 11 & 8 & 7 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 30\alpha^2 + 29\alpha\beta + 2\beta^2 = 0 \Rightarrow \text{poniamo } \alpha=1, \text{ perché } \alpha=0 \text{ non è soluzione}$$

vettori indep
 $\Rightarrow$ non è pto ombelico

$$(\text{cioè siamo sicuri che } \alpha \neq 0) \Rightarrow 2\beta^2 + 29\beta + 30 = 0 \Rightarrow \beta_{1,2} = \dots$$

Quindi le direzioni principali sono $v_1 = (1, \beta_1)$, $v_2 = (1, \beta_2)$

Se volessi trovare le curvature principali basterebbe calcolare $k_i = \frac{II(v_i)}{I(v_i)}$ $i=1, 2$

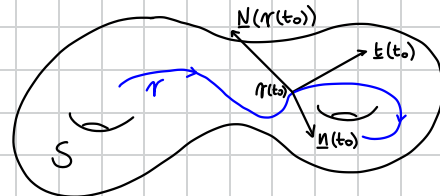
QSS

16104

Consideriamo una curva $\gamma(t)$ biregolare $\gamma(t) \in S$

con lunghezza d'arco $\gamma = \gamma(s)$

$\underline{n}$ = versore normale di γ = **NORMALE PRINCIPALE**



$\dot{\gamma}(s) = \underline{t}(s)$ vale inoltre $N(\gamma(s)) \perp \underline{t}(s)$ perché $\underline{t}(s) \in T_{\gamma(s)}(S)$

$$\Rightarrow N(\gamma(s)) \cdot \underline{t}(s) \equiv 0 \quad \forall s \Rightarrow \text{derivo rispetto a } s \quad \frac{dN}{ds}(\gamma(s)) \cdot \underline{t}(s) + N(\gamma(s)) \cdot k(s) \underline{n}(s) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{-dN_{\gamma(s)}(\underline{t}(s)) \cdot \underline{t}(s)}_{= II(\underline{t}(s))} = k(s) N(\gamma(s)) \cdot \underline{n}(s)$$

per def di dN
 $\frac{dN}{ds}(\gamma(s)) = dN_{\gamma(s)}(\underline{t}(s))$

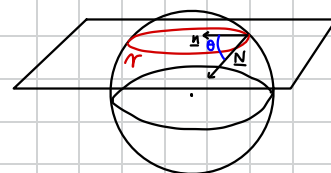
$$\Rightarrow \underline{II(\underline{t}(s))} = k(s) N(\gamma(s)) \cdot \underline{n}(s)$$

curvatura normale
nella direzione di $\underline{t}(s)$

ES

Sfera di raggio R $k_1 = \frac{1}{R} = k_2$

tagliamo la sfera con un piano // all'equatore



la curvatura normale è $\frac{1}{R}$ in qualunque direzione $\Rightarrow$ la sfera è fatta

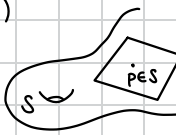
da tutti punti ombelicali

Per l'osservazione precedente vale $k N \cdot n = \frac{1}{R} \stackrel{\|N\|, \|n\|=1}{\Rightarrow} k \cos \theta = \frac{1}{R} \Rightarrow k = \frac{1}{R \cos \theta}$

infatti il raggio di curvatura della curva γ (circonferenza) è $R \cos \theta$

QSS INDICATRICE DI DUPIN

Considero una Superficie parametrizzata $x = x(u, v) \Rightarrow \{x_u, x_v\}$ base di $T_p(S)$

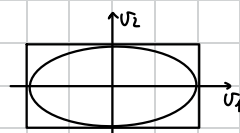
Sagliamo ora come base di $T_p(S)$ $\{v_1, v_2\}$ che sono gli autovettori di dN_p 

di autovalori $-k_1, -k_2$, possiamo prenderli t.c. $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ e vale sempre che $v_1 \perp v_2$

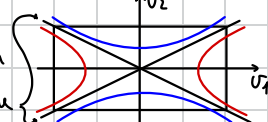
Prendo ora un vettore qualsiasi di $T_p(S)$ $av_1 + bv_2 \Rightarrow II(av_1 + bv_2) = k_1 a^2 + k_2 b^2$

INDICATRICE DI DUPIN = $\{v \in T_p(S) : II(v) = \pm 1\}$

• Se p è ellittico $\Rightarrow k_1, k_2 > 0$ $k_1 a^2 + k_2 b^2 = 1 \Rightarrow$ viene un'ellisse
 $k_1, k_2 < 0$ $-k_1 a^2 - k_2 b^2 = 1$

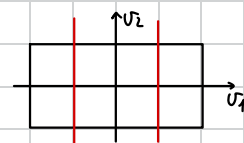


• Se p è iperbolico $\Rightarrow k_1 > 0 > k_2$ $k_1 a^2 - k_2 b^2 = \pm 1 \Rightarrow$ vengono 2 iperboli



• Se p è parabolico $\Rightarrow \stackrel{(k_1 > 0)}{k_1 \neq 0}, k_2 = 0$ $k_1 a^2 = 1 \Rightarrow$ viene una coppia di rette

parallele a v_2



• Se p è planare $\Rightarrow 0 = 1$ ASSURDO $\Rightarrow \emptyset$

ES (Teorico)

S superficie connessa e^3 t.c. $\forall p \in S$ è ombelico $\Rightarrow S$ è una porzione di sfera ($k_1 = k_2$) o di un piano ($k_1 = k_2 = 0$)

dim

$\forall v \in T_p(S) \Rightarrow dN_p(v) = \lambda(p)v$

Se $v = x_u \Rightarrow dN_p(x_u) = N_u = \lambda x_u \Rightarrow$ derivo $N_{uv} = \lambda_v x_u + \lambda x_{uv} \Rightarrow \lambda_u x_v = \lambda_v x_u$
 $N_{vu} = \lambda_u x_v + \lambda x_{vu}$

• Se $v = x_v \Rightarrow dN_p(x_v) = N_v = \lambda x_v \Rightarrow$ derivo $N_{vu} = \lambda_u x_v + \lambda x_{vu} \Rightarrow \lambda_u x_v = \lambda_v x_u$
 $N_{uv} = \lambda_v x_u + \lambda x_{uv}$

Abbiamo trovato $\lambda_u x_v = \lambda_v x_u$ vera $\forall p$ se e solo se $\lambda_u = 0 = \lambda_v$ (usando il fatto che x_u e x_v sono indipendenti) $\Rightarrow \lambda$ costante $\forall p$

Abbiamo ora 2 casi:

$$1) \lambda \equiv 0 \Rightarrow dN_p(v) \equiv 0 \quad \forall v \Rightarrow N_u = 0 = N_v \Rightarrow N \text{ costante}$$

$$\text{Considero } x \cdot N = \overset{\text{costante}}{c} \text{ e derivo } \begin{aligned} C_u &= \underbrace{x_u \cdot N}_{=0} + \underbrace{x \cdot N_u}_{=0} = 0 \\ C_v &= \underbrace{x_v \cdot N}_{=0} + \underbrace{x \cdot N_v}_{=0} = 0 \end{aligned} \Rightarrow c \text{ costante}$$

$\Rightarrow S$ è una porzione del piano di equazione $x \cdot N = c$

$$2) \lambda \neq 0 \text{ costante} \Rightarrow \text{Considero } x(u,v) - \frac{1}{\lambda} N(u,v) = y(u,v) \text{ e derivo}$$

$$\left. \begin{aligned} y_u &= x_u - \frac{1}{\lambda} N_u = x_u - \frac{1}{\lambda} \lambda x_u = 0 \\ y_v &= x_v - \frac{1}{\lambda} N_v = x_v - \frac{1}{\lambda} \lambda x_v = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y \text{ è costante} \Rightarrow x(u,v) = \overset{\text{costante}}{y} + \frac{1}{\lambda} N(u,v)$$

$\Rightarrow x$ giace sulla sfera di raggio $|\frac{1}{\lambda}|$ e di centro y ok

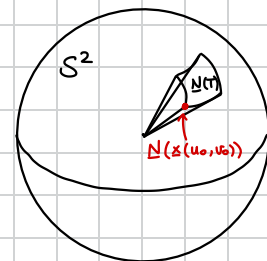
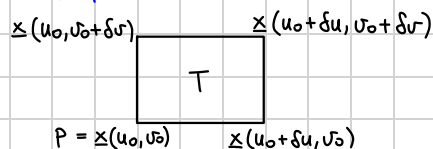
OSS

Considero $N: S \longrightarrow S^2$ mappa di Gauss

Sia $T \subseteq S$ regione compatta $\Rightarrow$ Ci chiediamo come sono legate $\text{Area } T$ e $\text{Area}(N(T))$

Soprattutto quando $\text{Area } T \rightarrow 0$ (cioè " $T \rightarrow p$ " $p \in S$)

Sia $P = x(u_0, v_0)$



$$\text{Area } T = \int_{u_0}^{u_0 + \delta u} \int_{v_0}^{v_0 + \delta v} \|x_u \wedge x_v\| du dv \approx \|x_u \wedge x_v\| \delta u \delta v$$

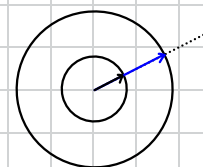
$$\text{Area}(N(T)) = \int_{u_0}^{u_0 + \delta u} \int_{v_0}^{v_0 + \delta v} \|N_u \wedge N_v\| du dv \approx \|N_u \wedge N_v\| \delta u \delta v = |K| \|x_u \wedge x_v\| \delta u \delta v$$

$$\begin{aligned} \text{Per Weingarten } N_u &= a_{11} x_u + a_{21} x_v \quad N_v = a_{12} x_u + a_{22} x_v \\ \Rightarrow N_u \wedge N_v &= |a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}| \|x_u \wedge x_v\| = |K| \|x_u \wedge x_v\| \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \lim_{\substack{\delta u \rightarrow 0 \\ \delta v \rightarrow 0}} \frac{\text{Area } N(T)}{\text{Area } T} = K(P) \text{ CURVATURA GAUSSIANA}$$

ES

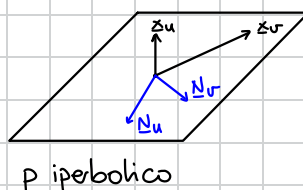
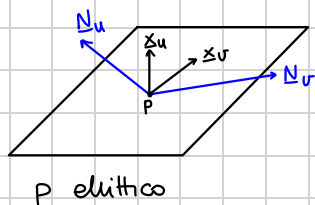
$$\text{Sfera di raggio } R \quad \begin{aligned} N: S &\longrightarrow S^2 \\ x &\longmapsto \frac{1}{R} x \end{aligned} \quad \text{Area } N(T) = \frac{1}{R^2} \text{Area } T$$



OSS

Se p è ellittico $\Rightarrow N: T_p(S) \longrightarrow T_p(S^2)$ mantiene l'orientazione

Se p è iperbolico $\Rightarrow N: T_p(S) \longrightarrow T_p(S^2)$ inverte l'orientazione



ESERCIZIO

Data la superficie $x(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = ue^v \\ y(u,v) = u^2 + v \\ z(u,v) = u \sin v \end{cases} \quad u=1, v=0 \Rightarrow x(1,0) = (1,1,0)$
(calcolare tutto)

a) $x_u = (e^v, 2u, \sin v)|_{u=1, v=0} = (1, 2, 0)$
 $x_v = (ue^v, 1, u \cos v)|_{u=1, v=0} = (1, 1, 1)$ $\rightarrow$ indipendenti $\Rightarrow x$ è sup regolare in un intorno di $(1,1,0)$

$E = x_u \cdot x_u(1,0) = 5 \quad F = x_u \cdot x_v(1,0) = 3 \quad G = x_v \cdot x_v(1,0) = 3$

$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}(1,0) = (2, -1, -1) \frac{1}{\sqrt{6}}$

$x_{uu} = (0, 2, 0) \quad x_{uv} = (e^v, 0, \cos v)|_{u=1, v=0} = (1, 0, 1) \quad x_{vv} = (ue^v, 0, -u \sin v)|_{u=1, v=0} = (1, 0, 0)$

$e = N \cdot x_{uu}(1,0) = -\frac{2}{\sqrt{6}} \quad f = N \cdot x_{uv}(1,0) = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad g = N \cdot x_{vv}(1,0) = \frac{2}{\sqrt{6}}$

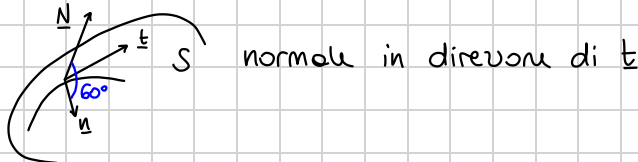
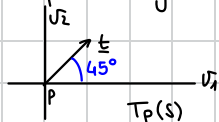
$eg - f^2 = -\frac{4}{6} - \frac{1}{6} < 0 \Rightarrow$ il punto è iperbolico

$K(1,0) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\frac{5}{6}}{6} = -\frac{5}{36}$

b) Troviamo ora le direzioni principali

$\begin{vmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Supponiamo } \beta=1 \Rightarrow 3 + 16\alpha + 11\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 33}}{11} = \frac{-8 \pm \sqrt{31}}{11} \Rightarrow v_i = (\alpha_i, 1)$

c) Sapendo gli angoli in figura (è vettore tangente alla curva) trovare la curvatura



all'incirca $k \cos 60 = e \Rightarrow k = \dots$
 $k_N = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta = k_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + k_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} H = \sqrt{2} \frac{gE + Ge - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \frac{10 - 6 - 6}{2 \cdot 6} = \dots$ } Calcoli sbagliati RIVEDI

18/04

DEF SIMBOLI DI CHRISTOFFEL

Sia S superficie parametrizzata C^3 regolare (cioè x_u, x_v indep) in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Prendiamo

$\{x_u, x_v\}$ come base di $T_P(S) \Rightarrow \{x_u, x_v, N\}$ base di $\mathbb{R}^3$

Γ_{ij}^k delle seguenti equazioni si chiamano simboli di Christoffel

$\begin{cases} x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + e N \\ x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + f N \\ x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + g N \end{cases}$ perché $x_{uu} \cdot N = e$
perché $x_{uv} \cdot N = f$
perché $x_{vv} \cdot N = g$

OSS

Calcoliamo i simboli di Christoffel

- $E = x_u \cdot x_u \Rightarrow E_u = 2 x_{uu} \cdot x_u$

$$F = x_u \cdot x_v \Rightarrow F_u = x_{uu} \cdot x_v + x_u \cdot x_{uv} = x_{uu} \cdot x_v + \frac{1}{2} E_v$$

$\uparrow$
 $G_v = 2 x_{uv} \cdot x_u$

Da queste 2 uguaglianze (usando anche la definizione precedente) otteniamo

$$\begin{cases} \frac{1}{2} E_u = x_{uu} \cdot x_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\ F_u - \frac{1}{2} E_v = x_{uu} \cdot x_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \end{cases} \Rightarrow \text{si risolve il sistema}$$

$\leftarrow$ matrice dei coefficienti

Osservo prima che $\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 > 0 \Rightarrow$ la soluzione è unica

$\Rightarrow$ si trovano Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 con Cramer

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2} E_v & G \end{pmatrix}}{EG - F^2} \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{\det \begin{pmatrix} E & \frac{1}{2} E_u \\ F & F_u - \frac{1}{2} E_v \end{pmatrix}}{EG - F^2}$$

Analogamente si fa per gli altri

- $$\begin{cases} x_v \cdot x_u = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ x_{uv} \cdot x_v = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{12}^1 \text{ e } \Gamma_{12}^2 \text{ sono determinati}$$
- $$\begin{cases} x_{vv} \cdot x_u = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ x_{vv} \cdot x_v = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{22}^1 \text{ e } \Gamma_{22}^2 \text{ sono determinati}$$

Osserviamo che avendo preso $x \in \mathbb{C}^3 \Rightarrow E, F, G \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow \Gamma_{ij}^k \in \mathbb{C}^1$

OSS

Deduciamo dall'osservazione precedente che i simboli di Christoffel DIPENDONO

SOLO DALLA IFF $\Rightarrow$ I Γ_{ij}^k sono invarianti intrinseci, cioè non dipendono da come è immersa la superficie in $\mathbb{R}^3$

TEO EGREGIO DI GAUSS (ENUNCIATO LIBRO A-T)

La curvatura gaussiana K di una superficie è data dalla formula

$$K = \frac{1}{G} \left((\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \sum_{s=1}^2 (\Gamma_{22}^s \Gamma_{1s}^1 - \Gamma_{1s}^1 \Gamma_{2s}^1) \right)$$

Nella dim viene una formula diversa
ma equivalente, dipende da * scelta
(dim come DO ARMO)

In particolare K è una proprietà intrinseca, cioè dipende soltanto dalla IFF

DIM

Essendo $x \in \mathbb{C}^3$, vale la seguente uguaglianza $(x_{uu})_v = (x_{uv})_u$

che riscriviamo usando i simboli di Christoffel

$$(\chi_{uu})_v = \frac{\partial}{\partial v} (\Gamma_{11}^1 \chi_u + \Gamma_{11}^2 \chi_v + e N) = \frac{\partial}{\partial u} (\Gamma_{12}^1 \chi_u + \Gamma_{12}^2 \chi_v + f N) = (\chi_{uv})_u \quad \text{cioè}$$

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{11}^1)_v \chi_u + \Gamma_{11}^1 \chi_{uv} + \underbrace{(\Gamma_{11}^2)_v \chi_v}_{\text{blu}} + \underbrace{\Gamma_{11}^2 \chi_{vv}}_{\text{rosso}} + e_v N + e N_v = \\ & = (\Gamma_{12}^1)_u \chi_u + \Gamma_{12}^1 \chi_{uu} + \underbrace{(\Gamma_{12}^2)_u \chi_v}_{\text{blu}} + \underbrace{\Gamma_{12}^2 \chi_{uv}}_{\text{rosso}} + f_u N + f N_u \end{aligned}$$

Sostituiamo ora le derivate seconde di nuovo con i simboli di Christoffel e

usiamo anche le formule di Weingarten $N_u = a_{11} \chi_u + a_{21} \chi_v$, $N_v = a_{12} \chi_u + a_{22} \chi_v$

Confrontiamo soltanto i coefficienti di χ_v vengono da pezzi delle parti blu e rosse

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^2 + e a_{22} = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + f a_{21}$$

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = f a_{21} - e a_{22}$$

sostituiamo a_{22} e a_{21} $a_{21} = \frac{-Fe + Ef}{EG - F^2}$ $a_{22} = \frac{-Ff + Fg}{EG - F^2}$

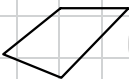
$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = \frac{-\cancel{F}e + f^u E + e\cancel{F}f - eFg}{EG - F^2} = -EK$$

Si trova quindi K e dato che dalle osservazioni precedenti Γ_{ij}^k dipendono solo

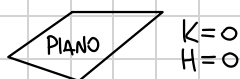
da IFF $\Rightarrow K$ dipende solo dalla IFF CND

OSS

1) La sfera NON è sviluppabile cioè non esiste un'isometria tra una porzione di

sfera e una porzione di piano  $K = \frac{1}{R^2}$  $K = 0$

2) H NON dipende solo dalla IFF



CILINDRO
 $K=0$, $H = \frac{1}{2R} > 0$

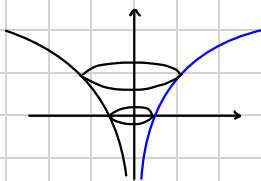
$\Rightarrow H$ NON è un invariante intrinseco

3) Se ho un diffeomorfismo $\varphi: S \rightarrow T$ che preserva K , non è detto che φ sia

isometria. Come controesempio guarda 2) e avevamo già dimostrato che esiste un

diffeomorfismo tra un piano e un cilindro

ES Sup di rotazione



$$\begin{cases} x(v) = v = \varphi(v) \\ z(v) = \ln v = \psi(v) \end{cases} \Rightarrow \underline{\alpha}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \ln v) \quad \text{Sup. di rotazione}$$

$$f = 0 = F \quad E = \varphi^2(v) = v^2 \quad G = \varphi'^2 + \varphi''^2 = 1 + \frac{1}{v^2}$$

$$e = -\frac{\varphi \varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \varphi''^2}} = -\frac{v \frac{1}{v}}{\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}} = -\frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}$$

viene 1 se la curva
ha lunghezza d'arco

$$g = \frac{\varphi' \varphi'' - \varphi'' \varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \varphi''^2}} = \dots = \frac{\frac{1}{v^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}} = \frac{1}{v \sqrt{1 + v^2}}$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1 + v^2)^2}$$

ELICOIDI

$$r_2(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$$

$$r_{2u} = (-v \sin u, v \cos u, 1) \quad r_{2v} = (\cos u, \sin u, 0) \quad r_{2u} \cdot r_{2v} = 0 \quad E = 1 + v^2 \quad F = 0 \quad G = 1$$

$$r_{2u} \wedge r_{2v} = (-\sin u, \cos u, -v) \Rightarrow N = \frac{(-\sin u, \cos u, -v)}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$r_{2uu} = (-v \cos u, -v \sin u, 0) \Rightarrow e = 0$$

$$r_{2uv} = (-\sin u, \cos u, 0) \Rightarrow f = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$r_{2vv} = (0, 0, 0) \Rightarrow g = 0$$

$$\text{Quindi } K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{-(1+v^2)^2}$$

Avendo la stessa $K \Rightarrow \exists$ un diffeomorfismo f $\begin{matrix} (u, v) \longrightarrow r_1(u, v) \\ \searrow \quad \swarrow \\ r_2(u, v) \end{matrix}$ f preserva K

$$H_1 = \frac{1}{2} \frac{eG + Eg - 2Ff}{EG - F^2} = \frac{-\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) + v^2 \frac{1}{v \sqrt{1+v^2}}}{2(1+v^2)} = -\frac{1}{2(1+v^2)^{3/2}} \frac{1}{v}$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \frac{eG + Eg - 2Ff}{EG - F^2} = 0 \neq H_1$$

Per vedere che f non è isometria basta vedere che non coincidono i coefficienti della IFF

Abbiamo già visto che esiste invece un'isometria tra l'elicoide e la catenoidale $\Rightarrow K$ è conservata

ESERCIZIO: Dimostrare che $\nexists$ isometria tra r_1 e r_2

22/04

OSS EQ. DI MAINARDI-CODAZZI (IMC, IMC)

$$\text{Sia } x: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ superficie parametrizzata} \Rightarrow \begin{cases} x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + e N \\ x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + f N \\ x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + g N \end{cases}$$

$\Rightarrow$ val. $(x_{uu})_v = (x_{uv})_u \Rightarrow$ Nella dimostrazione del teorema egregio abbiamo uguagliato i

coefficienti di x_v (usando Weingarten $N_u = a_{11} x_u + a_{12} x_v$, $N_v = a_{12} x_u + a_{22} x_v$)

Analogamente si possono uguagliare i coefficienti di x_u e trovare un'altra identità

$$(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = FK \quad (\text{è un po' meno del Teo egregio perché } F \text{ potrebbe essere anche } 0)$$

(Se $F \neq 0$ è equivalente alla formula di Gauss del teo Egregio)

- Possiamo uguagliare i coefficienti di N

facendo prod. scal. con N mi prendo la componente lungo N

$$(x_{uu})_v \cdot N = \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e v$$

"

$$(x_{uv})_u \cdot N = \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u$$

$$\Rightarrow e v - f_u = e \Gamma_{12}^1 + f (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2$$

I EQUAZIONE DI MAINARDI-CODAZZI

- Consideriamo ora $(x_{uv})_v = (x_{uv})_u$ uguagliamo i coefficienti di N

$$(x_{uv})_v \cdot N = \Gamma_{12}^1 f + \Gamma_{12}^2 g + f_v$$

$$\Rightarrow f_u - g_u = e \Gamma_{21}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g \Gamma_{12}^2$$

II EQUAZIONE DI
MAINARDI-CODAZZI

$$(x_{uv})_u \cdot N = \Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{22}^2 f + g_u$$

Svolgendo i calcoli, uguagliando i vari coefficienti, anche dell'identità $(N_u)_v = (N_v)_u$

si trovano equazioni tutte dipendenti con I MC o II MC $\Rightarrow$ I MC e II MC sono le uniche 2 indipendenti

TEO DI STRUTTURA DELLE SUPERFICI IN $\mathbb{R}^3$ (BONNET)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, siano le funzioni $C^2 E, F, G: V \rightarrow \mathbb{R}$ e funzioni $C^1 e, f, g: V \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

1) $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$ ($\forall x \in V$, cioè in ogni punto)

2) Sono soddisfatte le equazioni di Gauss e Mainardi-Codazzi

$$\text{GAUSS: } \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = -EK = -E \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$\text{I MC: } e_v - f_u = e \Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2$$

$$\text{II MC: } f_u - g_u = e \Gamma_{21}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g \Gamma_{12}^2$$

$\Rightarrow \forall q \in V \exists$ un intorno aperto U' di q ed $\exists$ una superficie parametrizzata $x: V \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ che ha come coefficienti della I FF E, F, G e come coefficienti della II FF e, f, g .

Inoltre, tale superficie è unica a meno di moti rigidi nello spazio

cioè se esiste $\tilde{\varphi}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$
sup. immersa che verifica
le stesse condizioni $\Rightarrow \exists$
 $p \in SO(3)$ e $b \in \mathbb{R}^3$ t.c.
 $\tilde{\varphi} = p \circ x + b$

OSS

Moti rigidi sono funzioni $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $A \in SO(3, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^3$
 $x \mapsto Ax + b$

OSS

I moti rigidi preservano I FF e II FF

DIM

$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie parametrizzata $\Rightarrow Ax + b: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un'altra superficie

Superficie x

- $E = x_u \cdot x_u$
- $F = x_u \cdot x_v$
- $G = x_v \cdot x_v$

- $e = x_{uu} \cdot N$
- $f = \bar{f}$
- $g = \bar{g}$

Superficie $Ax + b$

In * uso che $A \in SO(3, \mathbb{R})$

- $\bar{E} = (Ax + b)_u \cdot (Ax + b)_u \stackrel{*}{=} \|Ax_u\|^2 = \|x_u\|^2 = x_u \cdot x_u = E$ ok
- $\bar{F} = (Ax + b)_u \cdot (Ax + b)_v = Ax_u \cdot Ax_v \stackrel{*}{=} x_u \cdot x_v = F$
- Analogamente $\bar{G} = G$

- $\bar{e} = (Ax + b)_{uu} \cdot \bar{N} = Ax_{uu} \cdot AN \stackrel{*}{=} x_{uu} \cdot N = e$

$$\bar{N} = \frac{Ax_u \wedge Ax_v}{\|Ax_u \wedge Ax_v\|} = \frac{Ax_u \wedge Ax_v}{\sqrt{EG - F^2}} \stackrel{*}{=} \frac{A(x_u \wedge x_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = AN$$

- Analogamente $\bar{f} = f \quad \bar{g} = g$

WD

DIM (tes) (pag. 311 DO CARMO)

Cerco $x_u, x_v, N: V \rightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ Imposto un sistema di equazioni differenziali

Rinomino: $\xi \leftrightarrow x_u, \eta \leftrightarrow x_v, \zeta \leftrightarrow N$ ogni funzione ha 3 componenti $\Rightarrow$ ho 18 equazioni

ognuna di 2 variabili u, v (anch'esse incognite)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + e N \Rightarrow \xi_u = \Gamma_{11}^1 \xi + \Gamma_{11}^2 \eta + e \zeta \Rightarrow 3 \text{ eq. scalari} \\ x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + f N \Rightarrow \xi_v = \Gamma_{12}^1 \xi + \Gamma_{12}^2 \eta + f \zeta \Rightarrow 3 \text{ eq. scalari} \\ x_{vu} = \Gamma_{21}^1 x_u + \Gamma_{21}^2 x_v + f N \Rightarrow \eta_u = \Gamma_{12}^1 \xi + \Gamma_{12}^2 \eta + f \zeta \Rightarrow 3 \text{ eq. scalari} \\ x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + g N \Rightarrow \zeta_v = \Gamma_{22}^1 \xi + \Gamma_{22}^2 \eta + g \zeta \Rightarrow 3 \text{ eq. scalari} \\ N_u = a_{11} x_u + a_{21} x_v \Rightarrow \zeta_u = a_{11} \xi + a_{21} \eta \Rightarrow 3 \text{ eq. scalari} \\ N_v = a_{12} x_u + a_{22} x_v \Rightarrow \zeta_v = a_{12} \xi + a_{22} \eta \Rightarrow 3 \text{ eq. scalari} \end{array} \right.$$

Condizione necessaria per avere soluzioni $(\xi_u)_v = (\xi_v)_u, (\eta_u)_v = (\eta_v)_u, (\zeta_u)_v = (\zeta_v)_u$

Queste condizioni sono anche sufficienti per avere una soluzione in un intorno aperto U

di $q \Rightarrow$ Dato che esiste la soluzione, essa è unica fissate le condizioni iniziali

$$\xi(q) = \xi_0, \eta(q) = \eta_0, \zeta(q) = \zeta_0$$

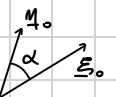
Voglio ora costruire la superficie

Scelgo le condizioni iniziali in modo che

$$\begin{aligned} \xi_0 \cdot \xi_0(q) &= E(q) \\ \xi_0 \cdot \eta_0(q) &= F(q) \\ \eta_0 \cdot \eta_0(q) &= G(q) \end{aligned}$$

posso farlo perché $EG - F^2 > 0$

Basta quindi prendere ξ_0, η_0, ζ_0 vettori t.c. $\|\xi_0\| = \sqrt{E}, \|\eta_0\| = \sqrt{G}, \cos \alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}$



Un'altra condizione che voglio sulle condizioni iniziali è:

$$\zeta_0 \cdot \zeta_0 = 1, \zeta_0 \cdot \xi_0 = 0, \zeta_0 \cdot \eta_0 = 0 \Rightarrow \text{basta scegliere } \zeta_0 = \frac{\xi_0 \wedge \eta_0}{\|\xi_0 \wedge \eta_0\|}$$

Scriviamo ora un nuovo sistema di equazioni differenziali con $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ incognita

$$\begin{cases} x_u = \xi \\ x_v = \eta \end{cases}$$

Le condizioni necessarie e sufficienti (di compatibilità) sono $\xi_v = \eta_u$ che è vera

(vedi * nel primo sistema) $\Rightarrow \exists x: U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ soluzione candidata ad essere la

superficie che ci interessa (e unica se fissiamo le condizioni iniziali)

Le uniche cose che rimangono da mostrare sono:

$$1) x_u \cdot x_u \stackrel{?}{=} E$$

$$2) x_u \cdot x_v \stackrel{?}{=} F$$

$$3) x_v \cdot x_v \stackrel{?}{=} G$$

$$4) \underline{G} \stackrel{?}{=} \underline{N}$$

$\Downarrow \text{eq}$

$$\underline{G} \cdot \underline{G}^a = 1, \underline{G} \cdot x_u^b = 0, \underline{G} \cdot x_v^c = 0$$

1, 2, 3, 4a, 4b, 4c

Impostiamo allora un sistema di 6 eq. differenziali scalari a derivate parziali dove abbiamo 6 incognite che rinominiamo

$$x_u \cdot x_u \rightarrow \alpha$$

$$x_v \cdot x_v \rightarrow \delta$$

Ognuna di queste incognite si può derivare

$$x_v \cdot x_u \rightarrow \beta$$

$$\underline{N} \cdot x_v \rightarrow \varepsilon$$

$$\underline{N} \cdot x_u \rightarrow \gamma$$

$$\underline{N} \cdot \underline{N} \rightarrow \lambda$$

rispetto a u e a v

Otteniamo quindi un sistema di 12 equazioni del tipo

$$\begin{cases} (x_u \cdot x_u)_u = 2(x_{uu} \cdot x_u) = 2(\Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + e \underline{N}) \cdot x_u \Rightarrow \alpha_u = 2\Gamma_{11}^1 \alpha + \Gamma_{11}^2 \beta + e \gamma \\ \vdots \end{cases}$$

Le condizioni di compatibilità di questo nuovo sistema sono del tipo

$(\alpha_u)_v = (\alpha_v)_u$ che sono tutte verificate perché sono quelle che abbiamo imposto

all'inizio $\Rightarrow \exists!$ la soluzione fissate le condizioni iniziali corrispondenti ai

prodotti scalari di $\underline{E}_0, \underline{u}_0, \underline{G}_0$

Successivamente si vede che $\alpha = E, \beta = F, \gamma = 0, \delta = G, \lambda = 1, \varepsilon = 0$ verifica il sistema

$\Rightarrow$ è l'unica soluzione

Inoltre x_u e x_v sono lin. indipendenti perché $E > 0, G > 0$ in un intorno di q

$\Rightarrow x$ è superficie parametrizzata $\mathbb{R}^3$

Mi restringo ora ad un intorno connesso di $q \Rightarrow$ il normale è nella direzione giusta

$\underline{G} = \underline{N}$ perché $\underline{G}_0 = \underline{N}(q)$ e per continuità

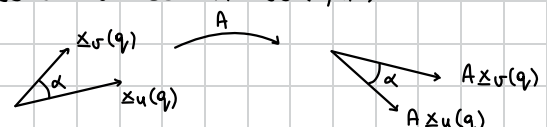
perché abbiamo dim che
 $x_u = \underline{E}$ e $x_v = \underline{u}$

Anche la IFF è giusta infatti $x_{uu} \cdot \underline{N} = (\Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + e \underline{N}) \cdot \underline{N} \stackrel{!}{=} e$

UNICITA'

Se x_u e x_v è soluzione $\Rightarrow Ax_u$ e Ax_v è soluzione con $A \in SO(3, \mathbb{R})$

(Stessa cosa vale per $\underline{N}$) α



Abbiamo visto che x_u e x_v determinano x a meno del valore iniziale $x(q) = x_0$

$\Rightarrow$ la soluzione finale è determinata a meno di traslazione $\Rightarrow \exists! b \in \mathbb{R}^3$

WD

ES

Esiste una superficie con $E=1, G=0, F=1, e=1, f=0, g=1$? No

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = 1 \text{ costante}$$

IFF è la stessa del piano $\Rightarrow$ la superficie sarebbe isometrica (localmente) al piano

Per teo egregio K dipende solo dalla IFF $\Rightarrow K=0 \Rightarrow$ No ^{dal piano}

ES

Esiste una superficie con $E=1, F=2, G=1$?

$$E>0, G>0, EG-F^2 = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{No}$$

OSS

Se $F=0$ (curve coordinate ortogonali) $\Delta u \cdot \Delta v = 0 \Rightarrow$ le eq di Gauss e Mainardi-Codazzi

si semplificano:

I simboli di Christoffel diventano $\Gamma_{11}^1 E = \frac{1}{2} E_u \Rightarrow \Gamma_{11}^2 = \frac{E_u}{2E}$ e analogamente

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_u}{2G}; \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{E_v}{2E}; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{G_u}{2G}; \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}; \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}$$

Li sostituiamo in Gauss e in M-C che diventano

$$\text{GAUSS: } K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right)$$

Mentre Mainardi-Codazzi (supponendo anche $f=0$)

$$\text{I M-C: } e_v = \frac{E_v}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = E_v H$$

$\Rightarrow$ le linee coordinate sono linee di curvatura

$$\text{II M-C: } g_u = \frac{G_u}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = G_u H$$

ES

$E=1, F=0, G=\cos^2 u, e=\cos^2 u, f=0, g=1$ con $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad v \in \mathbb{R}$ esiste una superficie?

$$\text{Sono verificate } E>0, G>0, EG-F^2>0 \text{ ok } K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} = 1$$

Calcoliamo ora K con Gauss nella versione semplificata dell'osservazione precedente

$$K = -\frac{1}{2\cos u} \left(\frac{-2\cos u \sin u}{\cos u} \right)_u = -\frac{-2\cos u}{2\cos u} = 1 \Rightarrow \text{Gauss verificata}$$

Mainardi Codazzi

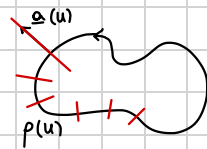
$$\text{I) } e_v = 0, E_v = 0 \Rightarrow 0=0 \text{ I eq M-C ok}$$

$$\text{II) } g_u = 0, \quad \frac{(\cos^2 u)_u}{2} \left(\cos^2 u + \frac{1}{\cos^2 u} \right) = -\cos u \sin u \left(\cos^2 u + \frac{1}{\cos^2 u} \right) \neq 0 \quad \text{NON verificata} \quad \leftarrow \text{se } u \neq 0$$

$\Rightarrow$ Non esiste tale superficie

OSS RIGATE

$\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{p}(u) + v \mathbf{a}(u)$ Supponiamo che u parametro d'arco e $\|\mathbf{a}(u)\| = 1 \quad \forall u$



IFF già calcolata $E = 1 + 2v \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{a}_u + v^2 \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_u \quad F = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{a}_u \quad G = 1$

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{p}_u + v \mathbf{a}_u \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \mathbf{p}_u \wedge \mathbf{a} + v \mathbf{a}_u \wedge \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$\mathbf{x}_{uu} = \mathbf{p}_{uu} + v \mathbf{a}_{uu} \quad \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{a}_u \quad \mathbf{x}_{vv} = 0$$

$$e = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{p}_{uu} + v \mathbf{a}_{uu}) \cdot \frac{(\mathbf{p}_u \wedge \mathbf{a} + v \mathbf{a}_u \wedge \mathbf{a})}{\sqrt{EG - F^2}} \quad f = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{a}_u \cdot (\mathbf{p}_u \wedge \mathbf{a}) \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \quad g = 0$$

$$eg - f^2 = -f^2 = -\left(\mathbf{a}_u \cdot (\mathbf{p}_u \wedge \mathbf{a}) \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{(\mathbf{a}_u \cdot (\mathbf{p}_u \wedge \mathbf{a}))^2}{(EG - F^2)^2} \leq 0 \text{ sempre} \quad (\mathbf{p}_u \wedge \mathbf{a} = 0 \text{ se } \mathbf{a}(u) = 0)$$

$K = 0$ in una rigata $\Leftrightarrow \mathbf{a}_u \cdot \mathbf{p}_u \wedge \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_u, \mathbf{p}_u, \mathbf{a}$ sono linearmente dipendenti

ES

Cilindro è una rigata con $\mathbf{a}$ costante $\Rightarrow \mathbf{a}_u = 0$

Infatti per teorema egregio la curvatura è la stessa del piano $\Rightarrow K = 0$

ES

Cono $\mathbf{p} = \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{p}$ e $\mathbf{a}$ dipendenti $\Rightarrow K = 0$ per teorema egregio

(già sapevamo che K doveva essere 0)

ES

Superficie dei tangenti $\mathbf{a} = \mathbf{p}_u$ dipendenti con $v \neq 0$ altrimenti avrei una singolarità

$\Rightarrow K = 0$ ma già lo sapevamo per teo egregio

OSS

Supponiamo $K = 0$

- Se $\mathbf{a}_u \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{a}$ costante $\Rightarrow$ cilindro
- Suppongo che $\mathbf{a}_u \neq 0$ (in un pto $\Rightarrow$ per continuità in un intorno) $\Rightarrow$ prendendo $\|\mathbf{a}\| = 1$

vale $\mathbf{a}_u \cdot \mathbf{a}_u = 0$

Dall'osservazione sulla rigata, essendo $K = 0 \Rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{a}_u, \mathbf{p}_u$ sono dipendenti $\Rightarrow \mathbf{p}_u$ si

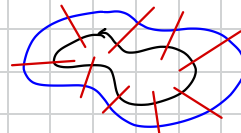
scrive come combinazione lineare di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}_u \Rightarrow \mathbf{p}_u(u) = \lambda(u) \mathbf{a} + \mu(u) \mathbf{a}_u$

Considero il cambio di coordinate $\begin{cases} \bar{u} = u \\ \bar{v} = v + \mu(u) \end{cases} \Rightarrow$ Jacobiano $\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = 1 & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = \mu_u & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 1$

$\Rightarrow$ è effettivamente un cambio di coordinate ammissibile

Rigata $\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{p}(u) + v \mathbf{a}(u) \xrightarrow{\text{cambio coordinate}} \mathbf{p}(\bar{u}) + (\bar{v} - \mu(u)) \mathbf{a}(\bar{u}) = \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) = \underbrace{[\mathbf{p}(\bar{u}) - \mu(\bar{u}) \mathbf{a}(\bar{u})]}_{\bar{\mathbf{p}}(\bar{u})} + \bar{v} \mathbf{a}(\bar{u})$

$$\bar{p}_u = p_u - \mu_u a - \mu a_u = (\lambda - \mu_u) a \quad \text{Abbiamo ora diversi casi}$$



Se $\lambda - \mu_u \equiv 0 \Rightarrow \bar{p}$ costante $\Rightarrow$ cono

Se $\bar{p}_u \neq 0$ (in un intorno) $\Rightarrow \bar{p}_u \parallel a \Rightarrow$ superficie dei tangenti

Abbiamo quindi trovato che le uniche rigate con $K=0$ sono solo cono, cilindro oppure una qualche superficie dei tangenti

OSS

In tutta questa lezione consideriamo la Geometria intrinseca

della sup. parametrizzata $x = x(u, v)$

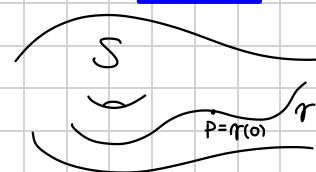
Considereremo sempre una curva $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ almeno C^1

$$\gamma(t) = x(u(t), v(t)) \quad \text{con } u(t), v(t) \in C^1$$

Definiamo un campo vettoriale w lungo γ di vettori tangenti a S

cioè $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ associo $w(t) = a(t)x_u(u(t), v(t)) + b(t)x_v(u(t), v(t)) \in T_{x(u(t), v(t))}(S)$ con

$a(t), b(t)$ funzioni C^1



29/04

DEF DERIVATA COVARIANTE

Sia w campo vettoriale almeno C^1 di vettori tangenti alla superficie definiamo la

derivata covariante di w in $t=0$ come la proiezione ortogonale di $\frac{dw}{dt}(0)$ in $T_p(S)$

e si denota con $\frac{Dw}{dt}(0)$

OSS ①

$$\frac{dw}{dt} = a'x_u + a \overset{\text{derivale in t}}{x'_u} + b'x_v + b \overset{\text{derivale in t}}{x'_v} = a'x_u + a(x_{uu}u' + x_{uv}v') + b'x_v + b(x_{vu}u' + x_{vv}v') = \dots$$

simboli di Christoffel

$$\begin{cases} x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + \underline{e N} \\ x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + \underline{f N} \\ x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + \underline{g N} \end{cases}$$

$\perp T_p(S) \Rightarrow$ sparisce quando proietto sul piano tangente

$$\begin{aligned} \dots &= x_u(a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{12}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v') + x_v(b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{12}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v') + \\ &\quad + \underline{N(a'u'e + a v'f + b u'f + b v'g)} \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \frac{Dw}{dt} = x_u(a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{12}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v') + x_v(b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{12}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v')$$

$\Rightarrow \frac{Dw}{dt}$ dipende solo dalle IFF e non dalla Π

OSS

Consideriamo di nuovo la curva $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$

$$\gamma'(t) = u'(t) x_u(u(t), v(t)) + v'(t) x_v(u(t), v(t))$$

Osserviamo che se conosciamo il campo vettoriale $w \Rightarrow$ per sapere quanto vale
cioè in un punto

$\frac{Dw}{dt}(0)$ ci basta conoscere $u'(0)$ e $v'(0)$ cioè ci basta conoscere il vettore

tangente a γ in $t=0 \Rightarrow$ non mi interessa molto la curva ma il vettore tangente

Allora se prendiamo come $u'=\alpha$, $v'=\beta$ e consideriamo la direzione $\alpha x_u + \beta x_v$

diciamo che $\frac{Dw}{dt}$ è la derivata covariante di w nella direzione di w

ES

Piano $E=1, F=0, G=1 \Rightarrow \Gamma_{ij}^k \equiv 0 \quad \forall i, j, k \Rightarrow \frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt}$

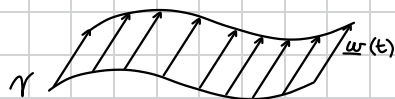
DEF CAMPO VETTORIALE PARALLELO

Un campo vettoriale lungo la curva γ (che giace su S) si dice parallelo se $\frac{Dw}{dt} \equiv 0$

ES

Nel piano dire che w è campo vettoriale parallelo significa $\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt} \equiv 0$

$\Rightarrow w$ costante



OSS

$w = a(t) x_u(u(t), v(t)) + b(t) x_v(u(t), v(t))$ campo vettoriale è parallelo lungo γ

da oss ①
 $\Rightarrow$ vale $*$
$$\begin{cases} a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{12}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v' = 0 \\ b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{12}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v' = 0 \end{cases}$$

DEF TRASPORTO PARALLELO (DO ARMO)

Sia $\gamma: I \rightarrow S$ curva parametrizzata e sia $w_0 \in T_{\gamma(t_0)}(S)$ con $t_0 \in I$. Sia w campo

vettoriale parallelo lungo γ t.c. $w(t_0) = w_0$. Chiamiamo trasporto parallelo di w_0

lungo γ al punto t_1 il vettore $w(t_1)$ con $t_1 \in I$

OSS

Fisso $w_0 = a_0 x_u(u(0), v(0)) + b_0 x_v(u(0), v(0))$

Voglio estendere w_0 ad un campo di vettori $w(t)$ tangenti a S che sia parallelo lungo γ

t.c. $w(0) = w_0$

Ci sono dati $u, v, u', v', \Gamma_{ij}^k \Rightarrow$ le incognite sono a e b che devono risolvere $*$

che è sistema di eq differenziali lineari con condizioni iniziali date ($a(0) = a_0, b(0) = b_0$)

$\Rightarrow$ Per tes di esistenza e unicit  delu soluzioni di sistemi di eq. differenziali

ordinarie esiste un'unica soluzione $a=a(t)$ e $b=b(t)$

$\Rightarrow \underline{w}(t) = a(t) \underline{x}_u(u(t), v(t)) + b(t) \underline{x}_v(u(t), v(t))$ t.c. $a(0)=a_0$ e $b(0)=b_0$

OSS

Se $\underline{w}$   parallelo $\Rightarrow \frac{D\underline{w}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\underline{w}}{dt}(t)$   ortogonale al piano tangente

$\Rightarrow \frac{d\underline{w}}{dt}$   parallelo a $N(\gamma(t))$

OSS

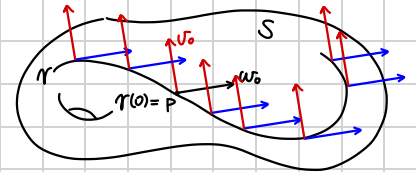
Consideriamo 2 campi paralleli $\underline{v}(t), \underline{w}(t)$ lungo la curva $\gamma \Rightarrow \underline{v}(t) \cdot \underline{w}(t) = \text{costante}$

DIM

$$\frac{d}{dt}(\underline{v}(t) \cdot \underline{w}(t)) = \overset{\text{derivata rispetto a } t}{\underline{v}'(t)} \cdot \underline{w}(t) + \underline{v}(t) \cdot \overset{\text{derivata rispetto a } t}{\underline{w}'(t)} \stackrel{!}{=} 0$$

perch  $\underline{w}', \underline{v}' \in T_{\gamma(t)}(S)^\perp$ e $\underline{v}, \underline{w} \in T_{\gamma(t)}(S)$

CVD



COR

1) Se $\underline{w}$   campo parallelo $\Rightarrow \|\underline{w}(t)\|$   costante

DIM

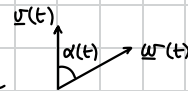
Basta prendere nell'osservazione precedente $\underline{v}(t) = \underline{w}(t)$

$\Rightarrow \|\underline{w}(t)\|^2 = \underline{w}(t) \cdot \underline{w}(t)$ che   costante CVD

2) L'angolo tra $\underline{v}(t)$ e $\underline{w}(t)$ campi paralleli (non nulli)   costante

DIM

$$\cos \alpha(t) = \frac{\underline{v}(t) \cdot \underline{w}(t)}{\|\underline{v}(t)\| \|\underline{w}(t)\|} = \text{costante} \Rightarrow \alpha(t) \text{ costante}$$



CVD

ES

γ = cerchio massimo nel piano Oxy della sfera di raggio R centrata nell'origine

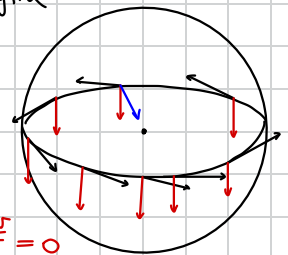
con lunghezza d'arco. Scelgo $\underline{w}(t) = \underline{\gamma}'(t)$

$$\frac{d\underline{w}}{dt} = -\frac{1}{R^2} \underline{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}(S)^\perp \Rightarrow \frac{D\underline{w}}{dt} \equiv 0 \Rightarrow \underline{w} \text{   campo parallelo}$$

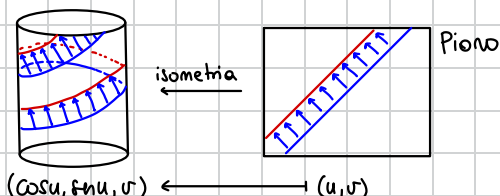
    il vett. normale perch  la sfera   centrata nell'origine

Considero il campo costante $\underline{v}(t) = (0, 0, -1) \in T_{\gamma(t)}(S) \quad \forall t \Rightarrow \frac{d\underline{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{D\underline{v}}{dt} = 0$

$\alpha(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ perch  $\underline{v}(t) \cdot \underline{w}(t) = 0 \quad \forall t$



ES



$\underline{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ Cilindro

Dato che esiste un'isometria $\Rightarrow$ la IFF   la stessa

OSS

Ogni isometria conserva i campi vettoriali paralleli

ESERCIZIO

$$x(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \ln v) \quad \ln v \text{ ruotato attorno all'asse } z$$

$$y(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u) \quad \text{elicoidi}$$

$$\text{Abbiamo visto che } K = -\frac{1}{(v^2+1)^2}$$

Non esiste nessuna isometria locale tra le 2 superfici x e y

Se P.A. esistesse un'isometria $\Rightarrow$ avrei un cambio di coordinate $\begin{cases} u = u(a, b) \\ v = v(a, b) \end{cases}$ che trasforma la IFF di y in quella di x

$$\text{Abbiamo già visto che } I_y = (v^2+1) du^2 + dv^2 \quad I_x = v^2 du^2 + (1 + \frac{1}{v^2}) dv^2 = b^2 da^2 + (1 + \frac{1}{b^2}) db^2$$

Dato che K è invariante intrinseco $\Rightarrow$ deve essere preservato dall'isometria $\Rightarrow$ due valori

$$-\frac{1}{(v^2+1)^2} = -\frac{1}{(b^2+1)^2} \quad \text{poiché } v > 0, \text{ supponendo che } b > 0, \text{ si ricava che } v = b$$

Rimane da trovare u

E_x rispetto ad a, b

$$y_a = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial a} = 0$$

$$E(a, b) = \underbrace{b^2}_{=v^2} = y_a \cdot y_a = (y_u \cdot y_u) u_a^2 = u_a^2 (v^2+1) \Rightarrow u_a = \frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\pm v}{\sqrt{v^2+1}}$$

perché se c'è un'isom. la IFF
due coincidono

$$\text{Osserviamo che } 0 = \underbrace{F(a, b)}_{=y_u \cdot y_v} = y_a \cdot y_b = y_u u_a \cdot (y_u u_b + y_v \underbrace{v_b}_{=1}) = (u_a y_u) \cdot (u_b y_u + y_v) = u_a u_b y_u \cdot y_u = u_a u_b E(u, v) =$$

$$= \underbrace{u_a u_b}_{\neq 0} \underbrace{(v^2+1)}_{\neq 0}$$

per $\neq 0$

$$\Rightarrow u_b = 0 \Rightarrow u_{ab} = 0 \Rightarrow 0 = u_{ab} = \frac{\partial}{\partial b} (u_a) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\pm v}{\sqrt{v^2+1}} \right) \neq 0 \quad \text{ASSURDO}$$

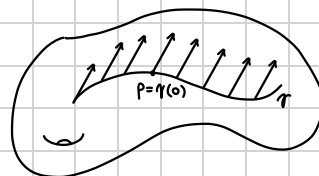
30/04

OSS (Richiami)

$\gamma = \gamma(t)$ curva regolare; $\omega_0 \in T_p(S)$

ω campo di vettori lungo γ tangenti a S con la proprietà

$$\omega(0) = \omega_0 \quad \text{e} \quad \frac{D\omega}{dt} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{d\omega}{dt} \parallel N$$



OSS

Considero 2 superfici S_1 e S_2 , poniamo che $S_1 \cap S_2 = \text{Im } \gamma$

e $\forall p \in \text{Im } \gamma$ vale $T_p(S_1) = T_p(S_2)$ allora

Un campo di vettori lungo γ è parallelo rispetto a S_1 ($\Leftrightarrow$) e parallelo rispetto a S_2

Più in generale vale la seguente affermazione:



La derivata covariante di un campo di vettori $\underline{w}$ lungo γ è uguale in S_1 e S_2

se $T_p(S_1) = T_p(S_2) \quad \forall p \in S_1 \cap S_2 = \text{Im } \gamma$

dim $\frac{D\underline{w}}{dt} = \pi_{T_p(S_i)}^{\text{proiez. ortog}} \left(\frac{d\underline{w}}{dt} \right) \quad i=1,2 \quad \text{con } p \in \gamma(t) \quad \text{la derivata covariante è la stessa perché}$
hanno lo stesso piano tangente CVD

Se le superfici si intersecano trasversalmente l'osservazione precedente non è vera

OSS

Essere un campo parallelo non dipende dalla parametrizzazione della curva

DIM

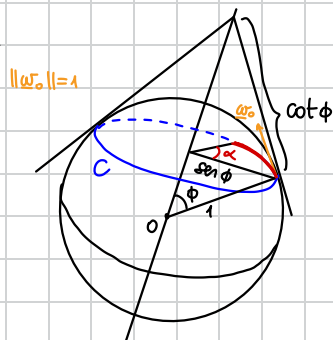
Cambiamo la parametrizzazione di $\gamma = \gamma(t)$ tramite composizione con un diffeomorfismo

$$t = t(\bar{t}) \Rightarrow \gamma = \gamma(t(\bar{t})) \Rightarrow \underline{w} = \underline{w}(t) = \underline{w}(t(\bar{t}))$$

Abbiamo quindi $\frac{d\underline{w}}{d\bar{t}} = \frac{d\underline{w}}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}} \Rightarrow$ essendo la proiezione lineare vale $\frac{D\underline{w}}{d\bar{t}} = \frac{dt}{d\bar{t}} \frac{D\underline{w}}{dt}$
perché diffeom. $\neq 0$

$$\text{Allora } \frac{D\underline{w}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{D\underline{w}}{d\bar{t}} = 0 \quad \text{CVD}$$

ES



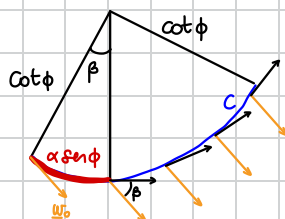
Sia la curva C un parallelo della sfera S^2 $C = \gamma: \mathbb{R} \rightarrow S^2$ curva

Voglio costruire un campo di vett. parallelo lungo la curva C

Vogliamo determinare il trasporto parallelo di $\underline{w}_0$ lungo C

Osserviamo che il cono è isometrico al piano $\Rightarrow$ "tagliamo" il

cono e lo disponiamo su un piano ottenendo



$\alpha \sin \phi$ è la lunghezza del tratto fatto lungo C

Faccio il trasporto parallelo di $\underline{w}_0$ sul piano dove ho sviluppato il cono

Si vede come varia l'angolo tra il campo $\underline{w}$ e il vettore tangente a C

L'arco di lunghezza $\alpha \sin \phi$ gioca anche sul cono $\Rightarrow$ due val. $\beta \cot \phi = \beta \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \stackrel{*}{=} \alpha \sin \phi$

$$\Rightarrow \beta = \alpha \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi}$$

Si vede che se $\alpha = 2\pi \Rightarrow \beta = 2\pi \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} \Rightarrow$ non torno allo stesso angolo che c'era in partenza

DEF GEODETICA

Data una superficie (parametrizzata) S e una curva regolare γ di classe C^2 su S

γ si dice geodetica se $\frac{D\gamma'}{dt} \equiv 0$ (abbiamo quindi salto $\underline{w} = \gamma'$) cioè

γ' è un campo di vettori parallelo lungo γ

ES

γ come cerchio massimo in una sfera è una geodetica

Un cerchio NON massimo non è una geodetica

ES

Nel piano le rette sono geodetiche $\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{D\gamma'}{dt} = 0 \Rightarrow \gamma' = \underline{w}_0$ costante $\Rightarrow \gamma(t) = p + \underline{w}_0 t$

OSS

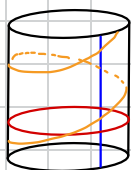
Una geodetica è la traiettoria di un pto materiale vincolato a S e non soggetto a forze

OSS

Un'isometria conserva le geodetiche perchè tutto dipende dalla geometria intrinseca

ES

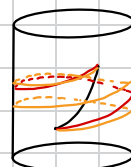
Cilindro (localmente isometrico al piano)



Le geodetiche sul cono sono rette verticali, circonferenze o eliche

2 pti nel piano sono collegati da una e una retta (geodetica)

2 pti nel cilindro sono collegati da infinite geodetiche (un numero numerabile)
↳ dipende quanti giri faccio



ES

Sfera: le uniche geodetiche sono porzioni di cerchi massimi

Ho infinite geodetiche se i pti sono antipodali

OSS EQUAZIONI DI UNA GEODETICA (3! geodetiche)

Consideriamo una superficie parametrizzata $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $x = x(u, v)$

γ curva data da $u: I \rightarrow \mathbb{R}$, $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ almeno C^2 , $\forall t \in I$ $(u(t), v(t)) \in U \Rightarrow \gamma(t) = x(u(t), v(t))$

Deriviamo la curva $\gamma'(t) = u'(t) x_u(u(t), v(t)) + v'(t) x_v(u(t), v(t))$
↑
coordin. di γ' in $T_{\gamma(t)}(S)$ risp. base $\{x_u, x_v\}$

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t) = \left(u''(t) + \Gamma_{11}^1 u'(t)^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^1 v'(t)^2 \right) x_u + \left(v''(t) + \Gamma_{11}^2 u'(t)^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^2 v'(t)^2 \right) x_v$$

↑
formula dell'ultima lezione con $a=u'$, $b=v'$

Affinchè sia geodetica i 2 coefficienti devono annullarsi $\Rightarrow$ otteniamo allora il

seguente Sistema di eq. differenziali ordinarie (del II ordine)

$$\begin{cases} u''(t) + \Gamma_{11}^1 u'(t)^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^1 v'(t)^2 = 0 \\ v''(t) + \Gamma_{11}^2 u'(t)^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^2 v'(t)^2 = 0 \end{cases}$$

Fissiamo ora le condizioni iniziali

Sia $t_0 \in I$, fisso $\gamma(t_0) \in S$ cioè fisso $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$

Fisso anche $\gamma'(t_0) = a_0 \chi_u(u_0, v_0) + b_0 \chi_v(u_0, v_0)$ cioè fisso $u'(t) = a_0$ e $v'(t) = b_0$

Con queste condizioni $\Rightarrow$ per teo di $\exists!$ $\Rightarrow \exists$ un intervallo $J \subset I$ e una soluzione unica

$$u: J \rightarrow \mathbb{R}, v: J \rightarrow \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ le geodetiche esistono e sono uniche fissate le condizioni iniziali

OSS

Quindi se cambio direzione iniziale ho un'altra geodetica

Può succedere anche che la geodetica "si fermi", l'oss precedente definisce una geodetica

localmente in un intervallo J

OSS

La parametrizzazione della curva è importante infatti:

Se γ è una geodetica $\Rightarrow \gamma'(t)$ è un campo di vettori parallelo $\Rightarrow \|\gamma'(t)\|$ costante $\forall t$

$\Rightarrow \gamma$ è parametrizzata da un multiplo della lunghezza d'arco

Quindi se $\|\gamma'(t)\| = c > 0 \Rightarrow s = \int \|\gamma'(t)\| dt = ct$

Questa osservazione dice che una curva γ su una superficie S , affinché sia geodetica,

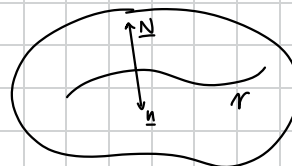
deve essere parametrizzata in modo lineare, cioè con un multiplo della lung. d'arco.

OSS

γ geodetica sia il parametro d'arco $s = ct \Rightarrow \gamma(s) = \gamma(ct) \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt} = c \frac{d\gamma}{ds}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\gamma}{dt^2} = c \frac{d}{dt} \left(\frac{d\gamma}{ds} \right) = c^2 \frac{d^2\gamma}{ds^2} = c^2 k \cdot n$$

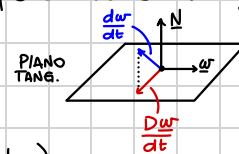
Essendo geodetica $\frac{D\gamma'}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\gamma}{ds^2} \parallel N$



(ATTENZIONE! Non confondere le sezioni normali con le geodetiche)

Sia S superficie parametrizzata $\underline{x} = \underline{x}(u, v)$, sia γ curva $\mathbb{C}^2$ su S , $\underline{w}$ campo di vettori lungo γ

$\gamma = \gamma(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$. Sia $\frac{D\underline{w}}{dt}$ derivata covariante



Sia N campo di versori normali (cioè consideriamo una superficie orientata)

Supponiamo che $\|\underline{w}(t)\| = 1 \quad \forall t \Rightarrow \underline{w}(t) \cdot \underline{w}(t) \equiv 1 \quad \forall t \xrightarrow{\text{derivando}} \frac{d\underline{w}}{dt} \cdot \underline{w} = 0 \Rightarrow \frac{d\underline{w}}{dt} \perp \underline{w}$

$\Rightarrow$ se proietto $\frac{d\underline{w}}{dt}$ su $T_{\gamma(t)}(S)$ si ha che tale proiezione (cioè $\frac{D\underline{w}}{dt}$) continua ad essere $\perp \underline{w}$

$\Rightarrow \frac{D\underline{w}}{dt} \perp \underline{w}$ e poichè $\frac{D\underline{w}}{dt} \in T_{\gamma(t)}(S) \Rightarrow$ vale anche $\frac{D\underline{w}}{dt} \perp N$

Possiamo ora considerare il riferimento ortonormale $\{N, \underline{w}, N \wedge \underline{w}\}$ e abbiamo

detto che $\frac{D\underline{w}}{dt} \perp \underline{w}, \frac{D\underline{w}}{dt} \perp N \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \frac{D\underline{w}}{dt} = \lambda (N \wedge \underline{w})$ chiamiamo $\lambda(t) \in \mathbb{R}$

VALORE ALGEBRICO DELLA DERIVATA COVARIANTE di $\underline{w}$ (si indica $\lambda = \left[\frac{D\underline{w}}{dt} \right]$)

DEF CURVATURA GEODETICA (DO ARMO)

Sia γ una curva regolare $\mathbb{C}^2$ su S superficie orientata, sia $\gamma = \gamma(s)$ con s lunghezza d'arco $\Rightarrow \|\dot{\gamma}(s)\| = 1$

$\Rightarrow$ Chiamiamo curvatura geodetica il valore algebrico della derivata covariante di

$\dot{\gamma}(s)$ cioè $k_g = \frac{D\dot{\gamma}(s)}{ds}$

QSS

• $k_g = 0 \Leftrightarrow \frac{D\dot{\gamma}}{dt} \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma$ è geodetica

• k_g è invariante intrinseco cioè dipende solo dalla IFF perchè la derivata covariante dipende solo dalla IFF

ES

S è un piano $Oxy \in \mathbb{R}^3$

$N \equiv (0, 0, 1) \quad \gamma(s) = (u(s), v(s), 0) \Rightarrow \dot{\gamma}(s) = (\dot{u}(s), \dot{v}(s), 0) = \underline{t}(s)$



$\frac{d\dot{\gamma}}{ds} = \ddot{\gamma}(s) = (\ddot{u}(s), \ddot{v}(s), 0) = \tilde{k}(s) \tilde{n}(s)$ ma $\tilde{n} = N \wedge \underline{t}$ perchè $\tilde{n} = (-\dot{v}, \dot{u}, 0)$

$\frac{D\dot{\gamma}}{ds}(s) = \frac{d\dot{\gamma}(s)}{ds} = k_g (N \wedge \underline{t}) \Rightarrow k_g = \tilde{k}$
perchè siamo nel piano

QSS

Se cambio param. di $S \Rightarrow$ cambia segno di $N \Rightarrow$ cambia segno k_g

Quindi il segno di k_g dipende dall'orientazione della superficie

OSS RELAZIONE TRA k_g, k, k_N

$k \rightarrow$ curvatura in $\mathbb{R}^3$

$k_N \rightarrow$ curvatura normale ($k_N = \mathbb{II}(\dot{\gamma})$)

$\hookrightarrow$ dipende ovviamente da $\mathbb{II}$ e F

Sia γ curva regolare C^2 $\gamma = \gamma(s)$ con s lung. d'arco $\Rightarrow \dot{\gamma}(s) = \dot{\gamma}(s)$ vettore tangente

Sappiamo che $\frac{d\dot{\gamma}(s)}{ds} = \ddot{\gamma}(s) \Rightarrow \|\ddot{\gamma}(s)\| = k \geq 0$

Normale principale a γ (noi lo avevamo chiamato "vettore normale")

Se $k(s) \neq 0 \Rightarrow \ddot{\gamma}(s) = k(s) \mathbf{n}(s)$

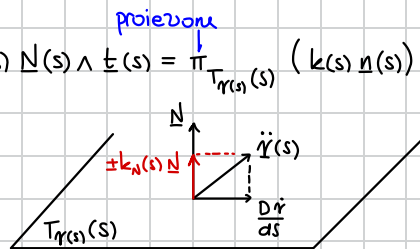
D'altra parte abbiamo $k_N(s) = \mathbb{II}(\dot{\gamma}(s)) \stackrel{\text{Teo}}{=} k(s) \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{N}(s)$ (si vede che k e k_N coincidono a meno di un segno se $\mathbf{n}$ e $\mathbf{N}$ sono uguali a meno di un segno)

Per definizione di curvatura geodetica si ha $\frac{D\dot{\gamma}}{ds}(s) = k_g(s) \mathbf{N}(s) \wedge \dot{\gamma}(s) = \pi_{T_{\gamma(s)}}(k(s) \mathbf{n}(s))$

Per teo di pitagora $k^2 = \|\ddot{\gamma}(s)\|^2 = k_N^2 + k_g^2$

Se $k_g = 0 \Rightarrow k = \pm k_N$ (il segno dipende dalla direzione di $\mathbf{N}$)

Abbiamo trovato $k^2 = k_N^2 + k_g^2$



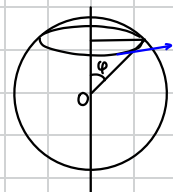
ES

Sfera di raggio R . Cerchio di raggio $R \sin \varphi$

$$k = \frac{1}{R \sin \varphi} \quad k_N = \mathbb{II}(\dots) = (\pm) \frac{1}{R}$$

$\hookrightarrow$ è praticamente la curvatura di un cerchio massimo perché la sezione normale passa per O

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{R^2} + k_g^2 \Rightarrow k_g^2 = -\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{R^2 \sin^2 \varphi} \Rightarrow k_g = \pm \frac{1}{R} \cot \varphi$$



OSS GEODETICHE SU SUPERFICI DI ROTAZIONE

$$\begin{cases} x(u, v) = f(v) \cos u \\ y(u, v) = f(v) \sin u \\ z(u, v) = g(v) \end{cases} \quad \text{CON } f(v) > 0$$

Se f fosse param. con lung. d'arco $G=1$

Abbiamo già calcolato $I(u, v) = \overbrace{f(v)^2}^E du^2 + (\overbrace{f'(v)^2 + g'(v)^2}^G) dv^2$

$$E_u = 0, G_u = 0, F = 0, F_u = 0, F_v = 0, E_v = 2ff', G_v = 2(f'f'' + g'g'')$$

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G} = -\frac{ff'}{f'^2 + g'^2}, \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E} = \frac{f'}{f}, \Gamma_{12}^2 = 0, \Gamma_{22}^1 = 0, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_v}{G} = \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2}$$

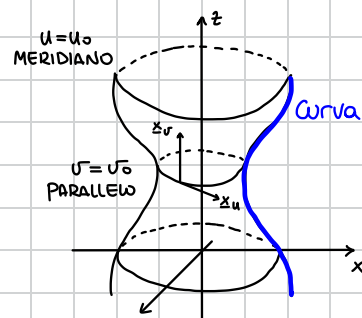
Scriviamo le equazioni delle geodetiche:

$$\begin{cases} u'' + 2 \frac{f'}{f} u' v' = 0 \\ v'' - \frac{ff'}{f'^2 + g'^2} u'^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} v'^2 = 0 \end{cases}$$

Vediamo quando le curve coordinate sono geodetiche:

- MERIDIANO. $u = \cos t = u_0 \Rightarrow u' = 0 \Rightarrow$ I Eq verificata

$$\text{II Eq diventa } v'' + \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} v'^2 = 0$$



Poniamo $v = v(s)$ con s lung. d'arco (o multiplo della lung. d'arco) $u = u_0$

$\Rightarrow$ Il vettore tangente alla curva è $\frac{dX(u_0, v(s))}{ds} \Rightarrow \left\| \frac{dX(u_0, v(s))}{ds} \right\| = 1$ cioè

lo calcolo attraverso IFF

$$\| \underline{x}_u u' + \underline{x}_v v' \| = 1 \Rightarrow \| \underline{x}_v v' \| = 1 \Rightarrow G v'^2 = 1 \Rightarrow \frac{f'^2 + g'^2}{v'^2} = 1 \Rightarrow v'^2 = \frac{1}{f'^2 + g'^2}$$

perché $f = f(v(s))$ e $g = g(v(s))$

$$\Rightarrow (v'^2)' = \left(\frac{1}{f'^2 + g'^2} \right)' \Rightarrow \cancel{2v'} v'' = - \cancel{2} \frac{f'f'' + g'g''}{(f'^2 + g'^2)^2} v'$$

perché ho lung. d'arco e la curva è regolare

$$\Rightarrow v'' = - \frac{f'f'' + g'g''}{(f'^2 + g'^2)} \frac{1}{(f'^2 + g'^2)} = - \frac{f'f'' + g'g''}{(f'^2 + g'^2)^2} v'^2 \quad \text{che è la II equazione che allora è verificata}$$

Abbiamo trovato che tutti i meridiani sono geodetiche

- PARALLELI: $v = \text{cost} = v_0 \Rightarrow v' = 0$, $u = u(s) \Rightarrow$ le equazioni delle geodetiche diventano

$$\begin{cases} \text{I Eq} & u'' = 0 \\ \text{II Eq} & \frac{u'^2}{f'^2 + g'^2} = 0 \Rightarrow f' = 0 \end{cases}$$

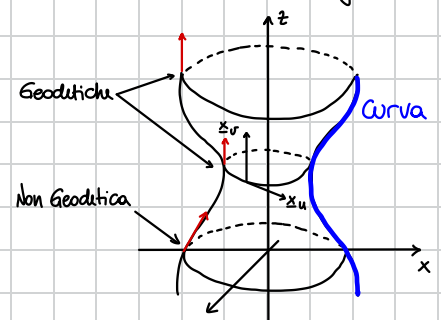
essendo geodetica vogliamo $u' \neq 0$, perché deve essere lung. d'arco

Dato che $f' = 0$ abbiamo trovato che $f = \text{costante} = \text{distanza dall'asse } z \Rightarrow$ il vettore tangente

al meridiano deve essere verticale cioè parallelo all'asse z

Se prendo $s = f(v_0) u(s) \Rightarrow$ anche la I Eq è verificata

perché $u'(s) = \frac{1}{f(v_0)} \Rightarrow u''(s) = 0$



Geodetiche che non sono meridiani o paralleli:

$$\begin{cases} u'' + 2 \frac{f'}{f} u' v' = 0 \\ v'' - \frac{f'f''}{f'^2 + g'^2} u'^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} v'^2 = 0 \end{cases}$$

Consideriamo $f^2 u'$ e lo deriviamo $\frac{d}{ds} (f^2 u') = f^2 u'' + 2ff' u' v' = 0 \Rightarrow f^2 u'$ è costante

rispetto a s I Eq (per f)

lungo la geodetica

Angolo tra una geodetica qualunque e un parallelo

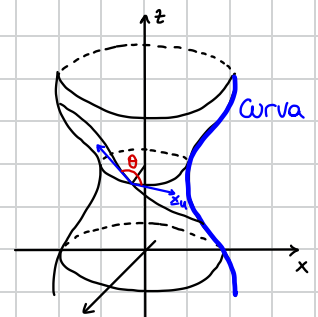
$\underline{x}_u$ vettore tangente al parallelo

$\underline{x}_u u' + \underline{x}_v v'$ vettore tangente alla geodetica $X(u(s), v(s))$

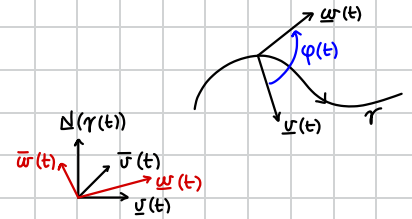
$$\cos \theta = \frac{\underline{x}_u \cdot (\underline{x}_u u' + \underline{x}_v v')}{\sqrt{\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u}} = \frac{E u' + F v'}{\sqrt{E}} = \sqrt{E} u' = |f u'|$$

$\Rightarrow$ RELAZIONE DI CLAIRAUT $f(v(s)) \cos \theta(s) = \text{costante}$ lungo una geodetica in una sup. di rotaz.

Raggio del parallelo



Data una superficie S , una curva γ su S , dati 2 campi vettoriali u, w lungo γ a valori in $T_{\gamma(t)}(S)$ t.c. $\|u(t)\| = \|w(t)\| = 1 \quad \forall t \in I$. Sia $\varphi(t)$ angolo (in senso antiorario) tra $u(t)$ e $w(t)$.
 $\Rightarrow \left[\frac{Dw}{dt} \right] - \left[\frac{Du}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt}$



DIM

Siano $\bar{u}(t) := N(\gamma(t)) \wedge u(t)$ e $\bar{w}(t) := N(\gamma(t)) \wedge w(t)$

$\Rightarrow$ Possiamo scrivere $w = \cos \varphi u + \sin \varphi \bar{u} \Rightarrow$ essendo $\bar{u} \perp w$ si deve avere che

$$\bar{w} = -\sin \varphi u + \cos \varphi \bar{u} \quad (\text{infatti } u \cdot \bar{w} = \cos \varphi (-\sin \varphi) \underbrace{u \cdot u}_{=1} + \sin \varphi (\cos \varphi) \underbrace{\bar{u} \cdot \bar{u}}_{=1} = 0)$$

(oppure si può direttam. dire $\bar{w} = N \wedge w = \cos \varphi N \wedge u + \sin \varphi N \wedge \bar{u} = \cos \varphi \bar{u} - \sin \varphi u$)

Deriviamo ora w rispetto a t e otteniamo: $w' = -\sin \varphi \varphi' u + \cos \varphi u' + \cos \varphi \varphi' \bar{u} + \sin \varphi \bar{u}'$

usando che $\bar{u}' \cdot \bar{u} = 0$ perché $\|\bar{u}\| = 1$

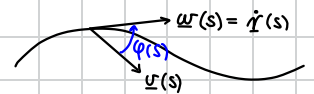
$$\langle w', \bar{w} \rangle = \dots = \sin^2 \varphi \varphi' + \cos^2 \varphi u' \cdot \bar{u} + \cos^2 \varphi \varphi' - \sin^2 \varphi \bar{u}' \cdot u = \leftarrow \text{usando } u \cdot \bar{u} = 0 \Rightarrow \text{derivando } u' \cdot \bar{u} + u \cdot \bar{u}' = 0 \Rightarrow u' \cdot \bar{u} = -u \cdot \bar{u}'$$

$$= (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \varphi' + u' \cdot \bar{u} = \varphi' + u' \cdot \bar{u}$$

Quindi $\left[\frac{Dw}{dt} \right] = \langle w', \bar{w} \rangle = \left(\frac{dw}{dt} \cdot \bar{w} \right) = \varphi' + u' \cdot \bar{u} = \varphi' + \left[\frac{Du}{dt} \right] \Rightarrow$ si ottiene la tesi CVD
 cioè derivata vera proiettata su $\bar{w}$

OSS

γ curva su S ; $\gamma = \gamma(s)$ lungh. d'arco. Voglio calcolare k_g :



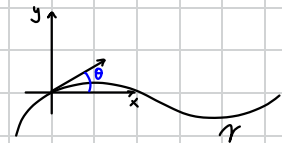
Prendiamo $w(s) = \dot{\gamma}(s)$ e $u(s)$ un campo di vettori parallelo lungo γ cioè $\frac{Du}{ds} = 0$

Dal lemma $k_g(s) = \left[\frac{Dw}{ds} \right] \stackrel{\text{lemma}}{\downarrow} \frac{d\varphi}{ds} = \dot{\varphi}$

ES

Nel piano (cioè S è un piano o una porzione di piano)

$k(s) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\theta}{ds}$ curvatura orientata di una curva
 nulla not. che avevamo usato nelle curve



La curvatura geodetica è una generalizzazione della curvatura orientata

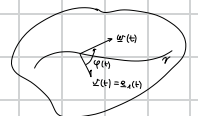
PROP

S superficie parametrizzata $x = x(u, v)$ Considero una curva γ su S data da

$\gamma(t) = x(u(t), v(t))$ con $t \in I$. Sia $w(t)$ campo di vettori unitari lungo γ .

Sia la parametrizzazione x ortogonale cioè (cioè $x_u \perp x_v \Leftrightarrow F = 0$)

$$\Rightarrow \left[\frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' + E_v u') + \varphi'$$



DIM

Sappiamo che $x_u \cdot x_u = E > 0$ e $x_v \cdot x_v = G > 0 \Rightarrow$ possiamo definire i seguenti

campi di vettori unitari lungo γ

$$e_1 = \frac{\dot{x}_u}{\sqrt{E}} \quad \|e_1\|=1 \quad e_1(u(t), v(t)) ; \quad e_2 = \frac{\dot{x}_v}{\sqrt{G}} \quad \|e_2\|=1 \quad e_2(u(t), v(t))$$

$$\left[\frac{D e_1}{dt} \right] = \frac{d e_1}{dt} \cdot \bar{e}_1 = \frac{d e_1}{dt} \cdot e_2 = [(e_1)_u u' + (e_1)_v v'] \cdot e_2 = \dots$$

come nulla non deve
dim. precedente

$$\bar{e}_1 := N \wedge e_1 = (e_1 \wedge e_2) \wedge e_1 = e_2$$

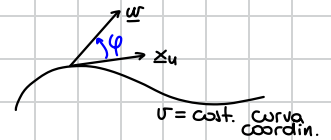
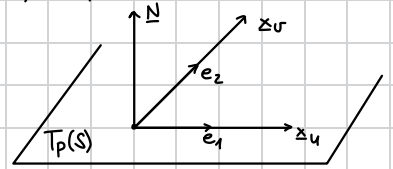
$$(e_1)_u \cdot e_2 = \left(\frac{\dot{x}_u}{\sqrt{E}} \right)_u \cdot \left(\frac{\dot{x}_v}{\sqrt{G}} \right) = \frac{\dot{x}_{uu} \cdot \dot{x}_v}{\sqrt{EG}} = \dots = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}}$$

$$\dot{x}_u \cdot \dot{x}_v = 0$$

come abbiamo fatto
con i simboli di Christoffel

$$(e_1)_v \cdot e_2 = \left(\frac{\dot{x}_u}{\sqrt{E}} \right)_v \cdot \left(\frac{\dot{x}_v}{\sqrt{G}} \right) = \frac{\dot{x}_{uv}}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\dot{x}_v}{\sqrt{G}} = \dots = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}$$

$$\dots = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' + E_v u')$$



Applicando ora il lemma con $v = e_1$ e $w = w$ si ottiene $\left[\frac{D w}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' + E_v u') + \varphi'$
CVD

OSS

Se w campo parallelo di vettori unitari $\Rightarrow \varphi' = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u')$

PROP FORMULA DI LIOUVILLE

Sia $\gamma = \gamma(s)$ curva su S con lung. d'arco (quindi $\|\dot{\gamma}\|=1$)

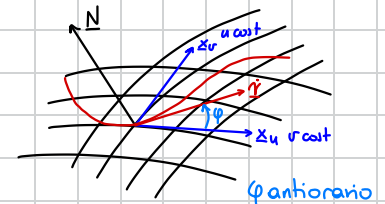
S superficie con parametrizzazione ortogonale $x = x(u, v)$ ($F \equiv 0$)

$\Rightarrow$ Se chiamiamo $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$ con $t_0 \in I$, in $x(u_0, v_0)$ vale la formula seguente

$$k_g = (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \sin \varphi + \dot{\varphi} \quad \text{dove}$$

$(k_g)_1$ = curvatura geodetica della curva coordinata $x(u, v_0)$

$(k_g)_2$ = curvatura geodetica della curva coordinata $x(v, u_0)$



DIM

Poniamo $w = \dot{\gamma}(s)$ campo di vettori unitari e usando la proposizione precedente si ha

$$k_g = \left[\frac{D \dot{\gamma}}{ds} \right]^* = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u \dot{v} - E_v \dot{u}) + \dot{\varphi}$$

Applichiamo la formula della prop precedente per trovare $(k_g)_i$:

$$\bullet \text{ Considero la curva coord. } x(u, v_0) \Rightarrow \dot{v} = 0 \Rightarrow (k_g)_1 = \left[\frac{D \dot{x}(s, v_0)}{ds} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v \dot{u}) = \frac{1}{2E\sqrt{G}} E_v$$

$$\bullet \text{ Considero la curva coord. } x(u_0, v) \Rightarrow \dot{u} = 0 \Rightarrow (k_g)_2 = \left[\frac{D \dot{x}(u_0, s)}{ds} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u \dot{v}) = \frac{1}{2G\sqrt{E}} G_u$$

come sopra $\frac{ds}{dv} = \|\dot{x}_v\| = \sqrt{G} \Rightarrow \dot{v} = \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}}$

$$\text{Sostituendo in } * \text{ si ottiene } k_g = (k_g)_1 \sqrt{E} \frac{du}{ds} + (k_g)_2 \sqrt{G} \frac{dv}{ds} + \dot{\varphi}$$

$$\text{Dato che } \cos \varphi = \dot{\gamma} \cdot \frac{\dot{x}_u}{\sqrt{E}} = \sqrt{E} \dot{u} \quad \text{e} \quad \sin \varphi = \dot{\gamma} \cdot \frac{\dot{x}_v}{\sqrt{G}} = \sqrt{G} \dot{v} \Rightarrow k_g = (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \sin \varphi + \dot{\varphi}$$

CVD

OSS

Diffeomorfismo (locale)

si conserva

Isometria (locale)

Moto Rigido

(seguito da una riflessione per un piano)

I FF	X	X	✓	✓	✓	✓
curve coordinate $u = \cos t, v = \cos t$	X	(X) (✓) vero se uso le coordinate $\underline{g}(\bar{u}(u,v), \bar{v}(u,v))$	X	(X) (✓)	✓	✓
linee di curvatura ↳ dipendono da come è messa la curva nello spazio	X	X	X	X	✓	✓
linee asintotiche ↳ dipendono dalla struttura matrice (cioè I FF)	X	X	X	X	✓	✓
II FF, k_n	X	X	X	X	✓	✓
K	X	X	✓	✓	✓	✓
$k_1 \neq k_2, H$	X	X	X	X	✓	X
Geodetiche ↳ dipendono dalla struttura matrice	X	X	✓	✓	✓	✓
k_g	X	X	✓	✓	✓	✓

una porzione di cilindro non ha le stesse linee di curvatura di un piano

puoi ci sono ipote sviluppabili che però hanno solo una linea asintotica (sul piano diventano tutte asintotiche)

vedi cilindro

Teo egregio

oss : il normale non viene riflesso

Combia di segno (inoltre il segno della curvatura normale dipende dall'orientazione)

combinano segno tutte e 2 le principali ma il prodotto rimane uguale

combinano segno

Diffeo

$S \rightarrow T$

$\underline{z}(u,v) \mapsto \underline{z}(\bar{u}, \bar{v})$ cioè $\bar{u} = \bar{u}(u,v)$ e $\bar{v} = \bar{v}(u,v)$ con $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$

Isometria

ES

γ curva sulla superficie S geodetica e linea di curvatura $\Rightarrow \gamma$ è una curva piana

$\gamma = \gamma(s)$ con s parametro d'arco

dim

$\dot{\gamma}(s)$ vettore tangente $\Rightarrow$ essendo geodetica $\frac{D\dot{\gamma}(s)}{ds} = 0 \Rightarrow \ddot{\gamma}(s) \parallel N(s)$

Inoltre $\frac{dN(\gamma(s))}{ds} \parallel \dot{\gamma}(s)$ perchè linea di curvatura

$$\frac{dN(\dot{\gamma}(s))}{ds} \parallel \underline{N}(s)$$

$$\underline{v}_0 = \frac{d}{ds} (N \wedge \dot{\gamma}(s)) = k(s) \underbrace{\dot{\gamma}(s) \wedge \gamma(s)}_{=0} + N(s) \wedge \dot{\gamma}(s) \Rightarrow \underline{v}_0 = N(s) \wedge \dot{\gamma}(s) \in T_{\gamma(s)}(S)$$

$$\frac{d}{ds} ((\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \underline{v}_0) = \dot{\gamma}(s) \cdot \underline{v}_0 \equiv 0 \Rightarrow \text{è quantità costante}$$

Quindi $(\gamma(s) - \gamma(s_0)) \cdot \underline{v}_0 = c \Rightarrow$ la curva è piana QED

ES

γ curva su S geodetica piana non retta $\Rightarrow \gamma$ è linea di curvatura

dim

$$\gamma = \gamma(s), \ddot{\gamma}(s) \parallel N(s)$$

Non retta cioè $k(s) \neq 0$

normale principale definita perchè $k(s) \neq 0$

$$\ddot{\gamma}(s) = k(s) \underline{n}(s) \Rightarrow \underline{n}(s) = \pm N(s) \Rightarrow \underline{n}(s) = N(s)$$

scalpo +

$$\text{duo dim du } \frac{dN(s)}{ds} \parallel \dot{\gamma}(s)$$

$$\frac{dN}{ds}(s) = \frac{dn}{ds}(s) = -k(s) \dot{\gamma}(s) + \underbrace{\tau(s)}_{=0} b(s) = -k(s) \dot{\gamma}(s) \quad \text{QED}$$

perchè curva piana

ES

γ retta su superficie $S \Rightarrow$ è sempre una geodetica, in generale non è linea di curvatura

se no $K=0$ lungo la retta e $\exists$ ripete con $K < 0$

ES

Esempio di linea di curvatura piana non geodetica

Superficie di rotazione ci sono paralleli che non sono geodetiche

sono linee di curvatura perchè $f=0$ e $F=0 \Rightarrow$ le direzioni di curvatura sono

meridiani e non paralleli

ES

γ curva su S linea asintotica e geodetica $\Leftrightarrow$ è una porzione di retta

dim

k curvatura di γ

k_g curvatura geodetica

k_n curvatura normale

$k \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma$ retta

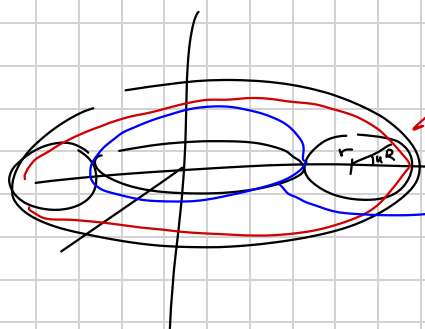
$k_g \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma$ geodetica

$k_n \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma$ linea asintotica

$\Pi(\dot{\gamma})$

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2 \quad \text{la } k_n \text{ è allora sempre } \neq 0$$

ES



parallelo massimo
rotolo II pto $\begin{cases} x = R+r \\ z = 0 \end{cases}$

parallelo minimo
rotolo II pto $\begin{cases} x = R-r \\ z = 0 \end{cases}$

parallelo superiore rotolo $\begin{cases} x = R \\ z = r \end{cases}$

parallelo inferiore rotolo $\begin{cases} x = R \\ z = -r \end{cases}$

$$(x-R)^2 + z^2 = r^2 \quad \text{circonferenza}$$

$$\begin{cases} x = R + r \cos u = R + r \cos \frac{s}{r} \\ z = r \sin u = r \sin \frac{s}{r} \end{cases} \quad \text{per con. length. d'arco della circonferenza}$$

Quali sono geodetiche, quali linee di curvatura e quali asintotiche

Gli unici paralleli geodetici sono i paralleli max e min perché $\dot{\gamma}(s) \parallel \text{asse } z$

Linee di curvatura sono tutti i meridiani e i paralleli $\Rightarrow$ tutte e 4 le curve considerate sono di curvatura

Linee asintotiche:

$$K(s) = - \frac{\ddot{x}(s)}{x(s)} = \frac{\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}}{R + r \cos \frac{s}{r}}$$

$$\uparrow \quad \dot{x}(s) = -\sin \frac{s}{r}$$

$$K(s) > 0 \quad \text{su}$$

$$K(s) < 0 \quad \text{su}$$

nei pti in alto e basso = 0

$K(\xi) \equiv 0$ lungo parabole sup e inferiore

Il meridiano ha curvatura $k = \frac{1}{r}$ e $k_g = 0$ ^{perché è geodetica} $\Rightarrow k_N = \pm \frac{1}{r} = k$ $k_1 = \pm \frac{1}{r}$

lungo il parallelo superiore $k_2 = 0$ perché deve valere $k_1 k_2 = 0$ il parallelo superiore tutti gli ϕ parabolici

$\Rightarrow$ la dirz. del parallelo sup (e inf) è linea asintotica

Per il parallelo sup. $k = \frac{1}{R}$ $k_N = 0 \Rightarrow k_g = \pm \frac{1}{R}$

$$\underline{N} \cdot \underline{n} = 0$$

angolo fra $\underline{N}$ e $\underline{n}$

perché
linea
asintotica

$\Downarrow$
e allora $k_n = k \cos \theta = 0 \Rightarrow$ non so chi è $k \Rightarrow$ non posso trovare k sapendo k_n

DEF POLIGONO CURVILINEO

9/04

Un poligono curvilineo in $\mathbb{R}^2$ è una curva regolare chiusa e semplice

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è a tratti cioè $a < t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < t_N = b$ e $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ è $\mathcal{C}^1$

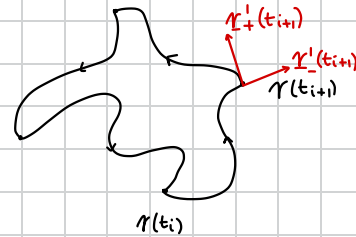
(Non ci devono essere cuspidi)

DEF ANGOLO ESTERNO

Dato un poligono curvilineo γ chiamiamo angolo esterno l'angolo

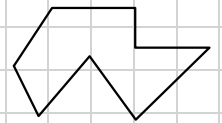
φ_i tra $\gamma'_-(t_i)$ e $\gamma'_+(t_i)$ nel vertice $\gamma(t_i)$; si richiede anche che $\varphi_i \neq \pi$

Per convenzione si prende $\varphi_i \in (-\pi, \pi)$



OSS

Un poligono curvilineo è un poligono se $\underline{t} = \frac{\gamma'|_{[t_i, t_{i+1}]}}{\|\gamma'|_{[t_i, t_{i+1}]}\|}$ è costante



DEF INDICE DI ROTAZIONE

Consideriamo $\gamma = \gamma(s)$ poligono curvilineo con lunghezza d'arco

Definisco $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ data da:
$$\theta(s) = \begin{cases} \text{angolo tra } \gamma'(s) \text{ e l'asse delle } x & \text{se } s \in (t_i, t_{i+1}) \\ \text{angolo tra } \gamma'_+(s) \text{ e l'asse delle } x & \text{se } s = t_i \end{cases}$$

In formule (va scelta una determinazione di tale angolo)

Definiamo $\theta(t_i) = \varphi_i + \lim_{s \rightarrow t_i^-} \theta(s)$ nei pti angolosi e in generale prendiamo $\theta(s) := \theta(t_i) + \int_{t_i}^s \tilde{\kappa}(\bar{s}) d\bar{s}$

per $s \in [t_i, t_{i+1})$ (oss: $\theta(s)$ NON è funzione continua su $[a, b]$)

In questo modo $\theta(t)$ è funzione continua su $[t_i, t_{i+1})$, ben definita perchè l'angolo è

univocamente determinato

(oss: è una generalizzazione dell'indice di rotazione che abbiamo già visto per le curve)

Segue che $\theta(b) - \theta(a) = 2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$ con k INDICE DI ROTAZIONE

OSS

La definizione dell'indice di rotazione può essere data allo stesso modo anche per curve non semplici

TEO DELLE TANGENTI DI HOPF (vedi sezion 5.7 DOCCARMO pag 396)

Se γ è un poligono curvilineo $\Rightarrow k = \pm 1$

OSS

Lo abbiamo già dimostrato per curve regolari $\mathcal{C}^1$

- In generale la dimostrazione consiste nello "smussare gli angoli"



così si trova una curva regolare con lo stesso θ (fuori da un intorno dell'insieme dei vertici)

$\Rightarrow$ se ho lo stesso valore di $\theta \Rightarrow$ ho anche lo stesso indice di rotazione

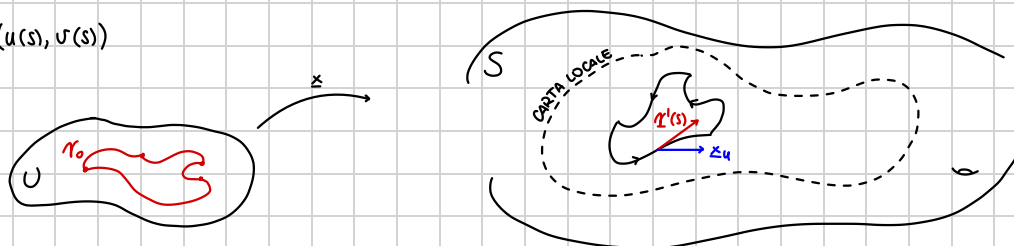
OSS

Diremo che la curva è **ORIENTATA POSITIVAMENTE/NEGATIVAMENTE** se l'indice è rispettivamente $+1$ oppure -1

OSS

Sia γ una curva chiusa regolare a tratti, semplice a valori in una carta locale di una superficie regolare $x: \overset{\text{aperto}}{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; Siano $u=u(s), v=v(s)$ $\mathcal{C}^1$ a tratti con $s \in [a, b]$ parametro d'arco

$$\Rightarrow \gamma(s) = x(u(s), v(s))$$



Definisco $\theta: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ angolo tra $x_u(u(s), v(s))$ e $\gamma'(s) \Rightarrow$ l'indice di rotazione è $\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$

Il tes di Hopf dice che l'indice è ± 1 (cioè vale anche se la curva è su una superficie)

dim (è solo un'idea della dim; la dim completa SULL'ABATE TOVENA) (NO DIM?)

Lavoro su $U \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ considero la curva $s \mapsto (u(s), v(s)) \in U$ che ha come indice

di rotazione nel piano ± 1 perché è semplice

Ho un prodotto scalare tra vettori applicati in $(u(s), v(s))$ dato dalla IFF (però sul piano)

Quindi lavorare sul piano tangente con il prod. scalare non standard ma quello dato

dalla IFF, è come lavorare sulla superficie

come???

$\Rightarrow$ ottengo l'indice di rotazione di γ

Interpolo tra il prodotto scalare standard e quello della IFF e la matrice di

interpolazione è $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\lambda)E & (1-\lambda)F \\ (1-\lambda)F & (1-\lambda)G \end{pmatrix} \quad \lambda \in [0, 1]$ **combinazione convessa**

Otengo un indice di rotazione che dipende in maniera continua da λ $\text{Ind}_\lambda: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{Z}$

Per $\lambda=0$ è l'indice di $\gamma_0 \Rightarrow$ essendo ^(Ind_λ) funzione continua a valori interi $\Rightarrow$ è costante

$$\Rightarrow \text{Ind}_\lambda \gamma = \text{Ind}_\lambda \gamma_0 \quad \text{QED}$$

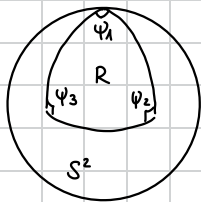
OSS

Consideriamo un Poligono curvilineo su S superficie i cui tratti regolari sono tratti di geodetiche.

Possiamo definire un **TRIANGOLO GEODETICO** che è un poligono curvilineo di 3 lati su una superficie e deve essere bordo di una regione omeomorfa al disco aperto, la

ai chiusura sia omeomorfa al disco chiuso.

ES



Un triangolo geodetico in una sfera la cui somma degli angoli interni è $> \frac{3}{2}\pi$

3 angoli retti

OSS

Definiamo gli **ANGOLI INTERNI** ψ_i tali che $\psi_i + \varphi_i = \pi$ angolo esterno

TEO GAUSS (caso particolare)

Dato un triangolo geodetico su una superficie $\Rightarrow \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \pi + \int_R K d\sigma$ elemento infinitesimo d'area $d\sigma = \sqrt{EG-F^2} du dv$

ES SFERA

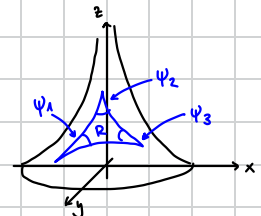
Se la sfera ha raggio $r \Rightarrow K = \frac{1}{r^2} \Rightarrow \int_R K d\sigma = \frac{1}{r^2} |R| = \frac{1}{r^2} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \frac{3}{2}\pi$$

ES PSEUDOSFERA

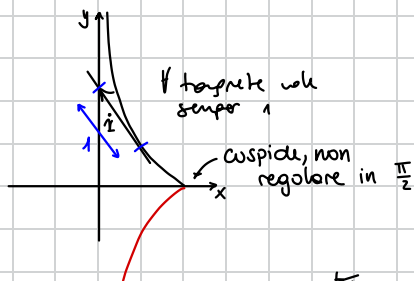
Consideriamo una superficie S t.c. $K \equiv -1$ PSEUDOSFERA

$\Rightarrow$ Per teo $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \pi - \text{Area } R < \pi$



ES

La pseudosfera si ottiene facendo ruotare la Trattrice $\gamma(t) = (\sin t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2})$ $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ $t \in (0, \frac{\pi}{2})$



Ha la proprietà che la lung. del segmento di tangente tra la y e il pto di tangenza è lungo 1

$$\gamma'(t) = (\cos t, -\sin t + \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}) = (\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t}) = (\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t})$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \cos^2 t + \frac{\cos^4 t}{\sin^2 t} = \dots = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \pm \frac{\cos t}{\sin t}$$

$s = \int \|\gamma'(t)\| dt = \dots = \ln \sin t$ lung. d'arco $\Rightarrow$ trovo $t = t(s) \Rightarrow$ sostituisco in $\gamma(t)$ che

diventa $\gamma(s) \Rightarrow \gamma(s) = (e^s, \dots) \Rightarrow \dot{\gamma}(s) = (e^s, \dots)$ $s \in (-\infty, 0)$

$\Rightarrow$ so che $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ e dato che la componente x di $\dot{\gamma}$ coincide con la componente x di γ

$\Rightarrow$ il segmento curvato è proprio $\dot{\gamma}(s) \Rightarrow$ ha lunghezza 1

Consideriamo la pseudosfera $\Rightarrow$ poniamo $s = v$ angolo di rotazione $\Rightarrow K(u, v) = -\frac{(e^s)''}{e^s} = -1$ formula per superfici di rotazione

OSS

Superficie $x: U \xrightarrow{S} \mathbb{R}^3$ dilatazione $x' = \lambda x: U \xrightarrow{S'} \mathbb{R}^3$ $\lambda > 0$ di S' $\Rightarrow K'(u, v) = \frac{1}{\lambda^2} K(u, v)$

dim

$$x'_u = \lambda x_u \quad x'_v = \lambda x_v \Rightarrow E' = \lambda^2 E, F' = \lambda^2 F, G' = \lambda^2 G \Rightarrow I = \lambda^2 I' \quad \text{IFF}$$

$$N' = \frac{\lambda x_u \wedge \lambda x_v}{\|\lambda x_u \wedge \lambda x_v\|} = N \quad \text{FAI} \Rightarrow k'_1 = \frac{1}{\lambda} k_1 \text{ e } k'_2 = \frac{1}{\lambda} k_2 \Rightarrow K'(u,v) = \frac{1}{\lambda^2} K(u,v)$$

13105

TEO GAUSS-BONNET (LOCALE)

$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie parametrizzata con $F=0$. Sia $R \subseteq x(U)$ regione semplice (cioè $\leftarrow$ cioè parametrizzazione ortogonale

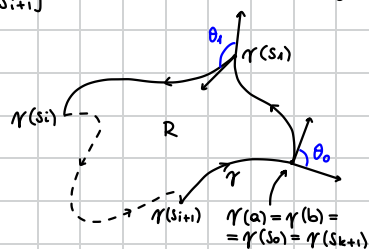
omeomorfa ad un disco chiuso) $\partial R = \gamma([a,b])$ con γ curva chiusa semplice regolare a tratti)

cioè R poligono curvilineo; γ la prendiamo orientata positivamente $\text{tc } \gamma = \gamma(s)$

lunghezza d'arco. Sia $a = s_0 < s_1 < \dots < s_{k+1} = b$ con $\gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}$ $\mathbb{C}^2$ e sia θ_i l'angolo esterno

nel vertice $\gamma(s_i)$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \underbrace{\iint_R K d\sigma}_{\text{"per def"} \iint_{x^{-1}(R)} K(u,v) \sqrt{EG-F^2} du dv} + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi \quad \text{angoli esterni}$$

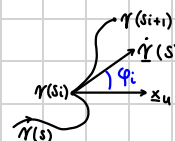


DIM

La curva γ è della forma $\gamma(s) = x(u(s), v(s)) \Rightarrow$ Abbiamo visto una formula per k_g

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u \dot{v} - E_v \dot{u}) + \frac{d\varphi_i}{ds} \quad \text{per } s \in [s_i, s_{i+1}] \text{ con } \varphi_i \text{ che è}$$

l'angolo tra x_u e $\dot{\gamma}(s)$

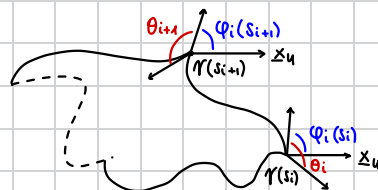


$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \left[\int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u \dot{v} - E_v \dot{u}) ds + \varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i) \right] =$$

$$\left[\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u \dot{v} - E_v \dot{u}) ds \stackrel{\text{GAUSS GREEN}}{=} \iint_{x^{-1}(R)} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v du dv \stackrel{\text{vedi OSS del 23104}}{=} - \iint_{x^{-1}(R)} K \sqrt{EG} du dv \stackrel{\text{elemento d'area con } F=0}{=} - \iint_R K d\sigma \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi \quad \text{Teo di Hopf essendo la curva positivamente orientata}$$

$$\dots = - \iint_R K d\sigma - \sum_{i=0}^k \theta_i + 2\pi \quad \text{OVD}$$



φ definito solo sull'arco con $s \in [s_i, s_{i+1}]$

OSS

(CASO PARTICOLARE)

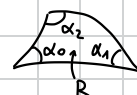
Se $\gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}$ è una geodetica $\Rightarrow k_g \equiv 0 \Rightarrow$ la formula diventa $\iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi$

Quindi γ poligono curvilineo con $k+1$ tratti regolari

Angoli interni $\alpha_i = \pi - \theta_i$ sostituiamo e otteniamo

$$\iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k (\pi - \alpha_i) = 2\pi \Rightarrow \sum_{i=0}^k \alpha_i = (k+1)\pi - \iint_R K d\sigma$$

Per $k=2$ triangolo geodetico $\Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi + \iint_R K d\sigma$



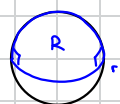
• Se S è una sfera unitaria $\Rightarrow K \equiv 1 \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi + \text{Area}(R)$

• Se S è una pseudosfera $\Rightarrow K \equiv -1 \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi - \text{Area}(R)$

Per $k=1$ si ha un **BIANGOLO**

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \iint_R K d\sigma \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 = \iint_R K d\sigma$$

ES



somma angoli interni $\pi = \int_R K d\sigma = \frac{1}{4} \text{Area}(S) = \frac{1}{4} 4\pi = \pi$

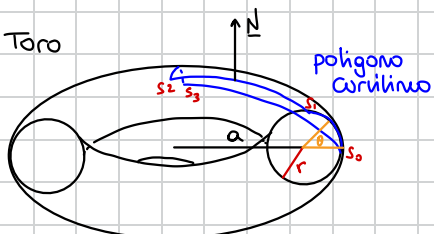
Se la sfera ha raggio $r \Rightarrow K = \frac{1}{r^2} \Rightarrow \pi = \frac{1}{r^2} \text{Area}(R) = \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 \frac{1}{4} = \pi$

ES



somma angoli interni $2\pi = \alpha_0 + \alpha_1 = \int_R K d\sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 2\pi$

ES Toro



Ho un poligono curvilineo con $\alpha_i = \frac{\pi}{2} \quad \forall i = 0, 1, 2, 3$

I meridiani sono geodetiche e anche il parallelismo massimo è una geodetica

Abbiamo già calcolato che la curvatura sul parallelismo massimo è $k_g = -\frac{1}{a}$

dipende dalla param in particolare dal verso del vettore normale

Calcoliamo $\int_{s_1}^{s_2} k_g(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} -\frac{1}{a} ds = -\frac{1}{a} \frac{\pi}{2} a = -\frac{\pi}{2}$ su tutti gli altri tratti $k_g \equiv 0$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^3 \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = -\frac{\pi}{2}$ " " perché il poligono è percorso in senso orario

Parametrizzo ora la circonferenza che abbiamo fatto ruotare $\Rightarrow$ l'ascisse è

$x(s) = a + r \cos \theta = a + r \cos \frac{s}{r}$ con $s \in [s_0, s_1] \Rightarrow$ Abbiamo visto che la curvatura gauss.

di una superficie di rotazione è $K = -\frac{\ddot{x}}{x} = \frac{\cos \theta}{r(a + r \cos \theta)}$

perché $F=0$

Considero ora $d\sigma = \sqrt{EG} du dv$ e il cambio di variabili $u = \theta, v = 0$

perché sto considerando il meridiano dove $s \in [s_0, s_1]$

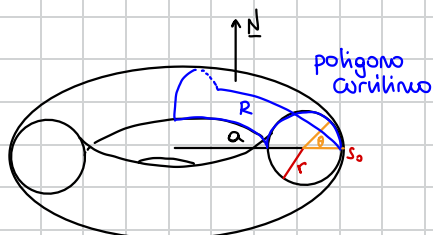
IFF: $E = x^2, G = 1, F = 0 \Rightarrow \int K d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{v}{r}}{r} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta du d\theta = \frac{\pi}{2} \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

Invece $\sum \alpha_i = 2\pi \Rightarrow \sum \theta_i = \sum \pi - \alpha_i = 4\pi - 2\pi = 2\pi$

Quindi $\sum \int k_g + \int K + \sum \theta_i = 2\pi$

14105

ES



parametrizzazione del toro $R = \{ ([0, \frac{\pi}{2}] \times [0, r\pi]) \}$

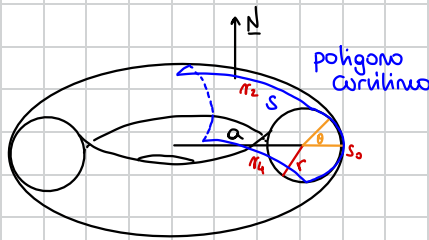
$k_g \equiv$ lungo la curva perché tutti archi di geodetiche

$\alpha_i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 2\pi$

$\Rightarrow$ Per Gauss-Bonnet $\int_R K d\sigma = 0$

$\int_R K d\sigma = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos \theta d\theta = 0$

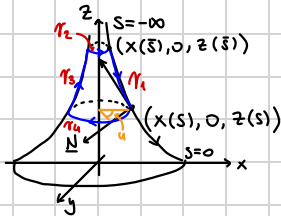
ES



$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ angolo di rotazione attorno z (oggi, ieri lo avevamo chiamato v)

$$\sum \alpha_i = 2\pi \Rightarrow \underbrace{\int_{\pi} K d\sigma}_{\pi} + \underbrace{\int_{\gamma_2} k_g(s) ds}_{-\pi/2} + \underbrace{\int_{\gamma_4} k_g(s) ds}_{-\pi/2} + 2\pi = 2\pi$$

ES Pseudosfera



$x(s) = e^s \quad s \in (-\infty, 0)$ sappiamo che $\dot{x}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1 \Rightarrow \dot{z}(s) = \sqrt{1 - e^{2s}}$ $\dot{x}(s)^2 = e^{2s}$

Abbiamo calcolato $K = -1$

$N = (\dot{z}(s), 0, -\dot{x}(s)) = x_u \wedge x_v$ (ha già norma 1)

$x_u = (0, x(s), 0) \quad x_v = (\dot{x}(s), 0, \dot{z}(s)) \quad \dot{z} < 0 \quad \dot{x} < 0$

$E = x^2(s) \quad F = 0 \quad G = 1 \quad e = x(s)\dot{z}(s) \quad f = 0 \quad g = \dot{x}(s)\dot{z}(s) - \ddot{x}(s)\dot{z}(s)$

Curvature principali $k_1 = \frac{e}{E} = \frac{\dot{z}(s)}{x(s)} = \frac{\sqrt{1 - e^{2s}}}{e^s} \leftarrow$ (paralubo) $k_2 = \frac{g}{G} = \frac{K}{k_1} = -\frac{1}{k_1}$

$R = x([0, \pi] \times [\bar{s}, s])$

$\int K d\sigma = -\text{Area } R = -\int_0^\pi \int_{\bar{s}}^s x(s) ds du = -\pi e^s \Big|_{\bar{s}}^s = -\pi (e^{s_1} - e^{s_0})$ s=s_1, \bar{s}=s_0

$\sum \alpha_i = 2\pi = \sum \theta_i$ angoli interni angoli esterni

Calcoliamo ora la Curvatura geodetica in direzione del paralubo

$k_N = k_1 \quad k = \frac{1}{x(s)} = \frac{1}{e^s} \Rightarrow k_g^2 = k^2 - k_N^2 = \dots = 1$ curvatura del paralubo raggio di curvatura

Quindi $\int_0^{\pi e^s} k_g(t) dt = \pi e^s$ raggio param. d'arco del paralubo t = ux(s) = ue^s Il contributo globale di k_g è $\pi e^{s_1} - \pi e^{s_0}$

(perchè si deve annullare con $\int K d\sigma$)

Osserviamo inoltre che se $s_1 \rightarrow 0$ e $s_0 \rightarrow -\infty \Rightarrow \sum \int k_g \rightarrow \pi$ e $\text{Area } R \rightarrow \pi$

OSS

Sia la superficie $x = x(u, v)$ e considero il cambio di coordinate $\bar{u} = -u \quad \bar{v} = v$

$x_{\bar{u}} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} = -x_u \quad x_{\bar{v}} = x_v$

$\bar{E}(\bar{u}, \bar{v}) = x_{\bar{u}} \cdot x_{\bar{u}} = E(-u, v) ; \quad \bar{F}(\bar{u}, \bar{v}) = x_{\bar{u}} \cdot x_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = -x_u \cdot x_v(\bar{u}, \bar{v}) = -F(\bar{u}, \bar{v}) = -F(-u, v)$

$\bar{G}(\bar{u}, \bar{v}) = x_{\bar{v}} \cdot x_{\bar{v}}(\bar{u}, \bar{v}) = G(-u, v)$

$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} \quad \bar{N}(\bar{u}, \bar{v}) = -N(-u, v) \Rightarrow N$ cambia verso

$x_{\bar{u}\bar{u}} = \frac{\partial(-x_u)}{\partial \bar{u}} = x_{uu} \quad x_{\bar{v}\bar{v}} = x_{vv} \quad x_{\bar{u}\bar{v}} = \frac{\partial(-x_u)}{\partial v} = -x_{uv}$

$\bar{e} = \bar{N} \cdot x_{\bar{u}\bar{u}} = -e \quad \bar{f} = \bar{N} \cdot x_{\bar{u}\bar{v}} = f \quad \bar{g} = \bar{N} \cdot x_{\bar{v}\bar{v}} = -g$

$K = \frac{\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = K$

- $dN(u_1) = k_1 u_1 \Rightarrow d\bar{N}(u_1) = -dN(u_1) = -k_1 u_1 \Rightarrow \bar{k}_1 = -k_1$
 $dN(u_2) = k_2 u_2 \Rightarrow d\bar{N}(u_2) = -dN(u_2) = -k_2 u_2 \Rightarrow \bar{k}_2 = -k_2$
 $\Rightarrow \bar{H} = \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{2} = \frac{-k_1 - k_2}{2} = -H$
- C'è un'isometria tra x e $\bar{x}$ data dal cambio di coordinate $\begin{cases} \bar{u} = -u \\ \bar{v} = v \end{cases}$
- $\bar{k}_N = -k_N$; $\bar{k}_g = -k_g$

16/05

DEF TRIANGOLAZIONI DI SUPERFICI REGOLARI

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regolare, sia T_i un triangolo curvilineo (bordo di una regione semplice)

$T_i \subseteq S \quad \forall i$. Una triangolazione è un insieme di triangoli t_c

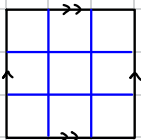
- $S = \bigcup T_i$
- $\forall i \neq j \quad T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{vertice comune} \\ \text{lato comune} \end{cases}$

DEF TASSELLAZIONE

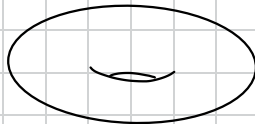
Sia P_i poligono curvilineo $P_i \subseteq S$. Una tassellazione di una superficie S è un insieme di poligoni curvilinei regolari t_c

- $S = \bigcup P_i$
- $\forall i \neq j \quad P_i \cap P_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{vertice comune} \\ \text{lato comune} \end{cases}$

ES



Toro



Tassellazione in 9 quadrilateri curvilinei

TEO (DIM ABATE TOVENA)

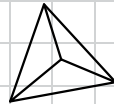
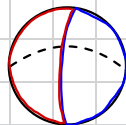
S superficie compatta $\Rightarrow \exists$ una triangolazione finita di S ($S = \bigcup_{i=1}^k T_i$)

DEF CARATTERISTICA DI EULERO DI UNA TRIANGOLAZIONE (DI UNA TASSELLAZIONE)

La caratteristica di Eulero è $\chi = \# \text{triangoli} - \# \text{lati} + \# \text{vertici}$
 oppure di tasselli

ES

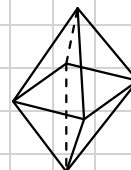
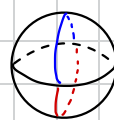
Sfera $\cong$ Tetraedro



$$\begin{cases} 4 \text{ triangoli} \\ 6 \text{ lati} \\ 4 \text{ vertici} \end{cases} \Rightarrow \chi = 2$$

ES

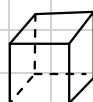
ottaedro (altra triangolazione della sfera)



$$\begin{cases} 8 \text{ triangoli} \\ 12 \text{ lati} \\ 6 \text{ vertici} \end{cases} \Rightarrow \chi = 2$$

ES

Tassellazione della sfera

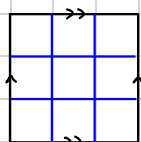


$$\begin{cases} 6 \text{ facce} \\ 8 \text{ vertici} \\ 12 \text{ lati} \end{cases} \Rightarrow \chi = 2$$

TEO EULERO

Per ogni poliedro convesso $\chi = 2$

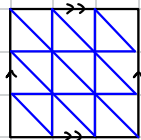
ES



Toro (NON è convesso)
Tasselazione

$$\begin{cases} 9 \text{ tasselli} \\ 18 \text{ lati} \\ 9 \text{ vertici} \end{cases} \Rightarrow \chi = 0$$

ES



$$\begin{cases} 18 \text{ triangoli} \\ 27 \text{ lati} \\ 9 \text{ vertici} \end{cases} \Rightarrow \chi = 0$$

TEO

Data una superficie compatta le caratteristiche di eulero di ogni tassellazione (triangolazione) coincidono

DEF CARATTERISTICA DI UNA SUPERFICIE

Grazie al teo precedente possiamo definire $\chi(S) \in \mathbb{Z}$

OSS

$\chi(S)$ dipende solo da S a meno di omeomorfismo cioè $S \cong S' \Rightarrow \chi(S) = \chi(S')$

OSS

Consideriamo superfici orientabili compatte connessi. A meno di omeomorfismo sono:

Sia S_g superficie con g buchi ^{genere della superficie}

$$\begin{array}{lll} S_0 \text{ (} S^2 \text{)} & \text{Diagram of a sphere} & \chi(S_0) = 2 \\ S_1 \text{ (} S^1 \times S^1 \text{)} & \text{Diagram of a torus} & \chi(S_1) = 0 \\ S_2 & \text{Diagram of a genus 2 surface} & \chi(S_2)^* = -2 \\ \vdots & & \\ S_g & \text{Diagram of a genus g surface with g holes labeled} & \chi(S_g) = 2 - 2g \end{array}$$

dim *



T_i ha F_i facce; E_i lati; V_i vertici $\Rightarrow$ la superficie

complessiva avrà $F_1 + F_2 - 2$ facce; $E_1 + E_2 - 3$ lati; $V_1 + V_2 - 3$ vertici

$$\Rightarrow \chi_{\text{tot}} = (F_1 + F_2 - 2) - (E_1 + E_2 - 3) + (V_1 + V_2 - 3) = \underbrace{\chi(T_1)}_{=0} + \underbrace{\chi(T_2)}_{=0} - 2 = -2 \quad \text{CVD}$$

dim **



T_1 ha un buco

T_2 ha $g-1$ buchi

Si dimostra come * per induzione
(vedi parte rossa in *)

TEO GAUSS-BONNET GLOBALE

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientata compatta (con una tassellazione $\{P_i\}$)

ha senso fare l'int perché S compatta

$$\Rightarrow \iint_S K d\sigma = 2\pi \chi(S)$$

OSS

$\iint_S K d\sigma$ dipende solo dalla metrica (IFF); $\chi(S)$ dipende solo dalla topologia

OSS

Il teo è analogo al teorema delle curve $\int_{\gamma} \tilde{\kappa}(s) ds = 2\pi \text{Ind} \gamma$ con γ curva chiusa

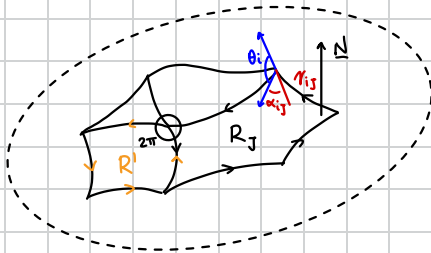
DIM

Considero una tassellazione $\{P_i\}$ in modo che ogni tassello sta in una

carta locale e posso applicare Gauss Bonnet locale al tassello

Osservo che GB locale non dipende dalla parametrizzazione $\Rightarrow$ Supponiamo che

localmente esiste una parametrizzazione ortogonale (dobbiamo ancora dimostrarlo)



orientazione positiva del bordo

Le orientazioni del lato comune a 2 tasselli sono opposte

Applichiamo GB locale ad ogni tassello

θ_i angolo esterno $\Rightarrow \alpha_i = \pi - \theta_i$ angolo interno

Sul tassello R_j con $\partial R_j = \cup \gamma_{ij}$ con γ_i lati che sono curve regolari

$$\iint_{R_j} K d\sigma + \sum_i \int_{\gamma_{ij}} k_g(s) ds + \sum \theta_{ij} = 2\pi$$

Somma su tutti i tasselli $R_j \in S$

$$\sum_j \iint_{R_j} K d\sigma = \iint_S K d\sigma$$

$$\sum_j \sum_i \int_{\gamma_{ij}} k_g(s) ds = 0 \quad \text{si eliminano 2 a 2 perché quando cambio tassello il lato}$$

comune cambia orientazione $\Rightarrow k_g$ cambia segno

$$\sum_j \sum_i \theta_{ij} = \sum_j \sum_i (\pi - \alpha_{ij}) = \sum_j \pi - \sum_{i,j} \alpha_{ij} = 2\pi E - 2\pi V$$

$F = \# \text{Tasselli}$

$$\sum_j 2\pi = 2\pi F$$

$E = \# \text{lati} \quad V = \# \text{vertici}$

$$\text{Uniamo tutto e otteniamo } \iint_S K d\sigma + 2\pi E - 2\pi V = 2\pi F \Rightarrow \iint_S K d\sigma = 2\pi (F - E + V) = 2\pi \chi(S)$$

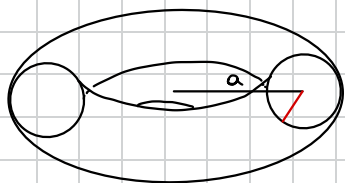
QED

ES

Se S omeomorfa ad una sfera $\Rightarrow \iint_S K d\sigma = 4\pi$

Se $S =$ sfera di raggio $r \Rightarrow K = \frac{1}{r^2} \Rightarrow \iint_S \frac{1}{r^2} d\sigma = \frac{1}{r^2} \text{Area}(S) = \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi$

ES



$$S = \text{Toro} \quad K = -\frac{(\cos \frac{s}{r})''}{R(u + r \cos \frac{s}{r})}$$

$$d\sigma = \sqrt{E} du dv = (a + r \cos \frac{s}{r}) du dv$$

$$\iint_S K d\sigma = - \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} \frac{\cos \frac{u}{r}}{r} du = \dots = 0 \quad \text{si ha anche } \chi(s) = 0$$

Se S è una superficie omeomorfa al toro $\Rightarrow \iint_S K d\sigma = 0$

LEMMA

Se S è superficie compatta $\Rightarrow S$ ha almeno un pto ellittico

DIM

Trovo una sfera circoscritta a S' di raggio r minimo $\Rightarrow$ Se $P \in S \cap S'$

$\Rightarrow K(P) \geq \frac{1}{r^2} > 0 \Rightarrow P$ è pto ellittico QED



PROP

Se $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie compatta e orientata in $\mathbb{R}^3$ e K è costante $\Rightarrow S$ è omeomorfa ad una sfera

DIM

K costante $\Rightarrow$ per lemma $\exists p \in S$ pto ellittico $\Rightarrow K(p) > 0 \Rightarrow$ essendo K costante

$K(q) > 0 \quad \forall q \in S$

$$\left. \begin{array}{l} \iint_S K d\sigma = 2\pi \chi(S) \\ \parallel \leftarrow K \text{ costante} \\ K \text{Area}(S) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{l'unica } \chi(S) > 0 \text{ è } \chi(S) = 2 \Rightarrow S \cong \text{Sfera}$$

χ della sfera

OSS

Se $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie compatta e orientata in $\mathbb{R}^3$ e $K(p) > 0 \quad \forall p \in S \Rightarrow S \cong \text{Sfera}$

(si dimostra allo stesso modo della dim precedente)

20/05

DEF REGIONE REGOLARE

Data $S \subseteq \mathbb{R}^3$, una regione regolare $R \subseteq S$ è un sottospazio compatto, connesso tale che

$\bar{R} = \bar{R}$ e ∂R è unione di un numero finito di poligoni curvilinei disgiunti tra loro

R si chiama anche superficie con bordo

ES



TEO (NO DIM)

Data una regione regolare $R \subseteq S$ esiste una triangolazione $\{T_i\}$ di S t.c. (tassellazione)

$$R = \bigcup_{j=1}^k T_{i_j} \quad \text{cioè } R \text{ è unione finita di triangoli}$$

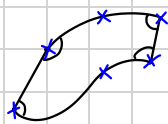
Inoltre i poligoni curvilinei di ∂R saranno unione di un "numero finito di lati" $= l_b$ e
 conteranno un numero uguale di vertici della triangolazione $v_b = l_b$
lati del bordo
numero di vertici

OSS

Bisogna stare attenti a differenziare i vertici del bordo e i vertici della triangolazione sul bordo. Sia $v_b = \# \text{ vertici del poligono curvilineo di bordo}$

I vertici del poligono curvilineo sono vertici della triangolazione (non vale il viceversa)

ES



Quelli segnati con gli angoli sono i vertici del poligono di bordo

Quelli con la x sono i vertici della triangolazione sul bordo

Osserviamo che $v_b = l_b = 6$. Essendo $v_b = \# \text{ vertici del poligono curvilineo di bordo}$ cambiamo nome e scriviamo $v_b = v_{bc}$

Chiamiamo invece $v_{bt} = \# \text{ vertici di bordo che non sono vertici del poligono curvilineo}$

Nell'esempio abbiamo $v_{bc} = 4$ e $v_{bt} = 2$

DEF CARATTERISTICA DI EULERO DI UNA REGIONE

Data una regione regolare $R \subseteq S$ triangolata (S superficie) definiamo

$$\chi(R) = F_R - E_R + V_R \in \mathbb{Z} \quad \text{dove } F_R = \# \text{ triangoli in } R, E_R = \# \text{ lati in } R, V_R = \# \text{ vertici in } R$$

della triangolazione

TEO (NO DIM)

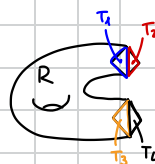
$\chi(R)$ non dipende dalla triangolazione (quindi $\chi(R)$ è ben definito)

ES



$\chi(R) = ?$

Consideriamo la nuova superficie



$R \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$

$R \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cong S^1 \times S^1$ essendo χ invariante topologica (cioè risp. omeomorfismi)

$$\chi(R \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4) = \chi(S^1 \times S^1) = 0$$

$\chi(R) + 4 - 2$
facce aggiunte a R
lati aggiunti a R

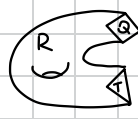
(non abbiamo aggiunto vertici)

$$\chi(R) = F_R - E_R + V_R \quad \text{e} \quad V = V_R \quad F = F_R + 4 \quad E = E_R - 2$$

OSS

Tutto questo si generalizza alle tassellazioni

ES



$$R \cup Q \cup T \cong S^1 \times S^1 \Rightarrow \chi(R \cup Q \cup T) = 0 \\ = \chi(R) + 2 \quad \Bigg\} \Rightarrow \chi(R) = -2$$

Con questi 2 esempi abbiamo verificato il teorema

OSS

SUPERFICI DI GENERE g CON k COMPONENTI DI BORDO

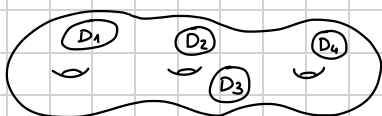
Se S è una superficie orientata e R è una regione regolare

ciambella con g buchi

$$\Rightarrow R \cong S_g - \bigcup_{i=1}^k D_i \cong S_{g,k} \text{ con } D_i \text{ omeomorfo ad un disco aperto e}$$

$\bar{D}_i$ omeomorfi a dischi chiusi disgiunti

ES



$$g=3 \\ k=4$$

$$\chi(S_{g,k}) = \chi(S_g) - k = 2 - 2g - k$$

usando lo stesso trucco degli es precedenti

$$S_g = S_{g,k} \cup \bigcup_{i=1}^k \bar{D}_i \text{ immagino i dischi come tasselli } \chi(D_i) = 1$$

OSS

Si può vedere che $S_{g,k} \cong S_{g',k'} \Leftrightarrow g=g'$ e $k=k'$

DIM

$\Leftarrow$ ovvio perché una triangolazione di $S_{g,k}$ mi dà una triangolazione ^{di $S_{g',k'}$} con stesso numero di vertici, facce e lati

$$\Rightarrow S_{g,k} \cong S_{g',k'} \Rightarrow \partial S_{g,k} \cong \partial S_{g',k'} \quad \left. \begin{array}{l} \partial S_{g,k} \text{ ha } k \text{ componenti connesse} \\ \partial S_{g',k'} \text{ ha } k' \text{ componenti connesse} \end{array} \right\} \Rightarrow k=k'$$

$$S_{g,k} \cong S_{g',k'} \Rightarrow \chi(S_{g,k}) = \chi(S_{g',k'}) \Rightarrow \cancel{2} - 2g - \cancel{k} = \cancel{2} - 2g' - \cancel{k'} \Rightarrow g=g' \quad \text{CVD}$$

ES

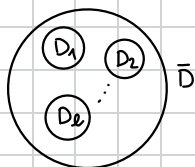
R regione regolare semplice

*cioè $\cong$ disco chiuso e
l'interno $\cong$ disco aperto*

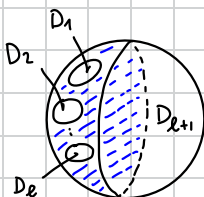


$$R \cong \text{Disco} \quad g=0 \quad k=1 \Rightarrow \chi(R)=1$$

ES



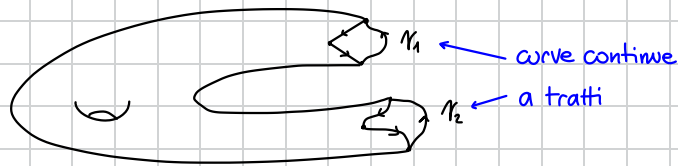
$$R = \bar{D} - \bigcup_{i=1}^l D_i \cong S_{0,l+1}$$



$$\Rightarrow \chi(R) = 1 - l$$

TEO GAUSS-BONNET PER REGIONI

Sia S una superficie orientata; sia $R \subseteq S$ regione regolare il cui bordo ∂R è l'unione disgiunta di l poligoni curvilinei orientati positivamente e parametrizzati per lunghezza d'arco



Siano γ_i le parametrizzazioni dei poligoni curvilinei $i=1 \dots s$

Siano θ_{ij} gli angoli esterni nei vertici di γ_i

$$\Rightarrow \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^l \int_{\gamma_i} k_g(s) ds + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{J_i} \theta_{ij} = 2\pi \chi(R) \quad \text{dove } J_i = \# \text{ vertici del poligono curvilineo } \text{Im}(\gamma_i)$$

OSS

- Caso locale: R omeomorfo ad un disco chiuso $\Rightarrow \chi(R)=1$, $l=1$
- Caso globale: $l=0$

DIM (VEDI SUL DO CARMO)

Considero una triangolazione (o tassellazione) di R $\{T_u\}_u$ con nulle H_p

Suppongo che ogni triangolo (o tassello) contenuto in una carta locale

Suppongo $F=0$

Applico GB locale ad ogni triangolo (o tassello) e sommo su tutti i triangoli

(che sono indicizzati da u)

$$\sum_u \iint_{T_u} K d\sigma = \iint_R K d\sigma$$

$$\bullet \sum_u \int_{\partial T_u} k_g(s) ds = \sum_i \int_{\gamma_i} k_g(s) ds \quad (\text{si eliminano 2 a 2 tutti i contributi tranne quelli sul bordo che sono indicizzati da } i)$$

$$\bullet \sum_j \sum_u \theta_{uj} = \sum_j \sum_u (\pi - \alpha_{uj})$$

angoli interni
tassello vertici sul tassello

(Osserviamo che i θ_{uj} sono associati ai vertici della triangolazione e ai loro triangoli o tasselli)



Sia $V = \#$ vertici della triangolazione di $R = V_i + V_{bc} = V_i + V_{bc} + V_{bt}$

vertici sul bordo gli altri vertici della triangolazione sul bordo che non sono vertici della curva γ_i
vertici interni

$\sum_{u,j} \alpha_{uj}$ dipende dal tipo di vertice dove α_{uj} è angolo interno infatti



$$1) \text{ se il vertice è interno } \Rightarrow \sum_{u,j} \alpha_{u,j} = 2\pi V_i$$

2) se il vertice è sul bordo ed è sia vertice della triangolazione che

$$\text{vertice della curva di bordo } \gamma_i \Rightarrow \sum_{u,j} \alpha_{u,j} = \sum_j (\pi - \theta_{ij})$$

3) Se il vertice è sul bordo, è vertice della triangolazione ma non

vertice della curva di bordo $\Rightarrow \sum_{u,j} \alpha_{uj} = \pi v_{bt}$

Quindi $\sum_j \sum_u \theta_{uj} = \sum_j \sum_u (\pi - \alpha_{uj}) = \sum_{j,u} \pi - \sum_{j,u} \alpha_{uj} = \sum_{j,u} \pi - 2\pi v_i - \sum_j (\pi - \theta_{ij}) - \pi v_{bt} = \dots$

* tutti gli indici u, j indicizzano il totale numero di volte che vengono percorsi i lati

** Inoltre sappiamo che $l = \# \text{lati} = \overset{\text{lati interni della triangolazione}}{l_i} + \overset{\text{lati sul bordo della triangolazione}}{l_b}$

Quindi $\sum_{u,j} \pi = 2\pi l_i + \pi l_b$

perché i lati interni vengono percorsi 2 volte ciascuno

$-\pi v_b = -\pi l_b$

$\dots = 2\pi l_i + \pi l_b - 2\pi v_i - \pi v_{bt} - \sum_{i,j} (\pi - \theta_{ij}) = 2\pi l_i + \pi l_b - 2\pi v_i - \pi v_{bt} - \sum_{i,j} \pi + \sum_{i,j} \theta_{ij} =$

stesso ragionamento di prima ma sui lati di bordo (usando che $l_b = v_b$)

$= 2\pi l_i + \pi l_b - 2\pi v_i - \pi v_{bt} - (-\pi l_b + \pi v_b + \pi v_{bc}) + \sum_{i,j} \theta_{ij}$

$= 2\pi l_i + \underline{2\pi l_b} - \underline{\pi v_b} - 2\pi v_i - \pi v_{bt} - \underline{\pi v_{bc}} + \sum_{i,j} \theta_{ij} = \overset{\# \text{tot. lati}}{2\pi E} - \overset{\# \text{tot. vertici}}{2\pi V} + \sum_{i,j} \theta_{ij}$

e ora da dove esce F?

F viene perché sommo l'eq. su tutti i triangoli

ES 1)

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie compatta di curvatura $K > 0 \Rightarrow S$ è omeomorfa ad una sfera

Svolg

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi \chi(S) \stackrel{K>0}{>0} \Rightarrow \chi(S) = 2 \Rightarrow S \text{ è omeomorfa ad una sfera}$$

(non è detto che sia necessariamente una sfera, per esempio un'elissoide

$$\text{del tipo } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1)$$

OSS 1) (Già visto)

Se K costante $> 0 \Rightarrow S$ è una sfera di raggio $\frac{1}{\sqrt{K}}$

OSS 2)

S superficie con $K \leq 0 \Rightarrow$ non esiste una regione semplice il cui bordo è una geodetica γ

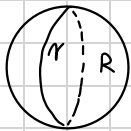
DIM

Se PA $\exists \gamma$ come nell'Hp $\Rightarrow k_g = 0$ lungo la geodetica $K \leq 0 \quad \chi(R) = 1$

$$\begin{array}{c} \text{GB} \\ 0 \geq \iint_R K d\sigma \stackrel{K \leq 0}{=} 2\pi > 0 \quad \text{ASSURDO} \end{array}$$

ES 2.1)

Se $K(x) > 0$ per qualche $x \in S \Rightarrow R$ come nell'oss precedente può esistere, per esempio la sfera con il cerchio massimo (geodetica)



$$k_g = 0 \quad K = \frac{1}{R^2}$$

$$\iint_R \frac{1}{R^2} d\sigma = \frac{1}{R^2} \text{Area } R = \frac{2\pi R^2}{R^2} = 2\pi = \chi(R)$$

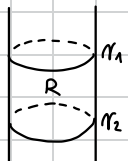
Nell'esempio della sfera si vede che ci sono ∞ geodetiche chiuse

ES 2.2)

Se $K = 0$ prendiamo γ geodetica chiusa (cioè curva chiusa semplice)

(il piano non va bene perché non ha geodetiche chiuse) prendiamo il cilindro

I paralleli sono geodetiche chiuse e non sono il bordo di regioni semplici



$$\chi(R) = 0 \quad k_g = 0 \text{ lungo } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \quad K \equiv 0$$

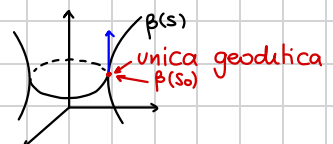
$$\sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} k_g ds = 0 \Rightarrow \text{torna il teorema di GB}$$

OSS 3)

Se $K < 0$ e se $S \cong \text{Cilindro} \Rightarrow$ esiste al più una geodetica chiusa

ES 3.1) superficie di rotazione

Ruotiamo la curva $\beta(s) = (x(s), 0, z(s)) \quad x(s) > 0$

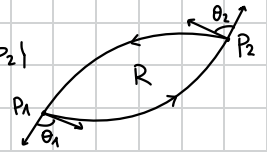


$$K(s) = -\frac{\ddot{x}(s)}{x(s)} < 0 \Rightarrow \ddot{x}(s) > 0 \Rightarrow \dot{x} \text{ crescente} \Rightarrow x(s) = 0 \text{ al più per un valore } s=s_0$$

$\Rightarrow$ Si ha che $\dot{p}(s) = (\dot{x}(s), 0, \dot{z}(s))$ è verticale in $s_0 \Rightarrow \exists!$ parallelo che è una geodetica

OSS 4)

Se $K \leq 0$ non è possibile avere R regione semplice t.c. $\partial R = \text{Im} \gamma_1 \cup \text{Im} \gamma_2$ con γ_1, γ_2 archi di geodetiche (quindi curve regolari) "2-Angolo" $\text{Im} \gamma_1 \cap \text{Im} \gamma_2 = \{P_1, P_2\}$



DIM

Suppongo P.A. che la tesi sia vera allora si ha che

$$k_g = 0 \text{ lungo } \gamma_1 \text{ e } \gamma_2 \Rightarrow \int_{\gamma_1} k_g ds + \int_{\gamma_2} k_g ds = 0 + 0 = 0$$

$$|\theta_1| < \pi, |\theta_2| < \pi$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_i} k_g ds}_{=0} + \iint_R K d\sigma + \underbrace{\theta_1}_{\hat{=}} + \underbrace{\theta_2}_{\hat{=}} \stackrel{GG}{=} 2\pi \Rightarrow \text{dove essere } \iint_R K d\sigma \geq 0 \Rightarrow K \geq 0 \text{ ASSURDO}$$

WD

ES 4)

Per esempio nel piano è ovvio



• Nel cilindro

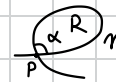


• Nella sfera è invece possibile



OSS 5)

Se $K \leq 0$ è impossibile avere una geodetica del tipo



"1-Angolo"

DIM

$$\underbrace{\iint_R K d\sigma}_{\leq 0} + \theta_1 = 2\pi \quad |\theta_1| < \pi \text{ ASSURDO} \quad \text{WD}$$

OSS 6)

n -angoli ($n \geq 3$) esistono anche se $K \leq 0$

ES 6)

$$\text{Un "3-angolo"} \quad \iint_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi \quad \theta_i = \pi - \alpha_i \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_R K d\sigma \quad \text{non ci sono contraddizioni}$$

DIM oss 3)

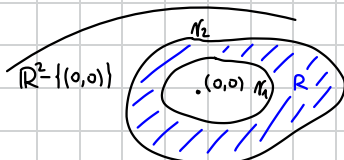
"Se S è omeomorfa ad un cilindro $K < 0 \Rightarrow \exists$ al più una geodetica chiusa semplice"

• Per il cilindro $K = 0$ ok

• $K < 0 \quad S \cong \text{Cilindro} \cong \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Suppongo P.A. che ci siano γ_1 e γ_2 geodetiche chiuse disgiunte $\Rightarrow$ l'origine sta nella

regione limitata da γ_1 e γ_2 (altrimenti verrebbe contraddetta l'osservazione 2)



Supponendo che $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ (i loro supporti)

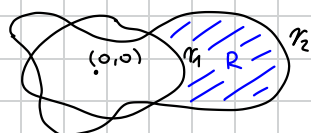
TEO DI JORDAN (NO DIM)

Data una curva γ chiusa semplice piana $\Rightarrow \mathbb{R}^2 - \text{Im} \gamma$ ha 2 componenti connesse di cui una limitata e l'altra illimitata

Inoltre quella limitata $\cong$ ad un disco aperto la cui chiusura $\cong$ ad un disco chiuso

Quindi $\chi(R) = 0$ ASSURDO perché avremmo che $\iint_R K d\sigma = 0$ ok

Se γ_1 e γ_2 si incontrano avremmo una situazione del tipo



Regioni semplici tra 2 pezzi di geodetica

(biangolo su una superficie con $K < 0$) ASSURDO

WD

ES 3.2) Pseudosfera $K = -1$

Non ha paralleli geodetiche e non ha neanche geodetiche chiuse

OSS $\Rightarrow$

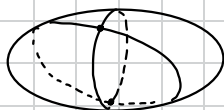
$K > 0$, γ_1, γ_2 geodetiche chiuse su S superficie compatta $\Rightarrow \gamma_1, \gamma_2$ si incontrano

DIM

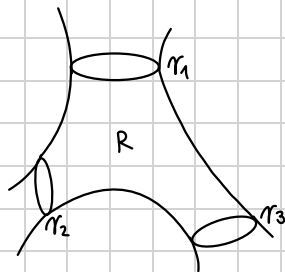
$S \cong$ Sfera per OSS 1. Se PA γ_1 e γ_2 non si incontrassero $\Rightarrow \exists R \subseteq S$ regione $R \cong$ cilindro $S^1 \times [0, 1]$

$\Rightarrow \chi(R) = 0$ $\partial R = \text{Im} \gamma_1 \cup \text{Im} \gamma_2 \Rightarrow$ Per GB $\iint_R K d\sigma = 2\pi \chi(R) = 0$ ASSURDO WD

ES 7.1) Elissoide



ES 7.2)



sfera con 3 buchi

$$\chi(R) = -1 \quad K < 0 \quad \partial R = \bigcup_{i=1}^3 \text{Im} \gamma_i$$

$\iint_R K d\sigma = 2\pi \chi(R) = -2\pi \Rightarrow$ è possibile avere una situazione del genere

ES 7.3)

Consideriamo una superficie con $K \equiv -1$ detta **SUPERFICIE IPERBOLICA**

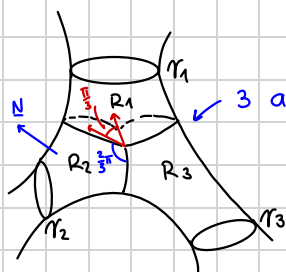
$$\Rightarrow \iint_R K d\sigma = -\text{Area} R = -2\pi \Rightarrow \text{Area} R = 2\pi$$

Supponiamo $\text{Area} R_i = \frac{2\pi}{3}$ $\chi(R_i) = 0$

$$\iint_{R_2} K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \chi(R_i)$$

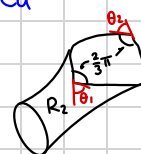
$\underbrace{-\frac{2}{3}\pi}_{\text{Area } R_2} + \underbrace{\frac{2}{3}\pi}_{\theta_1} + \underbrace{\frac{2}{3}\pi}_{\theta_2}$

ok

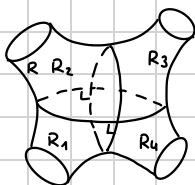


3 archi di geodetica

$$\theta_i = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$



ES 7.4)



$$K \equiv -1$$

$$\iint_R K d\sigma = -\text{Area } R$$

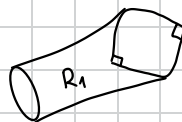
"

$$2\pi \chi(R) = -2 \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \text{Area } R = 4\pi$$

$$\text{Area } R_i = \frac{\text{Area } R}{4} = \pi$$

$$\text{GB su } R_1 \quad \iint_{R_1} K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 0 = 2\pi \chi(R_1) \quad \text{OK}$$



23/05

OSS

S superficie $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ carta locale ortogonale (cioè $F=0$)

Sia $R \subseteq x(U)$ regione semplice e supponiamo che $\partial R = \text{Im } \gamma$ con $\gamma: [0, l] \rightarrow S$ curva

(anch'è regolare a tratti)

chiusa regolare semplice parametrizzata per lunghezze d'arco

Considero il trasporto parallelo di $w_0 \in T_{\gamma(0)}(S)$ t.c. $\|w_0\|=1$

$\Rightarrow$ Ottengo una funzione $w: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (effettivamente $w(s) \in T_{\gamma(s)}(S)$)

In generale $w(l) \neq w_0$

Posso considerare l'angolo tra $x_u(\gamma(s))$ e $w(s)$ e lo chiamo $\varphi(s)$

L'angolo tra $w(l)$ e $w(0)$ sarà $\varphi(l) - \varphi(0)$

$$\text{Abbiamo visto } \left[\frac{Dw}{ds} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u \dot{v} - E_v \dot{u}) + \frac{d\varphi}{ds}$$

perché w è parallelo $= 0$

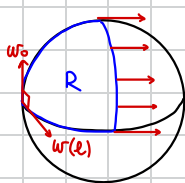
$$\text{Possiamo allora trovare } \varphi(l) - \varphi(0) = \int_0^l \frac{d\varphi}{ds} ds = - \int_0^l \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u \dot{v} - E_v \dot{u}) ds = \iint_R K d\sigma$$

come abbiamo fatto in GB locale
GAUSS GREEN

$$\iint_R K d\sigma = - \iint_{x'(R)} \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u du dv$$

ES

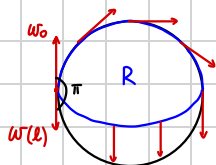
w_0 in questo caso
vett. tangente



Triangolo Geodetico

$$\varphi(l) - \varphi(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{torna perché } \iint_R K d\sigma = \frac{1}{r^2} \text{Area } R = \frac{\pi r^2}{r^2} = \frac{\pi}{2}$$

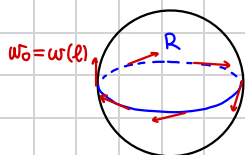
ES



Biangolo geodetico

$$\varphi(l) - \varphi(0) = \iint_R K d\sigma = \frac{1}{r^2} \text{Area } R = \frac{\pi r^2}{r^2} = \pi$$

ES

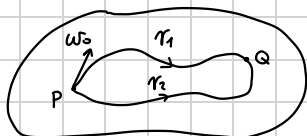


$$\varphi(l) - \varphi(0) = \iint_R K d\sigma = \frac{1}{r^2} 2\pi r^2 = 2\pi$$

Sono, cilindro, superficie di tang.

OSS

Se $K \equiv 0$ (S sviluppabile) vale la PROP: S sviluppabile $\Leftrightarrow S$ è un cono, un cilindro oppure superficie di tangenti



Considero $w_0 \in T_P(S)$ e faccio il trasporto parallelo lungo γ_1 t.c. $\gamma_1(0) = P$, $\gamma_1(l) = Q$ e
con lung. d'arco

trovo $w(l) \in T_Q(S)$

Trasporto w_0 lungo $\gamma_2 \Rightarrow \gamma_2(0) = P$, $\gamma_2(l') = Q$ e trovo $w': [0, l'] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $w'(l') \in T_Q(S)$
lung. d'arco

Suppongo di avere una regione semplice R t.c. $\partial R = \text{Im} \gamma_1 \cup \text{Im} \gamma_2$

$\alpha = \text{angolo tra } w(l) \text{ e } w'(l') = \iint_R K d\sigma \leftarrow \text{in generale}$

Ma se la superficie è sviluppabile (cioè $K=0$) $\Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow w(l) = w'(l')$

Quindi: Se γ_1, γ_2 sono cammini omotopi relativamente agli estremi e $K=0$

$\Rightarrow$ il trasporto parallelo lungo γ_1 e γ_2 non cambia

OSS

Se $K=0$  γ bordo di una regione semplice su S sviluppabile

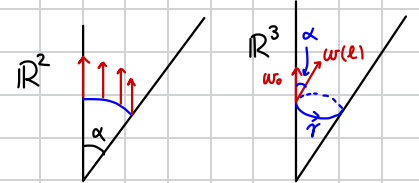
$$\Rightarrow \varphi(l) - \varphi(0) = 0$$

Se invece γ curva chiusa semplice ma NON bordo di una regione semplice

$\Rightarrow$ NON è detto che $\varphi(l) - \varphi(0) = 0$

ES

Cono: una retta isometrica ad una porzione di piano



Quindi il trasporto lungo una curva chiusa sul cono mi dà $\varphi(l) - \varphi(0) = \alpha$

Una curva semplice chiusa sul cono ($\Rightarrow$ è omotopa a γ) orientata positivamente, se gli

faccio il trasporto parallelo viene sempre $\varphi(l) - \varphi(0) = \alpha$

Se la curva chiusa non è semplice e faccio n giri ($n \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow \varphi(l) - \varphi(0) = n\alpha$

perché sono omotopic. equivalenti

(osservo che $\pi_1(\text{Cono}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$)

OSS CAMPI VETTORIALI SU SUPERFICIA

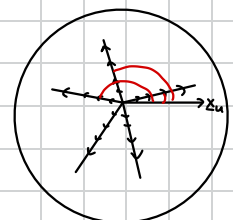
Dei campi vettoriali su una superficie parametrizzata sono dati da

$$X(u,v)x_u + Y(u,v)x_v \text{ con } X, Y \text{ funzioni almeno continue}$$

DEF ZERO ISOLATO - PUNTI SINGOLARI

Si ha uno zero isolato di un campo vettoriale per $u=u_0, v=v_0$ se $X(u_0, v_0) = 0$ e

$Y(u_0, v_0)$ e in un intorno di (u_0, v_0) $X(u,v) \neq 0$ e $Y(u,v) \neq 0$



OSS

Considero $\gamma: [0, \ell] \rightarrow S$ curva chiusa semplice bordo di una regione semplice R

tc $z(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ pto singolare; R non deve contenere altri pti singolari

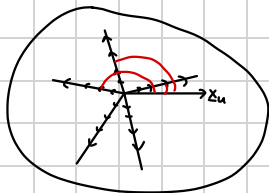
Considero l'angolo $\varphi(s)$ tra $X(u, v)x_u + Y(u, v)x_v$ e una direzione fissata (per esempio x_u)

Otengo una funzione continua $\varphi: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(\ell) - \varphi(0) = 2\pi I$ dove

$I \in \mathbb{Z}$ è **INDICE DI ROTAZIONE DEL CAMPO RELATIVO AL PUNTO SINGOLARE** che stiamo considerando

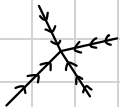
Inoltre I non dipende dalla curva scelta purché orientata positivamente

ES



Campo radiale di coordinate $X(u, v) = u$ $Y(u, v) = v \Rightarrow I = 1$

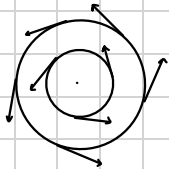
ES



$I = 1$ $X(u, v) = -u$
 $Y(u, v) = -v$

(rispetto all'esempio precedente ho aumentato tutti gli angoli di π)

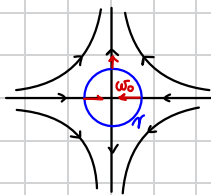
ES



$X(u, v) = -v$ $I = 1$
 $Y(u, v) = u$

ES

$X = -u$
 $Y = v$

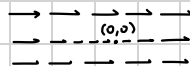


$I = -1$
 $\varphi(\ell) - \varphi(0) = -2\pi$

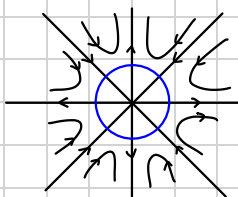
ES

$X(u, v) = u^2 + v^2$
 $Y(u, v) = 0$

$\varphi(\ell) - \varphi(0) = 0$



ES



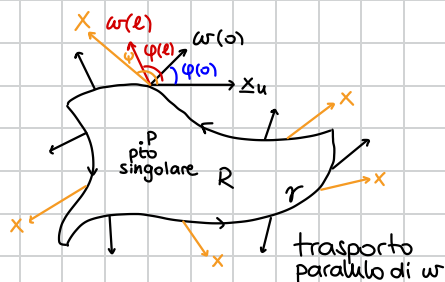
$I = -2$

S superficie orientata compatta con X campo vettoriale su S con un numero finito di

punti singolari P_i di indici $I_i \Rightarrow \sum_{\substack{P_i \text{ pto} \\ \text{singolare di } X}} I(P_i) = \chi(S)$

DIM

Suddivido S in tasselli (o triangoli) in modo che ogni tassello è contenuto in una carta con parametrizzazione ortogonale, il bordo dei tasselli non contiene pti singolari e l'interno di un tassello contiene al più un pto singolare



w campo parallelo lungo una curva regolare a tratti chiusa bordo di una regione semplice

$\psi(s) = \text{angolo tra } \Delta_u(r(s)) \text{ e } X(r(s))$ con $r: [0, l] \rightarrow S$ con lunghezze d'arco

$\psi: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua

$\psi(l) - \psi(0) = 2\pi I(P)$ p è l'unico pto singolare di X in R

Sappiamo anche che $\psi: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$(\psi(l) - \psi(0)) - (\psi(0) - \psi(0)) = \iint_R K d\sigma - 2\pi I(P)$$

da qui si vede anche che I non dipende dalla parametrizzazione scelta
 $= 0 \Leftrightarrow R$ non contiene pti singolari

Sommiamo i contributi di tutte le identita' di questo tipo al variare di R tassello su S

Le curve regolari a tratti bordo dei vari R sono orientate positivamente (usiamo il fatto di aver scelto un'orientazione (oss: lati che sono comuni a 2 regioni sono orientati con orientazioni opposte a seconda della curva))



Siano $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_q = l \Rightarrow$ i lati sono $r([s_i, s_{i+1}])$ $i=0 \dots q-1$

Il contributo di R è dato da

$$(\psi(l) - \psi(0)) - (\psi(0) - \psi(0)) = \sum_{i=0}^{q-1} (\psi(s_{i+1}) - \psi(s_i)) - (\psi(s_i) - \psi(s_i)) = \iint_R K d\sigma - 2\pi I(P)$$

posso riscriverlo come somma telescopica

Somma ora su R

$$\sum_{\text{tassello } R} \iint_R K d\sigma - \sum_{\substack{P \text{ pto} \\ \text{di } X}} 2\pi I(P) = 0 \Rightarrow \underbrace{\iint_S K d\sigma}_{= \text{GB}} = 2\pi \sum_P I(P)$$

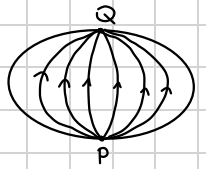
c'è se R contiene un pto singolare
 $2\pi \chi(S)$

CWD

ES

Se S è omeomorfa ad una sfera $\chi(S)=2 \Rightarrow$ ci saranno 2 pti singolari

$$\chi(P)=\chi(Q)=0 \quad I(P)=1 \quad I(Q)=1 \Rightarrow \chi(S)=I(P)+I(Q) \Rightarrow \text{torna il teo}$$

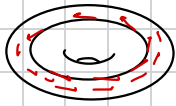


OSS

La sfera non è pettinabile

Se $S \cong \text{Sfera}$ e X campo vettoriale su $S \Rightarrow \exists p \in S$ t.c. $X(p)=0$ (perchè $\chi(S)=2 \neq 0$)

ES



Toro (superficie di rotazione) oppure $S \cong \text{Toro}$

$$\chi(S)=0 \Rightarrow \text{ci sono campi vettoriali non nulli per esempio } X=x_u$$

campo t.c. $X \neq 0 \forall$ punto del toro

Anche il campo $X=x_v$ ha questa proprietà

ES



4 pti singolari

sorgente

$$I(P_1)=1 \quad \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix}$$

pozzo

$$I(P_4)=1 \quad \begin{pmatrix} \downarrow \\ \uparrow \end{pmatrix}$$

(sorgenti e pozzi hanno indice 1)

$$I(P_2)=-1 \quad \begin{pmatrix} \nearrow \\ \searrow \end{pmatrix}$$

$$I(P_3)=-1 \quad \begin{pmatrix} \nwarrow \\ \nearrow \end{pmatrix}$$

pti di sella

$$\text{Il teorema è verificato } 0 = \chi(\text{Toro}) = \sum_{i=1}^4 I(P_i)$$

Se $x(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ solita parametrizzazione del topo mostrare che il campo

$$X = \frac{\partial x}{\partial u} x_u + \frac{\partial x}{\partial v} x_v \text{ ha 4 pti singolari}$$

e' la prima coordinata in $\mathbb{R}^3$

ES

Superficie di genere g S_g

$$\chi(S_g) = 2-2g \quad \text{per } g \geq 1 \quad \chi(S_g) < 0 \Rightarrow X \text{ campo vettoriale su } S_g \text{ deve avere pti singolari}$$

ES

Se ho una cartina geografica S con $M = \# \text{montagne}$ $V = \# \text{valli}$ $S = \# \text{Passi (sella)}$

$$X \text{ campo vettoriale su } S \Rightarrow \sum_{\substack{P_i \text{ pto sing} \\ \text{su } S}} I(P_i) = M+V-P = \chi(S) = 2-2g$$

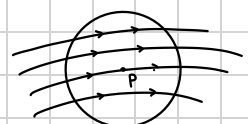
OSS

DEF PARAMETRIZZAZIONI ORTOGONALI (pag 182 DOCARMO)

Da qui in poi verranno trattati risultati locali e non globali

Sia S superficie parametrizzata, $P \in S$, X campo vettoriale (continuo) su S t.c. $X(P) \neq 0$

$\exists$ un intorno di p $U \subseteq S$ t.c. X ammette curve integrali in U



DEF $\gamma: I \rightarrow S$ CURVA INTEGRALE se $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$

DEF Un **INTEGRALE PRIMO** f di X è una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ costante lungo le curve integrali γ di X

DEF f si dice integrale primo **PROPRIO** se $\nabla f = (f_u, f_v) \neq 0$ in ogni punto

Localmente, dato X , esiste un integrale primo proprio di X (dall'analisi)

TEO

Data S superficie parametrizzata, $p \in S$, dati i campi vettoriali su S X e Y t.c.

$X(p)$ e $Y(p)$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \exists$ una carta locale $x: U \rightarrow S$ $p \in x(u)$ t.c.

$X(u,v)$ è proporzionale a $x_u(u,v)$ e $Y(u,v)$ è proporzionale a $x_v(u,v)$

DIM

Considero f_2 integrale primo di X e f_1 integrale primo di Y (propri) in $p \in U \subseteq S$

Considero la mappa $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2$ $(u,v) \mapsto (f_1(u,v), f_2(u,v)) = (\bar{u}, \bar{v})$ $P = x(u_0, v_0)$

Essendo f_1 e f_2 propri si ha che $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$ in un intorno di (u_0, v_0)

perché i campi sono indipendenti

(Supponiamo $X = X_1 x_u + X_2 x_v$, $Y = Y_1 x_u + Y_2 x_v$, essendo i campi indipendenti si ha $\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \neq 0$
 $\Rightarrow$ componendo con il cambio coordinate, che ha $\det \neq 0$, si ottiene la matrice $*$)

Per teo funzione inversa φ è localmente invertibile $\Rightarrow y = x \circ \varphi^{-1}$

y ha per costruzione come curve coordinate $\bar{u} = f_1(u,v) = \text{costante}$ e $\bar{v} = f_2(u,v) = \text{costante}$

QED

COR ESISTENZA PARAMETRIZZAZIONE ORTOGONALE

Data una superficie parametrizzata $x = x(u,v)$, $P = x(u_0, v_0)$ scelgo i campi vettoriali

della prop precedente $X = x_u$, $Y = x_v - \frac{E}{F} x_u$ campi vettoriali (ortogonalizzazione di Gram-Schmidt)

$\Rightarrow X$ e Y ortogonali tra loro $\Rightarrow \exists$ una parametrizzazione $y = y(\bar{u}, \bar{v})$

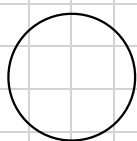
con $y_{\bar{u}} \parallel X$ e $y_{\bar{v}} \parallel Y$ per proposizione precedente $\Rightarrow y_{\bar{u}} \cdot y_{\bar{v}} = 0 \Rightarrow F(\bar{u}, \bar{v}) = 0$

Abbiamo quindi esibito una parametrizzazione ortogonale QED

OSS

In generale non si può avere $x_u = X$ e $x_v = Y$

ES



Considero in un aperto della sfera 2 campi X, Y t.c. $\|X(u,v)\| = \|Y(u,v)\| = 1$

$$X(u,v) \cdot Y(u,v) = 0$$

$X \sim$ tangente ai paralleli $Y \sim$ tangente ai meridiani

Se PA avessi $x_u = X$ e $x_v = Y \Rightarrow E=1, F=0, G=1$ costanti in un intorno aperto

28/05

$\Rightarrow$ Questo aperto è isometrico ad un aperto del piano $\Rightarrow K=0$ ASSURDO

perchè per la sfera $K = \frac{1}{r^2}$

ES 1

$P \in S$ iperbolico $\Rightarrow \exists$ una parametrizzazione di un intorno di P tale che le curve coordinate sono curve asintotiche

SOLG

Voglio costruire 2 campi vettoriali X e Y in un intorno di P tale che X, Y linearmente indipendenti e paralleli alle direzioni asintotiche

Gioè $k_N(X)=0$ e $k_N(Y)=0$ in ogni punto $\Leftrightarrow \mathbb{I}(X)=0$ $\mathbb{I}(Y)=0 \quad \forall (u,v) \in \text{intorno } P$

$\mathbb{I}(u'x_u + v'x_v) = 0$

$ex^2 + 2fx\beta + g\beta^2 = 0$ le direzioni asintotiche verificano questa equazione

(se scriviamo le direzioni asintotiche $\alpha x_u + \beta x_v$)

$\Rightarrow \exists$ 2 soluzioni a meno di proporzionalità infatti, se pongo $\beta=1$, vale

$ex^2 + 2fx + g = 0 \Rightarrow \Delta = f^2 - eg > 0$ perchè il pto è iperbolico

Abbiamo quindi α_1 e $\alpha_2 \Rightarrow X = \alpha_1 x_u + x_v$ $Y = \alpha_2 x_u + x_v$ direzioni asintotiche

Trovo quindi la parametrizzazione $x(\bar{u}, \bar{v})$ cercata

ES 2

Sia $P \in S$ parametrizzata, punto NON ombelicale $\Rightarrow \exists$ una parametrizzazione di un intorno di P tale che le curve coordinate sono linee di curvatura

SOLG

Voglio trovare X, Y campi vettoriali tale che $X(u,v), Y(u,v)$ sono le direzioni principali di curvatura $\forall (u,v) \in \text{intorno di } P$

$\det \begin{pmatrix} \beta^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 \\ e & f & g \\ E & F & G \end{pmatrix} = 0$ le soluzioni sono i vettori delle direzioni principali

di curvatura $\alpha x_u + \beta x_v$ a meno di proporzionalità (essendo il pto non ombelicale

$\exists$ 2 soluzioni distinte reali a meno di proporzionalità)

Pongo $\beta=1 \Rightarrow$ risolvo $\det \dots$ per α e trovo α_1, α_2 soluzioni distinte

Otengo $X = \alpha_1 x_u + x_v$ k_1 e $Y = \alpha_2 x_u + x_v$ k_2 sono distinti

Trovo quindi la nuova parametrizzazione $x = x(\bar{u}, \bar{v})$ α

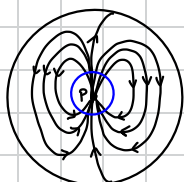
In questo caso $X \cdot Y = 0 \Rightarrow x_u \cdot x_v = 0 \Rightarrow \bar{F} = 0 \Rightarrow \bar{f} = 0$
 $k_1 = \frac{II(x_u)}{I(x_u)} = \frac{\bar{e}}{\bar{e}}$ $k_2 = \frac{II(x_v)}{I(x_v)} = \frac{\bar{g}}{\bar{g}} \Rightarrow K = k_1 k_2 = \frac{\bar{e}\bar{g}}{\bar{e}\bar{g}}$ ↑ applico operatore di forma

ES 1*

Quando le curve coordinate sono asintotiche $II(x_u) = 0 \Rightarrow \bar{e} = 0$
 $II(x_v) = 0 \Rightarrow \bar{g} = 0$
 $K = \frac{\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2}{\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2} = \frac{-\bar{f}^2}{\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2} < 0$ $\bar{f} \neq 0$ perchè sono tutti pti iperbolici

ES Campi vettoriali sulla sfera

E' possibile avere un unico pto singolare di indice 2 sulla sfera

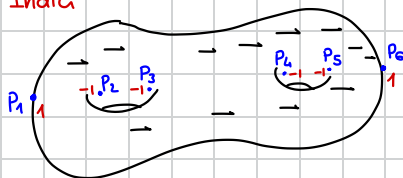


P unico pto singolare

$$I(P) = 2 = \chi(S)$$

ES

Indici



$S \subseteq \mathbb{R}^3$ di genere 2

$$X(P) = \pi_{T_P(S)}(1, 0, 0)$$
 ↑ proiezione

Pti singolari P di X sono tc $X(P) = 0 \Leftrightarrow N(P) \parallel$ asse x

$$6 \text{ pti critici} \Rightarrow \sum_{i=1}^6 I(P_i) = -2 = \chi(S)$$

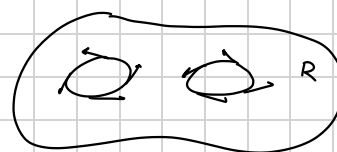
In general se S ha genere g posso costruire un campo vett con 2 pti critici di indice 1 e $2g$ di indice -1

ES Superficie con bordo o Regione

Se ho R regione (o superficie con bordo liscio) X campo vettoriale su R tc X ↑ oppure ortogonale tangente alle

curve che formano il bordo di R con pti singolari P_i

$$\text{isolati nell'interno di R} \Rightarrow \sum_i I(P_i) = \chi(S)$$



$$\partial R = \bigcup I_m(r_i)$$

(cioè continua a valere il teorema)

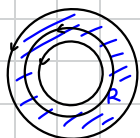
ES Disco chiuso

$$\text{Si dimostra allo stesso modo ma } \int_{\gamma} k_g ds = \varphi(\ell) - \varphi(\ell) - (\varphi(0) - \varphi(0))$$



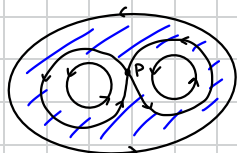
$$\text{Ind}(P) = 1$$

ES



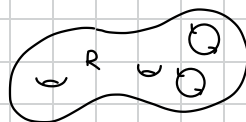
$$\chi(R) = 0 \quad X \text{ non ha pti singolari}$$

ES



$$\chi(R) = -1 \quad P \text{ è l'unico pto singolare} \quad I(P_i) = -1$$

ES



$$\chi(R) = -2 - 2 = -4$$

1) Curva chiusa piana $\gamma(t) = (\sin 2t, \sin 3t)$ $t \in [0, 2\pi]$

a) Verificare che è regolare: $\gamma'(t) = (2\cos 2t, 3\cos 3t) = 0 \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
 e $3t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [0, 2\pi]$

b) Indica di rotazione?

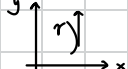
Osservo che $\gamma(-t) = (-\sin 2t, -\sin 3t) = -\gamma(t) \Rightarrow \text{Ind}(-\gamma) = \text{Ind} \gamma$

$\hat{\gamma}(t)$
 $\text{Ind}(\hat{\gamma}(-t)) = -\text{Ind} \gamma \Rightarrow -\text{Ind} \gamma = \text{Ind} \hat{\gamma} = \text{Ind} \gamma \Rightarrow \text{Ind} \gamma = 0$

Metodo standard: Per quali t $\gamma'(t)$ è parallela all'asse y con verso concorde

vali $\Leftrightarrow \cos 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Voglio pure che la II componente di $\gamma'(t)$ sia positiva $\cos 3t = -\frac{\sqrt{2}}{2}, +\dots, +\dots, -\dots$

$\Rightarrow t = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ dove si ha una cosa del tipo 

Calcolo ora la curvatura orientata in questi 2 punti $\text{sign} \tilde{k} = \text{sign}(x'y'' - x''y')$

$$x' = 2\cos 2t \quad y' = 3\cos 3t \quad x'' = -4\sin 2t \quad y'' = -9\sin 3t$$

$$t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \text{sign} \det \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = \text{sign} \det \begin{pmatrix} 0 & 3\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -4 & * \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow \tilde{k}(\frac{3\pi}{4}) < 0$$

$$\sum_{i=1}^n \text{sign} \tilde{k}_i \\ \Rightarrow \text{Ind} \gamma = -1 + 1 = 0$$

$$t = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \text{sign} \det \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = \text{sign} \det \begin{pmatrix} 0 & 3\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -4 & * \end{pmatrix} = +1 \Rightarrow \tilde{k}(\frac{5\pi}{4}) > 0$$

(oss: se $\text{sign} \tilde{k} = 0 \Rightarrow$ il punto è di flesso $\Rightarrow$ dovevo prendere un'altra direzione)

c) Trovare i flussi della curva cioè $\tilde{k}(t) = 0$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\tan 2t = 3\tan 3t \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \pi \text{ (con il grafico)}$$

$\Rightarrow$ ci sono 2 pti di flesso

Quindi la curvatura $\tilde{k} > 0$ per $t \in (\pi, 2\pi)$ per continuità
 $\tilde{k} < 0$ per $t \in (0, \pi)$

d) γ è semplice? NO perché $\text{Ind} \gamma \neq \pm 1 \Rightarrow$ Trovare le autointersezioni

$$\gamma(0) = \gamma(\pi) = (0, 0)$$

Per trovare tutti i pti doppi devo trovare $t_1, t_2 : \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ cioè

$$\begin{cases} A) \sin 2t_1 = \sin 2t_2 \\ B) \sin 3t_1 = \sin 3t_2 \end{cases}$$

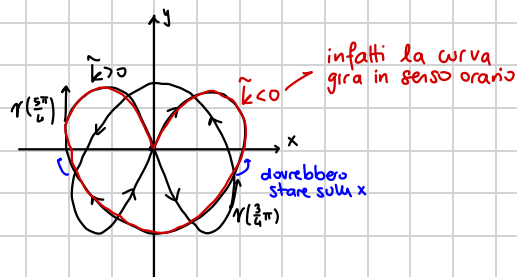
$$\text{da A) } 2t_1 = 2t_2 + 2\pi \vee 2t_1 + 2t_2 = \pi \vee 2t_1 + 2t_2 = 3\pi$$

$$\text{da B) } 3t_1 = 3t_2 + 2\pi \vee 3t_1 = 3t_2 + 4\pi \vee 3t_1 + 3t_2 = \pi \quad 3t_1 + 3t_2 = 3\pi \quad 3t_1 + 3t_2 = 5\pi$$

Bisogna risolvere tutti i sistemi, per esempio

$$\begin{cases} t_1 - t_2 = \pi \\ t_1 + t_2 = \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \begin{aligned} t_1 &= \frac{2\pi}{3} \\ t_2 &= t_1 + \pi = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

In tutto ci sono 7 pti doppi



2) Superficie di ENNEPER $\mathbf{x}(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$ $u, v \in \mathbb{R}$

a) Dov'è regolare? cioè $\mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ indipendenti

$$\mathbf{x}_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u) \quad \mathbf{x}_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$$

$$IFF: F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1 - u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 = 1 + u^4 + v^2 - 2u^2 + 2v^2 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 = (1 + u^2 + v^2)^2$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 2uv(1 - u^2 + v^2) + 2uv(1 - v^2 + u^2) - 4uv = 0 \Rightarrow \text{parametrizzazione ortogonale}$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \dots = (1 + u^2 + v^2)^2 = F$$

Essendo $F=0$ e $\|\mathbf{x}_u\| > 0$ $\|\mathbf{x}_v\| > 0 \Rightarrow \mathbf{x}_u$ e $\mathbf{x}_v$ sono linearmente indip $\forall (u, v)$

Localmente $\mathbf{x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è iniettiva $\Rightarrow$ superficie regolare

b) $\mathbf{x}$ è iniettiva?

Per vederlo passiamo in coordinate polari $u = \rho \cos \theta$ $v = \rho \sin \theta \Rightarrow \mathbf{x}(\rho_1, \theta_1) = \mathbf{x}(\rho_2, \theta_2)$

$$\Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ e } (\theta_1 = \theta_2) \text{ o } \theta_1 = 2\pi - \theta_2, \theta_1 = \pi - \theta_2$$

Questi punti dove la superficie si autointerseca corrispondono a $x=0, y=0$

Non è una superficie regolare globalmente

c) IFF?

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1-u^2+v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1-v^2+u^2 & -2v \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{EG}} (-2u(1+u^2+v^2), 2v(1+u^2+v^2), (1-u^2-v^2)(1+u^2+v^2))$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{(1+u^2+v^2)} (-2u, 2v, 1-u^2-v^2)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (-2u, 2v, 2) \Rightarrow e = N \cdot \mathbf{x}_{uu} = \frac{1}{1+u^2+v^2} (4u^2 + 4v^2 + 2 - 2u^2 - 2v^2) = \dots = 2$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (2v, 2u, 0) \Rightarrow f = N \cdot \mathbf{x}_{uv} = \dots = 0 \Rightarrow \text{le curve coordinate sono curve principali o linee di curvatura}$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (2u, -2v, -2) \Rightarrow g = N \cdot \mathbf{x}_{vv} = \dots = -2$$

$$\text{eg-} f^2 = -4 < 0 \Rightarrow \text{tutti i pti sono iperbolici}$$

d) Calcolare k_1, k_2, K, H

$$\text{Dato che } F=0, f=0 \Rightarrow k_1 = \frac{II(x_u)}{I(x_u)} = \frac{e}{E} = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \quad k_2 = \frac{II(x_v)}{I(x_v)} = \frac{e}{G} = \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4} \quad H \equiv 0$$

si dice allora superficie minima

e) Direzioni asintotiche?

$$e = -g$$

$$II(\alpha x_u + \beta x_v) = 0 \text{ cioè } \alpha^2 e + 2\alpha\beta f + \beta^2 g = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 - 2\beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm \beta$$

le direzioni asintotiche sono date da $x_u + x_v$ e $x_u - x_v$

f) Equazioni delle linee asintotiche

$$\begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t) \end{cases} \quad \gamma(t) = x(u(t), v(t)) \text{ è una linea asintotica se } \gamma'(t) = u'(t) x_u(u(t), v(t)) + v'(t) x_v(u(t), v(t))$$

$$\Rightarrow u' = v' \quad \sim \text{soluzione } u(t) = v(t) + c \quad \text{famiglia linee asintotiche}$$

$$u' = -v' \quad \sim \text{soluzione } u(t) = -v(t) + d \quad \text{famiglia linee asintotiche}$$

se $c=0$

$$\text{Per esempio le linee asintotiche con } c \text{ fissato è } x(v+c, v) \stackrel{!}{=} (v - \frac{v^3}{3} + v^3, v - \frac{v^3}{3} + v^3, 0)$$

è una retta

g) Dim che le curve coordinate sono piane

$$\text{Calcolo } \tau \text{ della curva coordinata } v=v_0 \quad \gamma(u) = x(u, v_0) \quad \gamma' = x_u \quad \gamma'' = x_{uu}$$

$$\gamma''' = x_{uuu} = (-2, 0, 0)$$

$$(\gamma' \wedge \gamma'') \cdot \gamma''' = 0 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow \text{la curva è piana}$$

h) k_g delle curve coordinate

$$\gamma(u) \text{ giace sul piano } \perp \text{ a } \gamma''' \text{ cioè } \underline{b} \parallel \gamma'''$$

binormali

$$k_N = k(u \cdot N) \quad k_g^2 + k_N^2 = k^2 \quad \text{oppure dato che } F=0 \Rightarrow k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (\dot{u} G_u - \dot{u} E_v) + \frac{d\varphi}{ds}$$

=0 perché la curva è coordinata

$$\text{Curva coordinata } v=v_0 \Rightarrow k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \dot{u} E_v$$

$$\dot{u} = \frac{du}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{du}} = \frac{1}{\|x_u\|} = \frac{1}{\sqrt{E}} \Rightarrow k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{1}{\sqrt{E}} E_v = -\frac{2v}{1+u^2+v^2}$$

i) Quadrilatero curvilineo con $1 \leq u \leq 2$ e $1 \leq v \leq 2 \Rightarrow$ calcolare $\int_Q K d\sigma$ con GB