

**GEOMETRIA 4**  
**ESAME SCRITTO DEL 16-6-2009**

Si risolvano i seguenti esercizi spiegando in dettaglio i procedimenti seguiti.

**Esercizio 1.** Si ricorda che il piano proiettivo reale è definito da

$$\mathbb{RP}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} / \simeq$$

dove  $\simeq$  è la relazione di equivalenza  $(x, y, z) \simeq (-x, -y, -z)$ . Indichiamo con  $[x, y, z]$  la classe di  $(x, y, z)$ . Sia  $X = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[1, 0, 0], [0, 1, 0]\}$ . Si calcoli il gruppo fondamentale  $\pi_1(X, p)$ , ove  $p = [0, 0, 1]$ .

**Esercizio 2.** Si consideri la curva piana  $\gamma$  chiusa definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = \sin(t) + \sin(2t). \end{cases}$$

per  $t \in [0, 2\pi]$ .

- 1) Si dimostri che  $\gamma$  è regolare
- 2) Si calcoli l'indice di rotazione di  $\gamma$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la superficie parametrizzata

$$\begin{cases} x(u) = uv \\ y(u) = u^2v \\ z(u) = u^3. \end{cases}$$

- 1) Si calcoli la seconda forma fondamentale nel punto  $P = (1, 1, 1)$ .
- 2) Si determinino le eventuali direzioni asintotiche in  $P$ .
- 3) Si determinino le sezioni normali in  $P$  aventi la curvatura massima.