

GEOMETRIA 4
ESAME SCRITTO DEL 16-6-2009

Si risolvano i seguenti esercizi spiegando in dettaglio i procedimenti seguiti.

Esercizio 1. Si ricorda che il piano proiettivo reale è definito da

$$\mathbb{RP}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} / \simeq$$

dove \simeq è la relazione di equivalenza $(x, y, z) \simeq (-x, -y, -z)$. Indichiamo con $[x, y, z]$ la classe di (x, y, z) . Sia $X = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[1, 0, 0], [0, 1, 0]\}$. Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(X, p)$, ove $p = [0, 0, 1]$.

Esercizio 2. Si consideri la curva piana γ chiusa definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = \sin(t) + \sin(2t). \end{cases}$$

per $t \in [0, 2\pi]$.

- 1) Si dimostri che γ è regolare
- 2) Si calcoli l'indice di rotazione di γ .

Esercizio 3. Si consideri la superficie parametrizzata

$$\begin{cases} x(u) = uv \\ y(u) = u^2v \\ z(u) = u^3. \end{cases}$$

- 1) Si calcoli la seconda forma fondamentale nel punto $P = (1, 1, 1)$.
- 2) Si determinino le eventuali direzioni asintotiche in P .
- 3) Si determinino le sezioni normali in P aventi la curvatura massima.